INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. Björn Willenberg
M.Sc. Boris Celan

Rechenmethoden II SoSe 2013

3. Übungsblatt Abgabe: Di, 30.04.2013 bis 11.30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-braunschweig.de/theophys/edu/sose13/rm213`.

9. **Linienintegrale**
Ein Auto hat drei Möglichkeiten, vom Ort $(0,0,0)$ nach $(1,1,0)$ zu fahren: Den direkten Weg C_1 über einen Berg, den Weg C_2 um den Berg herum, sowie die Fahrt über die Autobahn $C_3 + C_4$. Dabei ist:

$$\begin{array}{lll} C_1: & (t, t, -t^2+t) & 0 \le t \le 1, \\ C_2: & (t, t^2, 0) & 0 \le t \le 1, \\ C_3: & (3t, 0, 0) & 0 \le t \le 1/3, \\ C_4: & (1, 3t, 0) & 0 \le t \le 1/3. \end{array}$$

(a) Skizzieren Sie in der x-y-Ebene ($z = 0$) die drei Wege.

(b) Berechnen Sie für die drei Wege den Geschwindigkeitsvektor (Tangentialvektor) $\vec{v}$ sowie den Betrag der Geschwindigkeit.

(c) Berechnen Sie die Weglängen (Bogenlängen) der drei Wege. Sie haben dazu zwei Möglichkeiten:

i. Benutzen Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil (b) sowie den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und zurückgelegter Strecke.

ii. Benutzen Sie die bekannte Formel für die Bogenlänge $L = \int \mathrm{d}s$, wobei $\mathrm{d}s$ ein infinitesimales Geradenstück ist.

10. **Volumen- und Oberflächenintegrale**
Durch die Menge $\mathcal{E} = \{(x,y,z) \,|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\}$ wird ein Ellipsoid mit den Halbachsen a, b und c definiert. Eine mögliche Parametrisierung ist

$$\begin{aligned} x &= a\,s\,\sin\theta\,\cos\phi, \\ y &= b\,s\,\sin\theta\,\sin\phi, \\ z &= c\,s\,\cos\theta. \end{aligned}$$

Überlegen Sie sich zunächst die Wertebereiche für die Koordinaten s, θ und ϕ, sowie deren anschauliche Bedeutung.

(a) Bestimmen Sie die Jacobi'sche Funktionaldeterminante.

(b) Berechnen Sie die Gesamtmasse eines Ellipsoids mit konstanter Massendichte ρ_0.

(c) Geben Sie das Flächenelement $\mathrm{d}O$ auf der Oberfläche des Ellipsoids allgemein an und berechnen Sie damit die Oberfläche für ein abgeplattetes Ellipsoid mit $a = b$.
Hinweis: Es ist

$$\int_0^\pi \sin(x)\sqrt{a^2\cos^2 x + c^2 \sin^2 x}\,\mathrm{d}x = a + \frac{2c^2}{a\epsilon}\ln\left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\right);\ \epsilon = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}.$$

Bitte wenden! →

11. **Gauß'scher Integralsatz**
Eine Punktladung im Ursprung erzeugt das elektrische Feld $\vec{E} = Q\,\vec{r}/r^3$ mit $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(a) Berechnen Sie $\operatorname{div} \vec{E}$.
Hinweis: Nehmen Sie hier an, dass $Q = Q(r)$ ist.

(b) Berechnen Sie das Volumenintegral

$$I_1 = \iiint \operatorname{div} \vec{E}\, \mathrm{d}V$$

über eine Kugel vom Radius R um den Koordinatenursprung. Verwenden Sie Kugelkoordinaten $x = r \sin\theta \cos\phi$, $y = r \sin\theta \sin\phi$, $z = r \cos\theta$.

(c) Berechnen Sie den Fluss I_2 von $\vec{E}$ durch die Oberfläche der Kugel:

$$I_2 = \oiint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{f}.$$

Dabei ist $\mathrm{d}\vec{f} = R^2 (\vec{r}/r) \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi$.

(d) Nennen Sie ein weiteres Beispiel aus der Physik für Vektorfelder dieser Art.