Prof. Dr. W. Brenig
M.Sc. Boris Celan

Physikalische Rechenmethoden I — WiSe 2016/17

2. Übungsblatt — Abgabe: Do, 02.11.2016 bis 11.30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1617/rm1617`.

4. **Taylorentwicklung I (7 Punkte)**

(a) Geben Sie die Konvergenzradien folgender Reihen an:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$$

(b) Gegeben sind die folgenden Funktionen:

$$f_1(x) = \sin(x)\ ,\ x_0 = 0$$
$$f_2(x) = \cos(x)\ ,\ x_0 = 0$$
$$f_3(x) = \exp(ix)\ ,\ x_0 = 0$$

i. Entwickeln Sie die gegebenen Funktionen jeweils in eine Taylor-Reihe um x_0.
ii. Geben Sie die Konvergenzradien der bestimmten Taylor-Reihen für die Funktionen f_1 und f_2 an.
iii. Stellen Sie einen algebraischen Zusammenhang zwischen den Taylor-Reihen der Funktionen f_1, f_2 und f_3 her.

5. **Differenzieren und Regel von l'Hospital (7 Punkte)**

i. $\frac{\sin x}{\ln(x+1)}$
ii. $\frac{\exp(x^2)-\exp x}{x-1}$
iii. $\frac{x \exp x - \exp(2x-1)}{x(x-1)^2}$
iv. $x \sin x$
v. $\ln(1+x^2)$
vi. $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

(a) Bestimmen Sie für die gegebenen Funktionen die erste Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$
(b) Bestimmen Sie zusätzlich für die Aufgabenteile i.-iii. den Grenzwert $\lim_{x\to 0} f(x)$.
(c) Bestimmen Sie zusätzlich für den Aufgabenteil vi. die zweite Ableitung $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2 x} f(x)$, $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2 y} f(y)$ und $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2 z} f(z)$. Nehmen Sie dazu an, dass die zwei anderen Variablen des Tripels (x, y, z) konstant sind.

Bitte wenden! →

6. **Taylorentwicklung II: Relativistische Bewegungsenergie und Plank'sches Strahlungsgesetz (6 Punkte)**

(a) Nach der speziellen Relativitätstheorie hat ein Teilchen der Masse m die Gesamtenergie $E = mc^2$. Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit, die Masse hängt von der Geschwindigkeit v ab:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad m_0 : \text{Ruhemasse}$$

Die Ruheenergie des Teilchens ist $E_0 = m_0 c^2$. Die kinetische Energie ist als

$$E_{\text{kin}} = E - E_0 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

definiert. Entwickeln Sie E_{kin} nach v/c um $v/c = 0$ bis zur ersten relativistischen Korrektur.
Hinweis: Um sich die Rechnung einfacher zu machen, können Sie auch $x = v^2/c^2$ substituieren und nach x entwickeln. Vergessen Sie nicht die Rücksubstitution.

(b) Das Plank'sche Strahlungsgesetz

$$u(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{\exp(\frac{\hbar\omega}{k_B T}) - 1} \tag{1}$$

gibt die spektrale Verteilung der Energiedichte an. Dabei ist $\hbar$ das Plank'sche Wirkungsquantum, c die Lichtgeschwindigkeit, k_B die Boltzmann-Konstante, T die Temperatur und ω die Kreisfrequenz der elektromagnetischen Strahlung (dies ist die einzige Variable unserer Funktion).

i. Entwickeln Sie die spektrale Verteilung der Energiedichte $u(\omega)$ für kleine Frequenzen ($\hbar\omega \ll k_B T$) bis zur quadratischen Ordnung in ω. Sie erhalten das Rayleigh-Jeans-Gesetz:

$$u_{RJ}(\omega) = \frac{k_B T}{\pi^2 c^3} \omega^2$$

Hinweis: Substituieren Sie $x = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$ und absorbieren Sie alle Vorfaktoren in einer einzigen Konstanten. Entwickeln Sie dann um $x = 0$. Um in der Taylorentwicklung die Koeffizienten zu berechnen, müssen sie (mehrfach) l'Hospital anwenden.

ii. Näheren Sie den Nenner des Plank'schen Strahlungsgesetzes für kleine und für große ω, um ebenfalls das Rayleigh-Jeans-Gesetz sowie das Wien'sche Strahlungsgesetz zu erhalten.