2. Übungsblatt Abgabe: Di, 04.11.2014 bis 11.30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1415/quanten`.

6. **Erwartungswerte und Gruppengeschwindigkeit (8 Punkte)**
Gegeben sei ein Wellenpaket der Form

$$\Psi(\vec{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathrm{d}^3k\, \hat{\Psi}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\vec{k}}t)}.$$

Ferner wird der Erwartungswert einer Größe A bezüglich einer Funktion $\Psi(\vec{x})$ bzw. $\hat{\Psi}(\vec{k})$ definiert über

$$\langle A\rangle_\Psi = \frac{\int \mathrm{d}^3x\, \Psi^*(\vec{x})A(\vec{x})\Psi(\vec{x})}{\int \mathrm{d}^3x\, \Psi^*(\vec{x})\Psi(\vec{x})}, \qquad \langle A\rangle_{\hat{\Psi}} = \frac{\int \mathrm{d}^3k\, \hat{\Psi}^*(\vec{k})A(\vec{k})\hat{\Psi}(\vec{k})}{\int \mathrm{d}^3k\, \hat{\Psi}^*(\vec{k})\hat{\Psi}(\vec{k})}.$$

(a) Zeigen Sie, unter Ausnutzung grundlegender Eigenschaften der Fourier-Transformation, dass für zwei Wellenpakete Ψ_1 und Ψ_2 mit gleicher Dispersion $\omega_{\vec{k}}$ gilt

$$\int \mathrm{d}^3x\, \Psi_1^*(\vec{x},t)\Psi_2(\vec{x},t) = \int \mathrm{d}^3k\, \hat{\Psi}_1^*(\vec{k})\hat{\Psi}_2(\vec{k}).$$

(b) Zeigen Sie, dass für die Gruppengeschwindigkeit gilt:

$$\vec{v}_G := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\vec{x}\rangle_\Psi = \left\langle \vec{\nabla}_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}}\right\rangle_{\hat{\Psi}}.$$

(c) Berechnen Sie $\vec{v}_G$ so explizit wie möglich in den folgenden beiden Fällen

i.
$$\omega_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2}{2m}k^2,$$

ii. $\hat{\Psi}(\vec{k})$ ist "konzentriert" um $\vec{k}_0$, so dass man wie folgt entwickeln kann

$$\omega_{\vec{k}} \approx \omega_0 + \vec{v}_0\cdot(\vec{k}-\vec{k}_0).$$

Bitte wenden! →

7. **Standardabweichung und Heisenbergsche Unschärferelation (12 Punkte)**
Gegeben sei die folgende eindimensionale Wellenfunktion $\Psi_1(x,t)$

$$\Psi_1(x,t) = A\, e^{-\lambda|x|} e^{-i\omega t},$$

wobei A, λ und ω reelle Konstanten sind.

(a) Bestimmen Sie A, so dass die Wellenfunktion Ψ_1 normiert ist. D.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \Psi_1^*(x,t)\Psi_1(x,t) = 1.$$

(b) Berechnen Sie für die gegebene Wellenfunktion Ψ_1 und $t = 0$ mithilfe der Definitionen in Aufgabe (6) die Erwartungswerte $\langle x\rangle$,$\langle x^2\rangle$ sowie $\langle k\rangle$ und $\langle k^2\rangle$. Für die Erwartungswerte von $\langle k\rangle$ und $\langle k^2\rangle$ bietet es sich an, die Fouriertransformierte von $\Psi_1(x,0)$ zu benutzen.

(c) Gegeben Sei eine Wellenfunktion im Impulsraum $\hat{\Psi}_2(k)$ mit

$$\hat{\Psi}_2(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\delta k}} & \text{für } |k| < \frac{\delta k}{2}, \\ 0 & \text{für } |k| > \frac{\delta k}{2}, \end{cases} \qquad \delta k = \text{const.} \in \mathbb{R}^+.$$

Berechnen Sie analog zu Aufgabenteil (b) für die Wellenfunktion $\hat{\Psi}_2$ die Erwartungswerte von $\langle x\rangle$,$\langle x^2\rangle$ sowie $\langle k\rangle$ und $\langle k^2\rangle$. Für die Erwartungswerte von $\langle x\rangle$ und $\langle x^2\rangle$ bietet es sich diesmal an zunächst $\Psi_2(x)$ zu bestimmen.

(d) Die Standardabweichung des Ortes x bzw. Wellenvektors k ist definiert als

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$
$$\Delta k = \sqrt{\langle k^2\rangle - \langle k\rangle^2}.$$

Berechnen Sie mit den Ergebnissen aus den vorherigen Teilaufgaben für Ψ_1 und Ψ_2 die Standardabweichungen Δx, Δk sowie das Produkt $\Delta x \cdot \Delta k$.