Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. W. Brenig
M.Sc. Boris Celan
Dipl.-Phys. Björn Willenberg

Thermodynamik und Quantenstatistik WiSe 2013/14

2. Übungsblatt Abgabe: Präsenzübung, keine Abgabe

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1314/thermo1314`.

3. **Das Gesetz der großen Zahlen**
Eine Zufallsvariable X unterliege einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $w(x)$ mit dem Erwartungswert:

$$\langle x\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} x\, w(x)\, \mathrm{d}x < \infty$$

und der Varianz:

$$(\Delta x)^2 := \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x\rangle)^2 w(x)\, \mathrm{d}x < \infty.$$

Aus N gleichartigen Zufallsvariablen $X_1, X_2, ..., X_N$ bilden wir $Y = \frac{1}{N}(X_1 + X_2 + ... + X_N)$ als neue Zufallsvariable. Ausgangspunkt ist die Wahrscheinlichkeit $\Pi_{n=1}^{N} w(x_n)\mathrm{d}x_n$ dafür, dass X_1 im Intervall $(x_1, x_1 + \mathrm{d}x_1)$, X_2 im Intervall $(x_2, x_2 + \mathrm{d}x_2)$ usw. liegt.

   (a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y.

   (b) Interpretiert man X als mögliche Messwerte, so beschreibt N die Anzahl gleichartiger Messungen. Wie oft muss man messen, um (zufällige) Messfehler auf ein Zehntel des Fehlers einer Messung zu reduzieren?

   (c) In der statistischen Physik betrachtet man typischerweise 10^{23} Teilchen. Wie groß sind dann die Schwankungen?

4. **Fehlerrechnung**
Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit Erwartungswert $\langle x\rangle$ und Varianz $(\Delta x)^2$, sowie eine differenzierbare Funktion $y(x)$. Zeigen Sie, dass in erster Ordnung in Δx gilt:

$$\langle y(x)\rangle = y(\langle x\rangle) \quad \text{und} \quad \Delta y = \left|y'(\langle x\rangle)\right| \Delta x.$$

Bitte wenden! →

5. **Binomialverteilung und gezinkte Würfel**
   In Aufgabe 3 haben Sie einige Aussagen für Wahrscheinlichkeitsverteilungen abgeleitet. Eine Ihnen bekannte diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die Binomialverteilung $b(x, N, p)$:

$$b(x, N, p) = \binom{N}{x} p^x q^{N-x}, \qquad q = 1 - p.$$

   Ein einzelnes Experiment (wie z. B. ein Münzwurf), welches zwei mögliche Ausgänge hat (Ereignis tritt ein / tritt nicht ein) wird als Bernoulli-Experiment bezeichnet. Die Binomialverteilung beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass beim N-fachen Durchführen eines Bernoulli-Experiments x mal das Ereignis eintritt bzw. dass es $N - x$ mal nicht eintritt. Dabei ist p die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses.

   (a) Wie berechnet man den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung einer Zufallsvariable X, die binomialverteilt ist?

   (b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Binomialverteilung.

   (c) Zeigen Sie, dass für die Binomialverteilung das Gesetz der großen Zahlen gilt.

   (d) Vertrauen Sie einem Würfel, der von 100 Würfen 18 mal eine Sechs zeigt? Vertrauen Sie einem Würfel, der von 1000 Würfen 180 mal eine Sechs zeigt? Warum?