INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. W. Brenig
M.Sc. Boris Celan

Physikalische Rechenmethoden I WiSe 2016/17

1. Übungsblatt Abgabe: Do, 26.10.2016 bis 11.30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1617/rm1617`.

1. **Umkehrfunktionen (7 Punkte)**
   Gegeben sind die folgenden Funktionen $f : \mathbb{D} \to \mathbb{W}$

$$f_1(x) = x^2 - 2x + 1$$
$$f_2(x) = \sqrt{x+1} - 1$$
$$f_2(x) = \frac{1}{x-1}$$

   (a) Skizzieren Sie die gegebenen Funktionen (ohne Taschenrechner / Computer).

   (b) Geben Sie für jede Funktion den maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}$ und den entsprechenden Wertebereich $\mathbb{W}$ der angenommenen Funktionswerte an.

   (c) Bestimmen Sie für jede Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ und $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, ob sie injektiv, surjektiv und bijektiv ist.

   (d) Welche der Funktionen $f : \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ sind umkehrbar?
   Geben Sie die Umkehrfunktionen an.

2. **Folgen, Reihen, Konvergenz und Vollständigkeit (5 Punkte)**

   (a) Zeigen Sie, dass die durch

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2}$$

   definierte Folge das Cauchy Kriterium erfüllt und folglich konvergiert.

   (b) Betrachten Sie für $x_0 > 0$, $a \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ die Folge

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

   i. Bestimmen Sie den Fixpunkt $\tilde{x}$ für den $x_{n+1} = x_n$ ist.

   ii. Das Monotonieprinzip besagt, dass eine monotone, beschränkte Folge auf einem vollständigen Körper konvergiert. Benutzen Sie dieses Prinzip um die Konvergenz der Folge zu zeigen.
   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für beliebiges $x_0 > 0$ folgt, dass $x_n > \sqrt{a}$ ist.

Bitte wenden! →

3. **Der Körper der komplexen Zahlen (8 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 b_1 - a_2 b_2 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

einen Körper bildet.

(b) Man definiert nun die komplexe Einheit i mit der Eigenschaft $i^2 = -1$. Zeigen Sie dass man mit der Zuordnung

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \mapsto a_1 + i a_2$$

die gleichen Rechenregeln bekommt und damit auch wieder einen Körper erhält.

(c) Die komplexe Konjugation einer komplexen Zahl $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\bar{z} = x - iy.$$

Der Betrag einer Komplexen Zahl ist definiert als $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$. Zeigen Sie für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccc}
\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 & \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 & \overline{z_1^n} = \bar{z}_1^n \\
|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2| & |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| & |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.
\end{array}$$

(d) Geben Sie die Zahlen

$$\frac{i-1}{i+1} \qquad \frac{3+4i}{1-2i} \qquad \frac{(1+i)^4}{(1-i)^3} + \frac{(1-i)^4}{(1+i)^4} \qquad \frac{1+ia}{1-ia}\ , \ a \in \mathbb{R}$$

in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an und bestimmen Sie deren Betrag.