INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. Björn Willenberg
M.Sc. Boris Celan

Rechenmethoden II — SoSe 2013

1. Übungsblatt — Abgabe: Di, 16.04.2013 bis 11.30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-braunschweig.de/theophys/edu/sose13/rm213`.

3. **Taylorentwicklung in mehreren Dimensionen**
   Gegeben sei im $\mathbb{R}^2$ das Potential
   $$\phi(x,y) = e^{x^2}(y-1)^2 + (x+y)^2.$$
   (a) Bestimmen Sie das Minimum von ϕ.
   (b) Entwickeln Sie ϕ bis zur zweiten Ordnung um das Minimum.

4. **Gradienten und Potentiale**
   Sei $\vec{r} = (x,y,z)$, $r = |\vec{r}|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, sowie $f,\ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
   (a) Rechnen Sie folgende Eigenschaften des Gradienten explizit nach:
   - $\operatorname{grad}(\lambda f) = \lambda \operatorname{grad} f$
   - $\operatorname{grad}(f+g) = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g$
   - $\operatorname{grad}(f \cdot g) = g \cdot \operatorname{grad}\ f + f \cdot \operatorname{grad} g$

   (b) Berechnen Sie:
   - $\vec{F}_1 = -\operatorname{grad} \frac{1}{r}$
   - $\vec{F}_2 = -\operatorname{grad} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$
   - $\operatorname{grad} r^n, \quad n \in \mathbb{Z}$

5. **Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration**
   Für $a \leq x \leq b$ und $c \leq y \leq d$ seien $f(x,y)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ stetige Funktionen. Beweisen Sie
   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x.$$
   Hinweis: Betrachten Sie dazu das Doppelintegral
   $$\int_c^y \int_a^b \frac{\partial f(x,z)}{\partial z}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\,.$$
   Vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge und differenzieren Sie die entstandene Gleichung auf beiden Seiten.