Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. Wolfram Brenig
Niklas Casper
Erik Wagner

Thermodynamik und Quantenstatistik WS 2018/19

0. Übungsblatt

Präsenzübung, keine Abgabe

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1819/thermo1819`.

1. **Wissensfragen**

   Bitte benennen Sie alle verwendeten Symbole und Größen.

   (a) Geben Sie die Definition des Binomialkoeffizienten an.

   (b) Geben Sie die Definition der Fakultät an.

   (c) Geben Sie den binomischen Lehrsatz an.

2. **Rund um die Binomial-Verteilung**

   Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu allen Ereignissen einer Zufallsvariablen X. Eine bekannte diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die **Binomial-Verteilung**

   $$B(x, n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}. \tag{1}$$

   Das mit den Wahrscheinlichkeiten gewichtete Mittel $\langle X \rangle$ aller möglichen Werte einer Zufallsvariablen wird als ihr **Mittelwert** bezeichnet. Im Fall der diskreten Binomial-Verteilung gilt also:

   $$\langle X \rangle := \sum_{x=0}^{n} x\, B(X = x, n, p). \tag{2}$$

   (a) Berechnen Sie den Mittelwert der Binomial-Verteilung durch Gleichung (2) unter Ausnutzung des binomischen Lehrsatzes.

   (b) Die **Varianz**

   $$\mathrm{Var}X = (\Delta X)^2 = \left\langle (X - \langle X \rangle)^2 \right\rangle = \left\langle X^2 \right\rangle - \langle X \rangle^2 \tag{3}$$

   ist (wie die **Standardabweichung** ΔX) ein Maß für die Abweichung einer Observablen von ihrem Mittelwert.
   Berechnen Sie die Varianz der Binomial-Verteilung.
   Folgern Sie das **Gesetz der großen Zahlen** aus den relativen Schwankungen $\frac{\Delta X}{\langle X \rangle}$.

   (c) Vertrauen Sie einem Würfel, der von 100 Würfen 20mal eine Sechs zeigt?
   Wie ist es bei einem Würfel, der von 1000 Würfen 200 Sechser erzielt?
   Begründen Sie Ihre Antwort!

(d) Eine weitere Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die **Poisson-Verteilung**

$$P(\lambda, x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}. \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass für $n \to \infty$ und $p \to 0$ mit $\lambda = np = \text{const.}$ die Binomial-Verteilung $B(x, n, p)$ in die Poisson-Verteilung $P(\lambda, x)$ übergeht.

(e) Nach dem **Grenzwertsatz** konvergieren alle diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen für $n \to \infty$ gegen die **Normal-Verteilung**

$$N(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \tag{5}$$

mit Mittelwert μ und Varianz σ^2.
Zeigen Sie dies für die Binomial-Verteilung indem Sie zuerst die näherungsweise Identität

$$\binom{n}{x} p^x q^{n-x} \approx \sqrt{\frac{n}{2\pi x(n-x)}} \exp\left(-n\, h\left(\frac{x}{n}\right)\right) \tag{6}$$

mit $h(t) := t \ln\left(\frac{t}{p}\right) + (1-t) \ln\left(\frac{1-t}{q}\right)$ und $q = 1 - p$
durch Ausnutzung der **Stirlingschen Formel** $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,(1 + \cdots)$ herleiten und dann die Funktion $h(t)$ bis zur zweiten Ordnung um p herum entwickeln.
Für welche Werte von x ist diese Näherung gut?