INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. W. Brenig
M.Sc. Boris Celan

Quantentheorie WS 2014/15

0. Übungsblatt Abgabe: Keine - Präsenzübung

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1415/quanten`.

1. **Hamilton-Jacobi Methode am Beispiel des harmonischen Oszillators**
   Gegeben sei die Hamiltonfunktion des eindimensionalen harmonischen Oszillators
   $$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + k\frac{q^2}{2},$$
   wobei k die Federkonstante ist.

   (a) Führen Sie eine kanonische Transformation so durch, dass die Hamilton-Jacobi Gleichung erfüllt wird.

   (b) Stellen Sie jeweils eine Gleichung für die charakteristische Funktion W und die erzeugende Funktion S auf.

   (c) Schreiben Sie H als Funktion der Wirkungsvariablen J.

   (d) Bestimmen Sie über $H(J)$ die Frequenz des eindimensionalen harmonischen Oszillators.

2. **Eigenschaften der Fourier-Transformation**

   (a) Die Fourier-Transformation $\hat{f}$ einer Funktion f ist in D Dimensionen definiert als
   $$\hat{f}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} \int \mathrm{d}^D x \; f(\vec{x})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}.$$
   Ferner ist die Faltung $f * g$ zweier Funktionen f und g definiert über
   $$(f*g)(\vec{y}) = \int \mathrm{d}^D x \; f(\vec{x})\, g(\vec{y}-\vec{x}).$$
   Nehmen Sie an, dass Sie Integrale und Ableitungen vertauschen dürfen und verifizieren Sie folgende Aussagen für $D = 1$:

   i. Faltungssatz:
   $$(\widehat{f*g})(k) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(k)\hat{g}(k).$$

   ii. Differentiationssatz:
   $$(\widehat{xf})(k) = i(\hat{f})'(k).$$

   (b) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktionen
   $$f(x) = \begin{cases} 2+x & \text{für } -2 \le x \le 0, \\ 2-x & \text{für } 0 \le x \le 2, \\ 0 & \text{für } |x| > 2, \end{cases}$$
   sowie $g * g$ mit
   $$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \le 1, \\ 0 & \text{für } |x| > 1. \end{cases}$$
   Interpretieren Sie das Ergebnis.

Bitte wenden! →

3. **Eindimensionale Diffusionsgleichung**
Die eindimensionale Diffusionsgleichung lautet

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2}.$$

Die Lösung kann als Fourier-Integral angesetzt werden

$$n(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\ \hat{n}(k,t)e^{ikx}$$

(a) Welche gewöhnlichen Differentialgleichungen erfüllen die Koeffizienten $\hat{n}(k,t)$?
Geben Sie die allgemeinen Lösungen für $\hat{n}(k,t)$ an.

(b) Geben Sie die Lösung $n(x,t)$ der eindimensionalen Diffusionsgleichung zu den Anfangsbedingungen

$$n(x,0) = N\,\delta(x)$$

als Fourier-Integral an. Führen Sie die k-Integration aus und stellen Sie das Enderegebnis als Funktion von x dar.