INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

THERMODYNAMIK UND QUANTENSTATISTIK — WS 09/10

Klausurvorbereitungsblatt — Abgabe: **keine**

1. **Wissens- und Verständnisfragen** **(23 Punkte)**

   Benennen Sie alle von Ihnen zusätzlich benutzten Größen und Symbole!

   (a) Erklären Sie den Begriff der Gibbs'schen Gesamtheit. Welche Konsequenzen ergeben sich für die Berechnung des Mittelwertes einer physikalischen Größe?

   (b) Wie ist das chemische Potential μ definiert?

   (c) Wie berechnet man den Mittelwert $\langle A \rangle$ und das zweite Moment $\langle A^2 \rangle$ einer physikalischen Größe A über die Systeme der Großkanonischen Gesamtheit?

   (d) Wir betrachten ein System, das mit den Wahrscheinlichkeiten P_n, $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$ die Energien U_n annimmt. Es sei σ die Entropie mit $\sigma = -\sum_n P_n \ln P_n$. Welche Form ergibt sich für P_n unter der Forderung (i) $\sum_n P_n = 1$ bzw. (ii) $\sum_n P_n = 1$ *und* $\sum_n U_n P_n = U$? (*keine Rechnung!*)

   (e) Welche Zustandsgröße ist auf Adiabaten konstant?

   (f) Geben Sie die Gibb'sche Fundamentalgleichung und die Gibbs-Duhem-Beziehung an.

   (g) Leiten Sie ausgehend von der Definition der Großen Zustandssumme Z_G die Bose-Einstein-Verteilungsfunktion $f_{BE}(\epsilon)$ her.

   (h) Geben Sie die kanonische Zustandssumme Z des idealen Gases an, wenn die Teilchen als unterscheidbar und als ununterscheidbar angenommen werden. Erklären Sie den Begriff der Quantenkonzentration. Welcher der obigen Fälle entspricht der Realität, und wann kann ein Gas als ideal betrachtet werden?

   (i) Geben Sie die Wärmekapazität C_V für ein Fermigas an. Vergleichen Sie qualitativ mit dem idealen Gas und begründen Sie den Unterschied.

   (j) Geben Sie das Planck'sche Strahlungsgesetz an und skizzieren Sie es. Was wird dadurch beschrieben?

   (k) Was ist das Einstein-Modell und welche Annahme liegt ihm zugrunde?

   (l) Wie lautet die Gibbsche Phasenregel?

Bitte wenden →

2. **Kreisprozess: Joule-Prozess** **(10 Punkte)**

Den *Joule*-Kreisprozess kann man sich idealisiert folgendermaßen vorstellen:

- isobare Expansion von V_1 nach V_2;
- adiabatische Expansion von von V_2 nach V_3;
- isobare Kompression von V_3 nach V_4;
- adiabatische Kompression von V_4 nach V_1.

Das Arbeitsmedium sei ein ideales Gas.

(a) Skizzieren Sie den beschriebenen Kreisprozess im $p(V)$-Diagramm.

(b) Berechnen Sie für jeden der vier Schritte die übertragene Wärme, die geleistete Arbeit und die Änderung der Inneren Energie.

(c) Berechnen Sie den Wirkungsgrad η des Kreisprozesses als Funktion von p_1 und p_3.

3. **Thermodynamische Potentiale und Zustandsgleichungen** **(13 Punkte)**

Zwischen Innerer Energie und Temperatur gelte die Beziehung

$$U = a_1 T + a_2 \quad .$$

Ferner gelte

$$S = a_3 \cdot \ln T + a_4 \cdot \ln(V - a_5) + a_6 \quad \text{mit} \quad V > a_5 \quad .$$

Die Größen a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 und a_6 seien Konstanten. Die Teilchenzahl N wird als konstant angenommen.

(a) Geben Sie die thermodynamischen Potentiale U (Innere Energie) und F (Freie Energie) in ihren natürlichen Variablen an.

(b) Geben Sie die thermische Zustandsgleichung an.

(c) Bestimmen Sie die Enthalpie H in den Variablen T und p.

(d) Welche physikalische Bedeutung haben die Konstanten a_1, a_3 und a_4 ?

(e) Zeigen Sie allgemein, dass für die Enthalpie $H(S, p, N)$ folgende Beziehungen gelten:

i. $\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{V,N} = C_V + \frac{\alpha V}{\kappa_T} \quad ;$ ii. $\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_{T,N} = \frac{\alpha T - 1}{\kappa_T} \quad .$

C_V bezeichnet hier die Wärmekapazität und α und κ_T sind gegeben durch $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,N}$ und $\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,N}$.

weiter auf nächstem Blatt →

4. **Kritischer Punkt** **(8 Punkte)**

Im kritischen Punkt haben die Isothermen im $p(V)$-Diagramm gerade einen Sattelpunkt.

(a) Begründen Sie dies anschaulich anhand einer Skizze für das Van-der-Waals-Gas.

(b) Berechnen Sie für das Dieterici-Gas mit

$$p = \frac{N k_B T}{V - Nb} \exp\left(-\frac{aN}{k_B T V}\right) \quad ; \quad a, b = \text{const}$$

jeweils die Größen T_c, p_c und V_c, die den kritischen Punkt beschreiben. Leiten Sie die thermische Zustandsgleichung in den materialunabhängigen Variablen $\tilde{p} = p/p_c$, $\tilde{V} = V/V_c$ und $\tilde{T} = T/T_c$ ab.

5. **Schwankungen im idealen Fermigas** **(9 Punkte)**

Wir betrachten einen einzelnen Energiezustand der Energie ϵ in einem Fermi-Gas.

(a) Bestimmen Sie für einen solchen Zustand die Großkanonische Zustandssumme Z_G.

(b) Mit N bezeichnen wir die Anzahl der Fermionen in dem Energiezustand. Zeigen Sie zunächst allgemein, dass die Mittelwerte $\langle N \rangle$ und $\langle N^2 \rangle$ durch

$$\langle N \rangle = \frac{\tau}{Z_G} \frac{\partial Z_G}{\partial \mu} \qquad \text{bzw.} \qquad \langle N^2 \rangle = \frac{\tau^2}{Z_G} \frac{\partial^2 Z_G}{\partial \mu^2}$$

mit $\tau = k_B T$ gegeben sind.

(c) Nutzen Sie ihre Ergebnisse aus Teil (a) und (b) um zu zeigen, dass die Varianz $(\Delta N)^2 = \langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle$ für das Fermigas durch

$$(\Delta N)^2 = \langle N \rangle \, (1 - \langle N \rangle)$$

gegeben ist.

(d) Betrachten Sie nun ein schwach angeregtes Fermi-Gas. Begründen Sie mit Hilfe von Teil (c), dass für Zustände, deren Energien weit unterhalb der Fermi-Energie liegen, $(\Delta N)^2 = 0$ gilt .

6. **Harmonischer Oszillator: Zwei-Niveau-System** **(9 Punkte)**

Die Eigenenergiewerte eines Systems seien $U_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ mit $n = 0, 1$.

(a) Berechnen Sie die Zustandssumme in der kanonischen Gesamtheit.

(b) Berechnen Sie daraus die Innere Energie U und spezifische Wärme C_V des Systems.

(c) Wie verhalten sich U und C_V für $T \to \infty$ und für $T \to 0$? Interpretieren Sie ihr Ergebnis.

(d) Geben Sie ohne Rechnung den Wert der Entropie für diese beiden Grenzfälle an. Begründen Sie ihr Ergebnis kurz in Worten.