INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

THERMODYNAMIK UND QUANTENSTATISTIK — WS 09/10

12. Übungsblatt — Abgabe: Do., 21.01.2010 bis 13.15 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

Stichworte: Bose-Einstein-Kondensation, Photonengas, Harmonischer Oszillator

33. **2D Bosegas** **(8 Punkte)**

Es soll die Kondensation eines zweidimensionalen Bosegases in den Grundzustand bei tiefen Temperaturen untersucht werden.

(a) Berechnen Sie die Teilchenzahl N als Funktion von τ, μ und V.

(b) Bestimmen Sie die kritische Temperatur τ_c. Tritt für das zweidimensionale Bosegas eine Bose-Einstein-Kondensation auf?

(c) Wiederholen Sie die Rechnungen aus (a) und (b) für masselose Bosonen mit

$$\epsilon = cp \quad .$$

34. **Barometrische Höhenformel: Photonengas** **(5 Punkte)**

Ein Photonengas sei dem Gravitationsfeld der Erde ausgesetzt.

(a) Es soll eine barometrische Höhenformel für Photonen in einem Gravitationsfeld abgeleitet werden. Betrachten Sie ein Höhenelement dz und setzen Sie die auftretenden Kräfte gleich (von der z-Abhängigkeit von g sehe man zunächst einmal ab). Daraus erhält man eine Gleichung für den Druck. Bestimmen Sie daraus die höhenabhängige Energiedichteverteilung.

35. **Casimir-Effekt** **(7 Punkte)**

In der Vorlesung wurde die Nullpunktsenergie des Photonengases vernachlässigt. In dieser Aufgabe soll nun gezeigt werden, dass diese Nullpunktsenergie sehr wohl observabel ist. Betrachten Sie dazu einen leeren (würfelförmigen) Kasten mit Kantenlänge L.

(a) Berechnen Sie die Nullpunktsenergie U_L des Kastens, indem Sie über alle mögliche Wellenvektoren $\underline{k}$ und Polarisationen σ der Photonen summieren. Mit $L \to \infty$ betrachten wir ein thermodynamisch großes System, so dass Sie von der Summation zur Integration übergehen können.

Nun wir der Kasten geteilt, indem an der Position $z = R$ eine leitende Platte eingebracht wird.

(b) Berechnen Sie nun analog die Nullpunktsenergie U_{L-R} des Teils mit der Länge $L - R$.

(c) Berechnen Sie außerdem die Nullpunktsenergie U_R des Teils mit der Kantenlänge R. Hierbei soll R allerdings so klein gewählt werden, dass die Summation nicht mehr ohne weiteres durch eine Integration ersetzt werden kann.

(d) Zeigen Sie, dass sich die Differenz $\Delta U = U_L - U_{L-R} - U_R$ schreiben lässt als

$$\Delta U = -\frac{2\pi^2 \hbar c L^2}{R^3} \int_0^\infty dx \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{x+n^2} - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sqrt{x+\omega^2} \right]$$

Diese Differenz zweier divergierender Ausdrücke lässt sich auswerten (nicht gefordert) und man erhält bemerkenswerterweise ein nicht divergierendes Ergebnis:

$$\Delta U = \frac{\pi^2 \hbar c L^2}{720 R^3} \quad .$$

(e) Berechnen Sie die Kraft auf die leitende Platte.