INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

Thermodynamik und Quantenstatistik WS 09/10

11. Übungsblatt Abgabe: Do., 14.01.2010 bis 13.15 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

Stichworte: Fermi-Verteilung, Sommerfeld-Entwicklung, Zustandsdichte

30. **Stark angeregtes Fermigas** **(8 Punkte)**

In dieser Aufgabe soll ein stark angeregtes Fermigas betrachtet werden. Für dieses gilt $z := e^{\mu/\tau} < 1$ bzw. $\mu < 0$.

(a) Als mathematische Vorbetrachtung soll zunächst

$$f_n(z) := \frac{1}{\Gamma(n)} \int\limits_0^\infty \frac{x^{n-1}dx}{z^{-1}e^x + 1} = \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k^n}$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial z} f_n(z) = \frac{1}{z} f_{n-1}(z)$$

gezeigt werden.
Tipp: Verwenden Sie die geometrische Reihe.

(b) Gehen Sie nun von der bekannten großkanonischen Zustandssumme für ein ideales Fermigas aus und zeigen Sie

$$J(\tau, \mu, V) = -\frac{\tau V}{\lambda^3} f_{5/2}(z)$$

wobei λ die thermische de Broglie-Wellenlänge darstellt.
Anleitung: Ersetzen Sie die Summe durch ein Integral und integrieren Sie partiell.

(c) Wie erhält man aus J eine Näherung für die innere Energie $U(\tau, N, V)$? Skizzieren Sie das Vorgehen und erläutern Sie insbesondere, wie sich die Abhängigkeit von μ eliminieren lässt.

Bitte wenden →

31. **Fermigas in einer Dimension** **(9 Punkte)**

Wir betrachten ein Fermigas (N Fermionen) in einer Dimension (z.B. Elektronen im Draht).

(a) Zeigen Sie, dass die Zustandsdichte $D(\epsilon)$ gegeben ist durch

$$D(\epsilon) = \alpha \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \quad .$$

(b) Bestimmen Sie α aus der Normierung.

(c) Berechnen Sie das chemische Potential μ für tiefe Temperaturen mit Hilfe der Näherungen für die Integrale aus Abschnitt 12.3 der Vorlesung (Sommerfeld-Entwicklung).

(d) Bestimmen Sie analog das Tieftemperaturverhalten ($T \to 0$) der spezifischen Wärme.

32. **Relativistisches Fermigas** **(3 Punkte)**

In einigen weißen Zwergen haben die meisten Elektronen relativistische kinetische Energien $\epsilon = pc$, wobei p der Impuls des Elektrons sei, die Impulsquantelung im Volumen V ist die gleiche wie im nichtrelativistischen Grenzfall.

(a) Zeigen Sie, dass die Fermienergie im relativistischen Grenzfall durch

$$\epsilon_F = \hbar \pi c \left(\frac{3n}{\pi} \right)^{1/3}$$

gegeben ist ($n = N/V$).

(b) Gehen Sie von den Ergebnissen aus der Vorlesung aus und zeigen Sie, dass im relativistischen Fall für den Druck gilt

$$p \propto n^{4/3} \quad .$$

Vergleichen Sie mit dem nichtrelativistischen Fall und erläutern Sie die Konsequenzen für die Entwicklung von Sternen.