



27. Ultrarelativistisches Gas

(7 Punkte)

Wir wollen die thermodynamischen Eigenschaften eines klassischen ultrarelativistischen Gases berechnen. Ein solches Gas besteht aus masselosen Teilchen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen (z.B. Photonen etc.). Das ultrarelativistische Gas wird auch oft als leicht zu berechnendes Modell für Teilchen mit Masse $m \neq 0$ benutzt, wenn die Näherung $|\vec{p}| \gg mc$ erfüllt ist. Wir betrachten nun ein solches Gas aus N Teilchen in einem Gebiet vom Volumen V . Für die Hamilton-Funktion gilt

$$\mathcal{H}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N, \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N) = \sum_{i=1}^N |\vec{p}_i| c \quad .$$

- (a) Berechnen Sie das kanonische Zustandsintegral für ein Gas aus N *nicht* unterscheidbaren, wechselwirkungsfreien ultrarelativistischen Teilchen.
- (b) Bestimmen Sie die freie Energie als thermodynamisches Potential.
- (c) Berechnen Sie Druck, Entropie, chemisches Potential, innere Energie und Wärmekapazität C_V .
- (d) Leiten Sie die Beziehung $U = 3pV$ her, und vergleichen Sie dies mit dem bekannten Ergebnis für das nichtrelativistische ideale Gas.
- (e) Geben Sie die Enthalpie H an und bestimmen Sie die Wärmekapazität C_p .

28. Zweiatomiges ideales Gas

(8 Punkte)

Betrachten Sie ein ideales Gas von N Molekülen, bestehend aus zwei verschiedenen Atomsorten. Für eines dieser Moleküle ist die Energie gegeben durch

$$U(p, j, n) = \frac{p^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{\hbar^2 j(j+1)}{2I} + \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

Der erste Summand entspricht dabei der kinetischen Energie der Translationsbewegung, der zweite Summand der kinetischen Energie der Rotation mit dem Trägheitsmoment I und der dritte schließlich der Schwingungsenergie des Moleküls.

- (a) Zeigen Sie, dass sich die Zustandssumme durch $\ln Z = \ln Z_{trans} + N(\ln Z_{rot} + \ln Z_{vib})$ schreiben lässt, wobei Z_{trans} die Zustandssumme des einatomigen, idealen Gases mit einer Teilchenmasse von $m_1 + m_2$ ist. Z_{rot} sowie Z_{vib} entsprechen den einmolekularen Anteilen von Rotation und Vibration zur Zustandssumme.

- (b) Zeigen Sie, dass für Z_{rot} bei niedrigen Temperaturen gilt:

$$Z_{rot} = 1 + 3e^{-\Theta_r/T} + 5e^{-3\Theta_r/T} + \dots$$

Tipp: Entartung beachten!

- (c) Zeigen Sie, dass für Z_{vib} gilt:

$$Z_{vib} = \frac{e^{-\beta\hbar\omega/2}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \quad .$$

- (d) Berechnen Sie den Rotations- und Vibrationsanteil der spezifischen Wärme C_V des Systems. Plotten Sie C_V als Funktion der Temperatur (alle Konstanten dürfen eingesetzt werden). (Werten Sie eventuell auftretende Summen numerisch aus und beachten Sie dabei die unterschiedliche Konvergenz in Abhängigkeit von der Temperatur.)

29. Der Weihnachtsmann und tiefe Temperaturen

(5 Punkte)

Jemand hat sich vom Weihnachtsmann suprafluides ^3He gewünscht. Dem Weihnachtsmann ist klar, dass er dafür extrem tiefe Temperaturen ($\sim \text{mK}$) benötigt, jedoch nicht, wie man diese erreicht. Eine Möglichkeit der Erzeugung solcher Temperaturen ist die magnetische Kühlung, die in dieser Aufgabe diskutiert werden soll. Wir betrachten dazu wiederum eine Spinkette im äußeren Magnetfeld H . Die dazugehörige Entropie lautet

$$S = Nk \left\{ \ln \left[2 \cosh \frac{H}{kT} \right] - \frac{H}{kT} \tanh \left(\frac{H}{kT} \right) \right\} \quad .$$

- (a) Wenn man bei eingeschaltetem Magnetfeld H_a wartet, bis sich das thermodynamische Gleichgewicht mit der Temperatur T_a eingestellt hat und dann das äußere Magnetfeld auf den Wert H_e rasch absenkt und dafür sorgt, dass die Entropie des Systems konstant bleibt (adiabatischer Vorgang), so stellt sich ein neues Gleichgewicht bei niedrigerer Temperatur $T_e < T_a$ ein, die Spinkette wird also abgekühlt. Zeigen Sie, dass dann in 1. Näherung die Beziehung

$$\frac{T_e}{T_a} = \frac{H_e}{H_a}$$

gilt.

- (b) Wenn man nun das Magnetfeld wieder auf H_a langsam erhöht, und dabei die Temperatur konstant hält, so kann man sukzessive zu tieferen Temperaturen gelangen. Skizzieren Sie diesen Vorgang in einem S - T -Diagramm. Warum kann man nie $T = 0$ erreichen? Begründen Sie außerdem den Wert von S in Abwesenheit eines äußeren Feldes.

**Frohe Weihnachten
und einen guten Start ins Jahr 2010!**



Boris Celan ◉ Patrick Meier ◉ Hendrik Kriegel ◉ Uwe Motschmann