INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

THERMODYNAMIK UND QUANTENSTATISTIK | WS 09/10

9. Übungsblatt | Abgabe: Do., 17.12.2009 bis 13.15 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

Stichworte: Kreisprozess, Adiabatengleichung, Zustandssumme, spezifische Wärmekapazität

24. **Carnot-Prozess mit klassischer Strahlung** **(6 Punkte)**

Betrachten Sie einen Carnotschen Kreisprozess (Wärmekraftmaschine) mit klassischer Strahlung als Arbeitsmedium. Für das Photonengas gilt

$$p = \alpha\, u(T) \quad ; \quad \alpha = \text{const} \quad .$$

$u(T) = U/V$ ist dabei die innere Energie pro Volumeneinheit.

(a) Zeigen Sie, dass für die innere Energie dann gilt

$$U(T,V) \propto V\, T^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} \quad .$$

(b) Später in der Vorlesung wird $\alpha = \frac{1}{3}$ hergeleitet. Zeigen Sie, dass die Adiabaten dann durch $p \propto V^{-\frac{4}{3}}$ beschrieben werden.

(c) Skizzieren Sie den Carnot-Prozess im $p(V)$-Diagramm.

(d) Bestimmen Sie den Wirkungsgrad des Kreisprozesses in Abhängigkeit von den Temperaturen der Wärmebäder.

(e) Begründen Sie, dass $\Delta S = 0$ gelten muss, und rechnen Sie dies explizit nach.

25. **Gitterschwingungen im Festkörper: Einstein-Modell** **(8 Punkte)**

Wir betrachten einen Festkörper aus N Atomen näherungsweise als ein System von $3N$ ungekoppelten, linearen, harmonischen Oszillatoren. Im *Einstein-Modell* wird angenommen, dass alle $3N$ Eigenfrequenzen identisch sind und einen festen Wert ω_E haben. Die Größe $\Theta_E = \hbar\omega_E/k_B$ wird als *Einstein-Temperatur* bezeichnet.

(a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme, die freie Energie F, das chemische Potential μ, den Druck p und die Entropie S.

(b) Geben Sie Näherungsausdrücke an, die das Verhalten von $\ln\mathcal{Z}$, F und S in den Grenzfällen $T \gg \Theta_E$ bzw. $T \ll \Theta_E$ beschreiben.

(c) Bestimmen Sie die innere Energie U. Geben Sie Näherungsausdrücke an, die das Verhalten von U in den Grenzfällen $T \gg \Theta_E$ bzw. $T \ll \Theta_E$ beschreiben. Diskutieren Sie die Ergebnisse. Skizzieren Sie die Funktion $U(T)$.

Bitte wenden ⟶

(d) Bestimmen Sie die Wärmekapazität C_V und stellen Sie das Ergebnis mit Hilfe der *Einstein-Funktion*

$$E(x) = \frac{x^2 \exp(x)}{(\exp(x) - 1)^2}$$

dar. Untersuchen Sie das Verhalten von C_V für $T \ll \Theta_E$. Zeigen Sie, dass C_V für $T \gg \Theta_E$ dem klassischen Wert $C_V = 3Nk_B$ entspricht (Gesetz von Dulong-Petit). Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion $C_V(T)$.

26. **Gibbs´sches Paradoxon** **(6 Punkte)**

Es sollen die Grenzen der klassischen Annahme von unterscheidbaren Teilchen untersucht werden.

(a) Zeigen Sie, dass für ein ideales Gas aus unterscheidbaren Teilchen die Entropie durch

$$S(N, T, m) = Nk_B \ln V + \frac{3}{2} N_B k \left[1 + \ln\left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)\right]$$

gegeben ist. Gehen Sie dabei von der bekannten Zustandssumme des idealen Gases aus.

(b) Man betrachte jetzt zwei verschiedene Gase mit den Volumina V_1 und V_2, den Teilchenmassen m_1 und m_2, bestehend aus N_1 bzw. N_2 Teilchen in zwei durch eine Trennwand voneinander getrennten Behältern. Die Dichten N_i/V_i beider Gase seien gleich. Zeigen Sie, dass die Gesamtentropie des Systems nach dem Entfernen der Trennwand gegenüber der Summe der Einzelentropien um

$$\Delta S = k_B \left[N_1 \ln \frac{N_1 + N_2}{N_1} + N_2 \ln \frac{N_1 + N_2}{N_2}\right]$$

erhöht wird (dies ist die sogenannte Mischungsentropie). Zeigen Sie, dass es sich beim Mischen um einen irreversiblen Prozess handelt.

(c) Betrachtet man zwei identische Gase, so führt das Mischen ebenfalls zu einer Entropiezunahme ΔS. Das darf aber nicht sein, da ja das Mischen gleichartiger Gase mit gleichen Dichten ein reversibler Prozess ist (das Widereinsetzen der Trennwand stellt ja exakt den Ausgangszustand wieder her, ganz im Gegensatz zu dem Fall, wo eine wirkliche Mischung stattfindet). Dies ist das *Gibb'sche Paradoxon.* Zeigen Sie, dass man dieses Paradoxon beheben kann, indem man für die Zustandssumme für N Teilchen den sogenannten Boltzmann-Korrekturfaktor einführt:

$$\mathcal{Z}_N = \frac{1}{N!} \mathcal{Z}_1^N \quad .$$