



15. Gleichverteilungssatz

(8 Punkte)

Wir betrachten ein System aus N Teilchen im klassischen Bereich, d. h. die Koordinaten und Impulse der Teilchen seien durch $\underline{q}, \underline{p} \in \mathbb{R}^{3N}$ und die Energie durch die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}(\underline{q}, \underline{p})$ gegeben.

- (a) Beweisen Sie den klassischen Gleichverteilungssatz

$$\langle x_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_k} \rangle = \delta_{jk} \tau \quad . \quad (1)$$

Hierbei bezeichnet x_j eine beliebige Koordinate der Hamiltonfunktion.

Anleitung: Gehen Sie von der Definition des Mittelwertes im kanonischen Ensemble aus und integrieren Sie diesen Ausdruck partiell.

- (b) Verwenden sie Ihr Ergebnis aus (a) um zu zeigen, dass jeder Freiheitsgrad (Koordinate), der quadratisch in $\mathcal{H}$ auftritt, $1/2\tau$ zur inneren Energie beiträgt, d. h.

$$U = \frac{f}{2} \tau \quad ; \quad (2)$$

wobei f die Anzahl der Freiheitsgrade bezeichnet. Alternativ lässt sich dies auch direkt aus der kanonischen Zustandssumme herleiten.

- (c) Bestimmen Sie nun die Energie für ein Gas aus N freien Teilchen, nochmals für ein System aus N harmonischen Oszillatoren sowie für ein relativistisches Teilchen mit $\mathcal{H} = cp$ (c sei hier die Lichtgeschwindigkeit).

16. Totale Differentiale und Zustandsgrößen

(4 Punkte)

Wir betrachten das Differential der Wärme δQ .

- (a) Zeigen Sie, dass für $U = U(\tau, V)$

$$\delta Q = dU + pdV$$

im allgemeinen kein totales Differential darstellt.

- (b) Zeigen Sie, dass $1/\tau$ ein integrierender Faktor ist. Damit folgt also (was natürlich schon vorher bekannt war), dass

$$d\sigma = \frac{1}{\tau} dU + \frac{p}{\tau} dV$$

ein totales Differential und $\sigma(U, V)$ somit eine Zustandsgröße ist.

17. Entropie und Information

(8 Punkte)

Wir betrachten eine Reihe von Ereignissen E_n ($n = 1, 2, \dots, N$), die mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten p_n mit

$$\sum_n p_n = 1 \quad (3)$$

eintreten können. Wir ordnen nun der Feststellung eines Ereignisses E_n einen Informationswert I_n zu, bei häufiger Wiederholung von solchen Feststellungen an der gleichen Reihe von Ereignissen erhält man dann einen mittleren Informationsgehalt, festgelegt als

$$I = - \sum_n p_n \log_2 p_n. \quad (4)$$

Diese Definition ist so gewählt, daß sie die mittlere Anzahl von einfachen Alternativfragen (Ja oder Nein, 0 oder 1) angibt, die zur vollständigen Charakterisierung eines Ereignisses der Reihe nach gestellt und beantwortet werden müssen.

Beispiele:

- (1) $N = 1$. Ein Ereignis tritt mit Sicherheit ein, $p_n = 1$. In diesem Fall ist $I = 0$. Man gewinnt keine Information, da der Eintritt des Ereignisses von vornherein feststeht.
- (2) $N = 2$. $p_1 = p_2 = 1/2$. Beide Ereignisse treten mit der gleichen Wahrscheinlichkeit ein. Durch Einsetzen erhält man¹ $I = 1\text{bit}$.

Aufgaben:

- (a) Der rote Dino aus der E-Dynamik hält mit sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit von $p_n = 1/128$ auf den 128 Fliesen am Boden eines rechteckigen Raumes, der doppelt so lang wie breit ist, auf. Wie groß ist die mittlere Information der Feststellung des Aufenthaltsorts²?
- (b) Erinnert die Definition der Information nicht an die Entropie? Schreiben Sie in einem Satz, warum größere Entropie mit mehr Information zu identifizieren ist.
- (c) Ein Fabrikant möchte 3000 Tafeln Schokolade (Vollmilch, Zartbitter und weiße Schokolade) produzieren. Wieviele Tafeln von jeder Sorte muß er herstellen, wenn er möglichst viele verkaufen will, über die Beliebtheit der verschiedenen Sorten allerdings keine Erhebungen angestellt hat. Versuchen Sie zuerst durch Argumentieren auf ein Ergebnis zu kommen und berechnen Sie dann die Information dieser Verteilung.
- (d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_n , unter denen die Information (Gleichung 4) maximal wird. Berücksichtigen Sie dabei etwaige Nebenbedingungen.
- (e) Stellen Sie eine Analogie zur Thermodynamik (Entropie, Ensembles,...) her.

¹bit ist die Einheit der Information und entspricht einer 0 oder 1 Entscheidung.

²Man sieht, daß in der Definition von I keine Bewertung der Information (etwa nützlich - unnützlich) enthalten ist.