INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

THERMODYNAMIK UND QUANTENSTATISTIK WS 09/10

5. Übungsblatt Abgabe: Do., 19.11.2009 bis 13.15 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

Stichworte: Zustandssumme, Zustandsintegral

12. **Die kanonische Verteilung** **(3 Punkte)**

Die Zustandssumme der kanonischen Verteilung ist gegeben durch

$$\mathcal{Z} = \sum_n \exp\left(-\beta U_n\right) \quad .$$

Zeigen Sie, dass für das mittlere Schwankungsquadrat $(\Delta U)^2 = < U^2 > - < U >^2$ die Beziehung

$$(\Delta U)^2 = -\frac{\partial < U >}{\partial \beta}$$

gilt.

13. **Harmonischer Oszillator II** **(12 Punkte)**

Wir betrachten ein System, das aus N quantenmechanischen harmonischen Oszillatoren mit gleicher Frequenz ω besteht.

(a) Bestimmen Sie die Zustandssumme $\mathcal{Z}_1$ für *einen* Oszillator dieses Systems.

(b) Zeigen Sie, dass die kanonische Zustandssumme für N *unterscheidbare* nicht wechselwirkende Teilchen $\mathcal{Z}_N$ und die Einteilchenzustandssumme $\mathcal{Z}_1$ über

$$\mathcal{Z}_N = \mathcal{Z}_1^N$$

zusammenhängen.

(c) Zeigen Sie, dass die innere Energie U durch

$$U = N\hbar\omega \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1}\right]$$

gegeben ist. Untersuchen Sie das Verhalten von U in den Grenzfällen $\beta \to 0$ und $\beta \to \infty$.

(d) Betrachten Sie nun ein System aus N unterscheidbaren *klassischen* harmonischen Oszillatoren gleicher Frequenz ω. Für die Hamilton-Funktion gilt:

$$H(p_1, \ldots, p_N, q_1, \ldots, q_N) = \sum_{\nu=1}^{N} \left(\frac{p_\nu^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q_\nu^2\right) \quad .$$

i. Berechnen Sie das klassische Zustandsintegral

$$\mathcal{Z}_{\text{klass}} = \int \exp\left(-\beta H\right)\, \mathrm{d}^N p\, \mathrm{d}^N q$$

sowie die Innere Energie U des Systems.

ii. Zeigen Sie explizit: Wenn die quantenmechanischen Größen im Grenzfall hoher Temperaturen mit den entsprechenden klassischen Größen übereinstimmen sollen, muss das klassische Phasenraumvolumen als $d\gamma = h^{-N}\, \mathrm{d}p\, \mathrm{d}q$ normiert werden.

8. **Die n-dimensionale Kugel** **(5 Punkte)**

Durch die Menge

$$\mathcal{K}_n = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \middle| \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq R^2 \right\}$$

wird eine n-dimensionale Kugel vom Radius R beschrieben.

Oberfläche $S_n(R)$ und Volumen $V_n(R)$ einer solchen Kugel sind durch

$$S_n(R) = nC_nR^{n-1} \quad \text{bzw.} \quad V_n(R) = C_nR^n$$

gegeben. C_n sei hierbei eine zunächst unbekannte Funktion von n.

(a) Rechnen Sie dies zunächst für ebene und sphärische Polarkoordinaten ($n = 2$ und $n = 3$) nach.

(b) Wendet man nun analog zu $n = 2$ und $n = 3$ eine Koordinatentransformation für n-dimensionale Polarkoordinaten gemäß

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(R)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \int_0^\infty S_n(R) f(R)\, \mathrm{d}R$$

an, so lässt sich hieraus C_n bestimmen. Setzen Sie dazu $f(x_1, ..., x_n) = \exp(-\sum_{i=1}^n x_i^2) = \exp(-R^2) = f(R)$ und führen Sie die Interpretation einmal in kartesischen Koordinaten und einmal in Polarkoordinaten aus. Als Ergebnis sollten Sie

$$C_n = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

erhalten. Überprüfen Sie dieses Resultat wiederum für $n = 2, 3$.

Hinweis: Die *Gamma-Funktion* $\Gamma(z)$ ist durch

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty t^{z-1} \exp(-t)\, \mathrm{d}t$$

definiert. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt die Beziehung $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$. Für ganzzahliges $n \geq 0$ ist $\Gamma(n + 1) = n! = n\Gamma(n)$.