INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

THERMODYNAMIK UND QUANTENSTATISTIK — WS 09/10

1. Übungsblatt — Abgabe: Do, 29.10.09 bis 13.15 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

Link: `http://www.tu-braunschweig.de/theophys/edu/wise-0910/index.html`

1. **Zur Motivation der statistischen Beschreibung** **(5 Punkte)**

   Betrachtet wird die Bewegung eines klassischen Teilchens in einem verdünnten Gas. Die Bahn möge als Gerade zwischen zwei Stößen idealisiert werden, so daß man nur die Orte und Zeiten der Stöße speichern muß. Zur Bestimmung der mittleren Stoßzeit benutze man die Zahlenwerte: Dichte $n = 10^{19} cm^{-3}$, Wirkungsquerschnitt $\sigma = 10^{-16} cm^2$, mittlere Geschwindigkeit $v = 10^5 cms^{-1}$. Zur Speicherung einer reellen Zahl in "double precision" benötigt man auf einem Computer 8 Byte.

   (a) Man berechne den pro Sekunde benötigten Speicherplatz um die Bahn des Teilchens zu tabellieren.

   (b) Über welche Zeitspanne kann die Bahn des Teilchens auf einer 100GB großen Festplatte gespeichert werden?

   (c) Nun betrachte man alle Teilchen in einem 1 Liter großen Gefäß. Wie viele 100GB große Festplatten benötigt man jede Sekunde, um die Bahn aller Teilchen zu protokollieren? Angenommen, die Festplatten seien 1cm dick und man würde alle übereiander stapeln, wie hoch würde der Stapel werden? (Die Entfernung zum nächsten Sternensystem, Alpha Centauri, ist übrigens ca. $4.16 \cdot 10^{16}$m :-))

2. **Eine nützliche Abschätzung** **(5 Punkte)**

   Außerordentlich hilfreich in der Statistischen Physik ist die Abschätzung

   $$\ln(n!) \approx n \ln n - n \quad ; \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \gg 1 \qquad . \tag{1}$$

   (a) Finden Sie für diese Näherung eine einfache Begründung.

   (b) Zeigen Sie, dass sich Gleichung (1) auch aus der Stirlingschen Formel ergibt, die Sie aus der Vorlesung kennen.

   (c) Ab welchem n ist die relative Abweichung in Gleichung (1) kleiner als 1%?

Bitte wenden →

3. **Extrema unter Nebenbedingungen: Lagrange-Multiplikatoren (10 Punkte)**
Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren dient der Bestimmung von Extrema unter gegebenen Nebenbedingungen und wird gelegentlich in der Thermodynamik benötigt. Anhand zweier einfacher Beispiele soll dieses Verfahren wiederholt werden:

   (a) Ein Rechteck, das unter allen Rechtecken gleichen Umfangs maximale Fläche besitzt, hat auch bei gegebener Fläche minimalen Umfang. Zeigen Sie dies, und zwar

      i. direkt, d.h. indem Sie einmal die Fläche F als Funktion des Umfangs U und einer Seitenlänge a ausdrücken bzw. entsprechend U als Funktion von F und a, und dann das Extremum der Funktion *einer* Variablen auswerten,

      ii. durch Verwendung Lagrangescher Multiplikatoren.

   (b) Maximieren Sie das Volumen eines Quaders, der gerade in das Innere des durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

   definierten Ellipsoids passt. Zeigen Sie, dass das Verhältnis des maximalen Volumens zum Volumen des Ellipsoids $2/(\sqrt{3}\pi)$ ist.

Hinweise: Die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren funktioniert folgendermaßen: Die Funktion $f(x_1, ..., x_n)$ soll unter den Nebenbedingungen $g_i(x_1, ..., x_n) = 0$ mit $(i = 1, ..., s)$ extremal werden. Die Lagrange-Funktion des Systems lautet $\mathcal{L} = f(x_1, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i(x_1, ..., x_n)$. Die Ableitungen $\partial_{x_j} \mathcal{L} = 0$ $(j = 1, ..., n)$ führen dann zusammen mit den Nebenbedingungen auf $(n + s)$ Gleichungen für die $(n + s)$ Unbekannten.

Klausurtermin: wird noch bekannt gegeben

Teilnahmevoraussetzungen: 50 % der Hausaufgabenpunkte. Die Punkte auf eine Aufgabe erhält man nur, wenn zu Beginn der kleinen Übungen auch die Bereitschaft gezeigt wird, die jeweilige Aufgabe vorzurechnen.

Fragen an:

Hendrik Kriegel	h.kriegel@tu-bs.de	Raum A 317
Patrick Meier	patrick@meier-helmstedt.de	Raum A 225
Boris Celan	bcelan@hotmail.com	Raum A 225