INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

THERMODYNAMIK UND STATISTISCHE MECHANIK — WS 2004/2005

4. Übungsblatt — Abgabe: Donnerstag, 11.11.04 (bis 11.25 Uhr)

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A225, Tel. 391-5183, sven.simon@tu-bs.de

13. **Spin-System** **(Große Übung; keine Abgabe!)**

In der Vorlesung haben Sie am Beispiel einer eindimensionalen Spinkette den Begriff der *Entartungsfunktion* kennengelernt. Zu bestimmen sind nun Lage und Breite δ des Maximums des Produkts der Entartungsfunktionen $g_1(N_1, m_1)$ und $g_2(N_2, m_2)$ für *zwei* solche Spin-Systeme.

(a) Bestimmen Sie eine Bedingung für m_1 und m_2, unter der das Produkt $g_1(N_1, m_1) \cdot g_2(N_2, m_2)$ mit der Nebenbedingung $m_1 + m_2 = m$ extremal wird (wahrscheinlichster Zustand, thermisches Gleichgewicht).

(b) Setzen Sie nun in $g_1 \cdot g_2$ für $m_1 = \hat{m}_1 + \delta$ und $m_2 = \hat{m}_2 - \delta$, wobei $\hat{m}_{1,2}$ die Gleichgewichtsgrößen seien, die die Bedingung aus (a) erfüllen. Daraus kann man nun die relative Breite der Verteilung bestimmen. Tun Sie dies und diskutieren Sie das Ergebnis hinsichtlich des Verhaltens für sehr große Systeme.

14. **Harmonischer Oszillator I** **(3 Punkte)**

Ein quantenmechanischer Oszillator hat Quantenzustände der Energie

$$U_s = \left(s + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad ; \quad s = 0, 1, 2, \ldots \quad .$$

Berechnen Sie die Entartungsfunktion $g(N, n)$ für N unterscheidbare, nicht wechselwirkende Oszillatoren gleicher Frequenz ω mit der Gesamtenergie

$$U = \frac{1}{2}N\hbar\omega + n\hbar\omega \quad , \tag{1}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ fest vorgegeben ist.
Hinweis: Da der erste Summand $\frac{1}{2}N\hbar\omega$ die Nullpunktsenergie der N Oszillatoren darstellt, besagt Gl. (1), daß dem System insgesamt n Energiequanten $\hbar\omega$ zugeführt wurden.

15. **Harmonischer Oszillator II** **(12 Punkte)**

Bestimmen Sie Lage und Breite δ des Maximums des Produkts der Entartungsfunktionen $g_1(N_1, n_1)$ und $g_2(N_2, n_2)$ für zwei Systeme aus N_1 bzw. N_2 unterscheidbaren harmonischen Oszillatoren, wobei n_1 und n_2 analog zu Aufgabe 14 das Maß für die gesamte Anregungsenergie des Systems seien (in Einheiten von $\hbar\omega$). Diese Rechnung ist etwas länger. Man führe sie in folgenden Einzelschritten durch:

(a) Zeigen Sie: Die Entartungsfunktion für N unterscheidbare Oszillatoren, deren Gesamtenergie durch Gl. (1) gegeben ist, kann für $1 \ll n, N$ genähert werden als

$$g(N, n) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(N+n)^{N+n}}{N^N \cdot n^n} \quad .$$

(b) Bestimmen Sie eine Bedingung für n_1 und n_2, unter der das Produkt $g_1(N_1, n_1) \cdot g_2(N_2, n_2)$ mit der Nebenbedingung $n_1 + n_2 = n$ extremal wird (wahrscheinlichster Zustand, thermisches Gleichgewicht).

(c) Setzen Sie nun in $\ln(g_1 \cdot g_2)$ für $n_1 = \hat{n}_1 + \delta$ und $n_2 = \hat{n}_2 - \delta$, wobei $\hat{n}_{1,2}$ die Gleichgewichtsgrößen seien, die die Bedingung aus (b) erfüllen. Entwickeln Sie die Logarithmen bis zur 2. Ordnung in δ und vernachlässigen Sie alle Terme dritter und höherer Ordnung von δ.

(d) Mit dem Ergebnis aus (c) erhält man eine Näherung von $g_1 g_2$ in Form einer Gaußverteilung als Funktion von δ. Daraus kann man nun die relative Breite der Verteilung δ/n bestimmen. Tun Sie dies und diskutieren Sie das Ergebnis hinsichtlich des Verhaltens für sehr große n.

Rückseite beachten! ⟶

16. **Die n-dimensionale Kugel** **(7 Punkte)**

Durch die Menge

$$\mathcal{K}_n = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \middle| \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq R^2 \right\}$$

wird eine n-dimensionale Kugel vom Radius R beschrieben.

(a) Zeigen Sie, daß Oberfläche $S_n(R)$ und Volumen $V_n(R)$ einer solchen Kugel durch

$$S_n(R) = nC_nR^{n-1} \quad \text{bzw.} \quad V_n(R) = C_nR^n \quad \text{mit} \quad C_n = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

gegeben sind. Die *Gamma-Funktion* $\Gamma(z)$ ist durch

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty t^{z-1} \exp(-t)\, \mathrm{d}t$$

definiert. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt die Beziehung $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Für ganzzahliges $n \geq 0$ ist $\Gamma(n+1) = n! = n\Gamma(n)$.
Anleitung: Lösen Sie das Integral

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

einmal durch sukzessive Integration in kartesischen Koordinaten und einmal in Polarkoordinaten, wobei Sie die Winkelintegrationen nach $\int_{\mathbb{R}^n} f(R)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \int_0^\infty S_n(R) f(R)\, \mathrm{d}R$ zusammenfassen können.

(b) Zeigen Sie außerdem:

$$C_n = \begin{cases} \frac{\pi^{n/2}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} & , \text{ falls } n \text{ gerade} \\ \\ \frac{2(2\pi)^{(n-1)/2}}{n!!} & , \text{ falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

(Doppelfakultät: $n!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$).

17. **Ein Teilchen $\leftrightarrow$ N Teilchen** **(8 Punkte)**

Erneut betrachten wir ein Teilchen, das in einen Potentialkasten eingesperrt ist.

(a) Bestimmen Sie die Zahl der Zustände $g(U, 1)$ mit der Energie $U_n < U$ für ein Teilchen in einem Würfel der Kantenlänge a. Dazu stelle man sich die durch n_x, n_y, n_z charakterisierten scharfen Quantenzustände im n-Raum homogen verschmiert vor und berechne die im entsprechenden Volumen enthaltene Menge an Zuständen.

(b) Berechnen Sie nun $g(U, N)$ für N Teilchen. Greifen Sie dazu auf die Ergebnisse aus Aufgabe 16 zurück. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können Sie annehmen, daß N eine gerade Zahl ist.

(c) Zeigen Sie nun, daß man das Ergebnis aus (b) auch näherungsweise aus

$$g(U, N) = \left(g\left(\frac{U}{N}, 1\right) \right)^N$$

erhält (bis auf einen konstanten Faktor). Benutzen Sie dabei für das Ergebnis aus (b) die Stirlingsche Formel als Näherung.

(d) Bestimmen Sie die Temperatur τ aus diesem Ergebnis. Obwohl das in der Vorlesung noch abgeleitet werden wird, können Sie jetzt schon den Zusammenhang zwischen τ und der thermodynamischen Temperatur T angeben?