INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

THERMODYNAMIK UND STATISTISCHE MECHANIK — WS 2004/2005

2. Übungsblatt — Abgabe: Donnerstag, 4.11.04 (bis 11.25 Uhr)

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A225, Tel. 391-5183, sven.simon@tu-bs.de

4. **Extrema unter Nebenbedingungen: Lagrange-Multiplikatoren** **(5 Punkte)**
Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren dient der Bestimmung von Extrema unter gegebenen Nebenbedingungen und wird gelegentlich in der Thermodynamik benötigt. Anhand zweier einfacher Beispiele soll dieses Verfahren wiederholt werden:

   (a) Ein Rechteck, das unter allen Rechtecken gleichen Umfangs maximale Fläche besitzt, hat auch bei gegebener Fläche minimalen Umfang. Zeigen Sie dies, und zwar

      i. direkt, d.h. indem Sie einmal die Fläche F als Funktion des Umfangs U und einer Seitenlänge a ausdrücken bzw. entsprechend U als Funktion von F und a, und dann das Extremum der Funktion *einer* Variablen auswerten,

      ii. durch Verwendung Lagrangescher Multiplikatoren.

   (b) Maximieren Sie das Volumen eines Quaders, der gerade in das Innere des durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

   definierten Ellipsoids paßt. Zeigen Sie, daß das Verhältnis des maximalen Volumens zum Volumen des Ellipsoids $2/(\sqrt{3}\pi)$ ist.

5. **Kettenregel und partielle Ableitungen II** **(5 Punkte)**
Gegeben sei eine glatte Funktion $f(x, y, z)$ mit der Eigenschaft, daß in einem geeigneten Gebiet die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ nach einer jeden der drei Variablen x, y oder z eindeutig als glatte Funktion der beiden anderen Variablen aufgelöst werden kann. Dann gilt:

   (a) $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = 1 \quad ;$

   (b) $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1 \quad ;$

   (c) $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \quad .$

Verifizieren Sie diese Beziehungen zunächst anhand eines konkreten Beispiels:

$$f(x, y, z) = x + 2y + 3z = 0$$

Zeigen Sie deren Gültigkeit anschließend allgemein.

6. **Kettenregel und partielle Ableitungen III** **(5 Punkte)**
Es seien die Funktionen $f(x, y, z) = 0$ und $g(x, y)$ gegeben. Unter der Annahme, daß alle Ableitungen existieren und daß alle Funktionen nach den einzelnen Variablen aufgelöst werden können, gilt:

   (a) $\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_g = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_g \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_g \quad ;$

   (b) $\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_z + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \quad .$

Verifizieren Sie diese Beziehungen zunächst anhand eines konkreten Beispiels:

$$f(x, y, z) = x + 2y + 3z = 0 \quad \text{und} \quad g(x, y) = 5x - 7y \quad .$$

Zeigen Sie deren Gültigkeit anschließend allgemein.

Rückseite beachten! ⟶

7. **Differentialformen II** **(3 Punkte)**
Zeigen Sie, daß die folgenden Differentiale *nicht* vollständig sind. Bestimmen Sie jeweils einen von Null verschiedenen integrierenden Faktor sowie die zugehörige Zustandsfunktion.

   (a) $\delta A = C\,\mathrm{d}x + \frac{x}{y}\,\mathrm{d}y \quad , \quad C = \text{const} \quad ;$

   (b) $\delta B = xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y \quad .$

8. **Differentialformen III** **(12 Punkte)**
In dieser Aufgabe wollen wir verschiedene Methoden kennenlernen, um zu zeigen, daß ein vorgegebenes unvollständiges Differential
$$\delta F = F_1(\underline{x})\,\mathrm{d}x + F_2(\underline{x})\,\mathrm{d}y + F_3(\underline{x})\,\mathrm{d}z$$
keinen von Null verschiedenen integrierenden Faktor besitzt.

   (a) Es genügt zu zeigen, daß zwei beliebige Punkte (x_j, y_j, z_j), $j = 1, 2$ durch eine Kurve
$$\underline{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \quad ; \quad t \mapsto \underline{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$$
   mit der Eigenschaft
$$\sum_{i=1}^{3} F_i\left(\underline{\gamma}(t)\right)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_i(t) = 0 \tag{1}$$
   verbunden werden können. Begründen Sie dies!

   (b) Betrachten wir ein konkretes Beispiel:
$$\delta F = y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}z \quad .$$
   Überzeugen Sie sich zunächst davon, daß δF kein vollständiges Differential darstellt. Zeigen Sie dann mittels der in (a) vorgestellten Methode, daß δF keinen integrierenden Faktor besitzt. Eine geeignete Kurve $\underline{\gamma}$ können Sie aus den folgenden drei Teilen zusammensetzen:

   - $\underline{\gamma}_A$ von (x_1, y_1, z_1) geradlinig nach $(0, 0, z_1)$,
   - $\underline{\gamma}_B$ von $(0, 0, z_1)$ nach $(0, 0, z_2)$ entlang einer Spirale, zu der Sie $z(t)$ als Funktion des Laufparameters aus Gl. (1) bestimmen,
   - $\underline{\gamma}_C$ von $(0, 0, z_2)$ geradlinig nach (x_2, y_2, z_2).

   (c) Lösen Sie die Aufgabe auch auf folgendem Weg: Zeigen Sie zunächst allgemein, daß eine Differentialform δF mit von Null verschiedenem integrierenden Faktor der „Frobeniusschen Integrabilitätsbedingung“
$$\underline{F} \cdot (\mathrm{rot}\,\underline{F}) = 0$$
   genügen muß, wobei $\underline{F} = (F_1, F_2, F_3)$ als Vektorfeld im üblichen Sinne zu lesen ist. Zeigen Sie anschließend, daß diese Bedingung für das in (b) angegebene Beispiel nicht erfüllt ist.