INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

THERMODYNAMIK UND STATISTISCHE MECHANIK — WS 2004/2005

1. Übungsblatt — Abgabe: keine

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A225, Tel. 391-5183, sven.simon@tu-bs.de

1. **Teilchen im Potentialkasten**
Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einem quaderförmigen Kasten mit den Abmessungen a, b und c. Für den Hamilton-Operator gilt also

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \quad .$$

Als Eigenfunktionen sollen nur Funktionen $\phi(x, y, z)$ zugelassen werden, die an den Rändern, d.h. auf der Oberfläche des Quaders, verschwinden.

   (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von H und die zugehörigen Eigenfunktionen.

   (b) Betrachten Sie als Spezialfall einen würfelförmigen Kasten ($a = b = c$). Geben Sie für die niedrigsten Energieniveaus jeweils den Entartungsgrad an.

2. **Differentialformen I**
In dieser Aufgabe sollen einige Grundbegriffe über Differentialformen wiederholt werden.

   (a) Auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet sei eine Differentialform

$$\delta F = F_1(\underline{x})\mathrm{d}x + F_2(\underline{x})\mathrm{d}y + F_3(\underline{x})\mathrm{d}z$$

   mit stetig differenzierbaren Koeffizienten $F_1(\underline{x})$, $F_2(\underline{x})$ und $F_3(\underline{x})$ gegeben. Zeigen Sie: Für δF existiert nur dann eine Zustandsfunktion $\phi(\underline{x})$ mit

$$\delta F = \mathrm{d}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathrm{d}z \quad ,$$

   wenn die Integrabilitätsbedingung

$$\mathrm{rot}\,\underline{F} = 0$$

   erfüllt ist, wobei $\underline{F} = (F_1, F_2, F_3)$ als Vektorfeld im üblichen Sinne zu lesen ist. Ein solches δF heißt *vollständig* oder *exakt*.

   (b) Untersuchen Sie, ob die folgenden Formen vollständige Differentiale darstellen:

      i. $\delta A = \cos x \sin y \,\mathrm{d}x - \sin x \cos y \,\mathrm{d}y \quad ;$

      ii. $\delta B = \sin x \cos y \,\mathrm{d}x + \cos x \sin y \,\mathrm{d}y \quad ;$

      iii. $\delta C = x^3 y^2 \,\mathrm{d}x - y^3 x^2 \,\mathrm{d}y \quad .$

   (c) Zeigen Sie, daß

$$\delta F = \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x + \ln\left(\frac{x}{y^{\alpha+1}}\right)\mathrm{d}y \quad ; \quad x, y > 0 \quad , \quad \alpha = \mathrm{const}$$

   ein vollständiges Differential darstellt und bestimmen Sie eine geeignete Zustandsfunktion $\phi(\underline{x})$.

   (d) Die Differentialform

$$\delta F = y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y$$

   ist *nicht* vollständig (Beweis!). Bestimmen Sie eine nichtverschwindende Funktion $h(x, y)$ so, daß das Produkt $h(x, y)\,\delta F$ ein vollständiges Differential ist. Die Funktion $h(x, y)$ heißt *integrierender Faktor* für δF. Geben Sie eine Zustandsfunktion ϕ zu $h(x, y)\,\delta F$ an.

   (e) Bestimmen Sie das Integral der Differentialform

$$\delta F = y\,\mathrm{d}x + x^3\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z$$

   über einen Kreis in der (x, y)-Ebene vom Radius R mit $(0, 0, 0)$ als Mittelpunkt.

Rückseite beachten! ⟶

3. **Kettenregel und partielle Ableitungen I**
Gegeben seien zwei Koordinatensysteme (x, y, z) und (λ, μ, ν). Zeigen Sie, daß aus $x = \lambda$ *nicht* $\partial/\partial x = \partial/\partial\lambda$ folgt. Betrachten Sie dazu die Koordinatentransformation $(x, y, z) \mapsto (\lambda, \mu, \nu)$ mit

$$\lambda = x \quad , \quad \mu = ax + by + cz \quad , \quad \nu = Ax + By + Cz \quad \text{und} \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ A & B & C \end{pmatrix} \neq 0$$

und drücken Sie das vollständige Differential

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial \lambda}\mathrm{d}\lambda + \frac{\partial f}{\partial \mu}\mathrm{d}\mu + \frac{\partial f}{\partial \nu}\mathrm{d}\nu$$

einer Funktion $f(\lambda, \mu, \nu)$ in den Koordinaten (x, y, z) aus, indem Sie die Differentiale der Koordinatenfunktionen einsetzen.