INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

THERMODYNAMIK UND STATISTISCHE MECHANIK — WS 2004/2005

20. Übungsblatt — Abgabe: Donnerstag, 03.02.05 (bis 11.25 Uhr)

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

67. **Barometrische Höhenformel I: Ideales Gas** **(10 Punkte)**
Betrachten Sie die Erdatmosphäre als ideales Gas mit der Teilchenmasse m, welches sich in einem homogenen Gravitationsfeld der Schwerebeschleunigung g befindet. Der atmosphärische Druck $P(h)$ in Abhängigkeit von der Höhe h über dem Boden wird dann durch die *barometrische Höhenformel*

$$P(h) = P_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)$$

beschrieben, wobei P_0 den Druck am Boden bezeichnet. Diese Formel soll auf zwei verschiedene Arten hergeleitet werden:

(a) Stellen Sie die Kräftebilanz an einem Volumenelement der Atmosphäre auf und leiten Sie daraus eine Differentialgleichung für P ab. Bestimmen Sie daraus $P(h)$.

(b) Geben Sie die klassische Hamilton-Funktion für ein ideales Gas im homogenen Schwerefeld an. Berechnen Sie den kanonischen Erwartungswert der Dichte $n = \sum_{i=1}^{N} \delta\left(\underline{r}_i - \underline{r}\right)$, wobei $\underline{r}_i$ den Ort des i-ten Teilchens bezeichnet.

68. **Barometrische Höhenformel II: Photonengas** **(13 Punkte)**
Ein Photonengas sei dem Gravitationsfeld der Erde ausgesetzt.

(a) Es soll eine barometrische Höhenformel für Photonen in einem Gravitationsfeld abgeleitet werden. Betrachten Sie ein Höhenelement dz und setzen Sie die auftretenden Kräfte gleich (von der z-Abhängigkeit von g sehe man zunächst einmal ab). Daraus erhält man eine Gleichung für den Druck. Bestimmen Sie daraus die höhenabhängige Energiedichteverteilung.

(b) Da im Photonengas $u \propto T^4$ gilt, ergibt sich aus (a) offenbar ein Temperaturgefälle. Das Gesamtsystem muß natürlich im thermodynamischen Gleichgewicht sein. Dementsprechend muß obiges Ergebnis auch aus der Forderung nach der Maximierung der Entropie im Gleichgewicht ableitbar sein.

Betrachten Sie dazu wieder zwei Schichten bei z und $z + \Delta z$. Um relativistischen Effekten aus dem Weg zu gehen, stelle man sich den Einfluß der Gravitation auf die Photonen so vor, daß die Energie $E = 2m_e c^2$ des Strahlungsfelds in ein Elektron-Positron-Paar „zerstrahlt“, die aufgrund der Gravitation nach unten fallen, und dann wieder zu einem Photon rekombinieren. Im Gleichgewicht muß dann die Entropieänderung $\Delta S(z) = \Delta E(z)/(kT(z)) = \Delta E(z)\beta(z)$ bei diesem Prozeß Null sein. Zeigen Sie, daß daraus die Bedingung

$$c^2\beta(z + \Delta z) = (c^2 + g\Delta z)\beta(z)$$

folgt. Entwickeln Sie die Gleichgewichtsbedingung bis zur ersten Ordnung in Δz, um eine Differentialgleichung für die Temperaturverteilung und damit die Energiedichte wie unter (a) zu bekommen.

(c) Nun sind die beiden Ergebnisse von (a) und (b) leider verschieden. Man kann aber das Ergebnis aus (a) verbessern, wenn man in der Ausgangsgleichung den allgemein relativistischen Gangunterschied zweier Uhren berücksichtigt. Für ein z-abhängiges g geht nämlich in niedrigster Ordnung eine Uhr bei $z + \Delta z$ um den Faktor $(1 + g\Delta z/c^2)$ schneller als eine Uhr bei z. Zeigen Sie, daß man damit das Ergebnis aus (b) reproduzieren kann.

Rückseite beachten! ⟶

69. **Ein Besuch beim Yeti** **(5 Punkte)**
Der Bergsteiger Reinhold M. kommt von einer seiner Expeditionen zurück und erwähnt am Rande einer Erzählung über sein x-tes Treffen mit dem Yeti, er wäre im übrigen so weit oben gewesen, daß er sich die Hände in siedendem Wasser waschen konnte, ohne sich zu verbrennen. Glauben Sie ihm das? Berechnen Sie die Siedetemperatur von Wasser auf einem 9000 Meter hohen (fiktiven) Berg. Die Verdampfungswärme von Wasser ist 40 kJ/mol.

70. **Exakte Differentialgleichungen** **(2 Punkte)**
Zum Schluß noch eine kleine mathematische Wiederholung: Zeigen Sie, daß die folgenden Differentialgleichungen exakt sind und bestimmen Sie ihre allgemeine Lösung.

(a) $-x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0 \quad ;$

(b) $(x - y - 3)\,\mathrm{d}x - (x + y - 1)\,\mathrm{d}y = 0 \quad ;$

(c) $e^y - 2x + xy'e^y = 0 \quad .$

Termine

- Fragestunden vor der Klausur: **Montag, d. 14.2.05 und Mittwoch, d. 16.2.05, jeweils um 13.00 Uhr in Raum 318**.
- Die zweite Klausur findet am **Donnerstag, d. 17.2.05, von 9:30 Uhr bis 12:00 Uhr in Raum MS 3.1** statt. *Hilfsmittel sind nicht zugelassen, Papier wird gestellt.*
- Rückgabe der Klausur: **Dienstag, d. 22.2.05, um 14.00 Uhr in Raum 318**.
- Termin für die Nachklausur: **Donnerstag, d. 31.3.2005, von 9:30 Uhr bis 12:00 Uhr in Raum 318**.