INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

Thermodynamik und Statistische Mechanik WS 2004/2005

17. Übungsblatt Abgabe: Donnerstag, 20.01.05 (bis 11.25 Uhr)

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

54. **Energie des relativistischen Fermigases** **(Große Übung; keine Abgabe!)**
In einigen weißen Zwergen haben die meisten Elektronen relativistische kinetische Energien $\epsilon = pc$, wobei p der Impuls des Elektrons sei, die Impulsquantelung im Volumen V ist die gleiche wie im nichtrelativistischen Grenzfall.

(a) Zeigen Sie, daß die Fermienergie im relativistischen Grenzfall durch

$$\epsilon_F = \hbar \pi c \left(\frac{3n}{\pi}\right)^{1/3}$$

gegeben ist ($n = N/V$).

(b) Zeigen Sie, daß die Gesamtenergie im Grundzustand

$$U_0 = \tfrac{3}{4} N \epsilon_F$$

ist.

55. **Kanonische Energieverteilung im idealen Gas** **(10 Punkte)**
Erneut betrachten wir ein klassisches ideales Gas mit der Hamilton-Funktion

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} \quad .$$

(a) Berechnen Sie die Verteilung der Energie (bezogen auf den Erwartungswert) in der kanonischen Gesamtheit des idealen Gases, d.h. bestimmen Sie die Funktion $\rho_N(t)$, so daß

$$\left\langle f\left(\frac{H}{U}\right)\right\rangle = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \rho_N(t) f(t)$$

für beliebige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\, t \mapsto f(t)$ gilt. Mit $U = \frac{3}{2}NkT$ wird die mittlere Energie des Gases bezeichnet.

(b) Zeigen Sie, daß $\rho_N(t)$ unabhängig von β ist und einen Faktor $h(t) = t\exp(-t)$ zu einer hohen Potenz enthält.

(c) Begründen Sie, daß für große N nur Werte in der Nähe des Maximums von h zum Integral beitragen, und berechnen Sie so den Limes des obigen Erwartungswertes für $N \to \infty$.

(d) Schätzen Sie die Fluktuationen für große N durch Vergleich mit einer Gauß-Verteilung ab, indem Sie h um das Maximum entwickeln.

56. **Schwankungen im idealen klassischen Gas und beim idealen Bosegas** **(7 Punkte)**
Die mittlere Teilchenzahl eines klassischen idealen Gases in diffusivem Kontakt mit einem Reservoir unterliegt nur sehr kleinen Schwankungen, wohingegen diese Schwankungen für ein einzelnes Energieniveau im ideales Bosegas sehr groß werden können. Dieser Unterschied soll näher untersucht werden. Als Maß für die Schwankung der mittleren Teilchenzahl soll

$$\sigma_N = \frac{(\Delta N)^2}{\langle N\rangle^2} = \frac{\langle (N - \langle N\rangle)^2\rangle}{\langle N\rangle^2}$$

verwendet werden.

Rückseite beachten! ⟶

(a) Aus der Vorlesung kann man die Beziehung

$$\langle N \rangle = \frac{\tau}{\mathcal{Z}_G} \left(\frac{\partial \mathcal{Z}_G}{\partial \mu} \right)_{\tau,V}$$

entnehmen. Leiten Sie einen ähnlichen Ausdruck für $\langle N^2 \rangle$ ab.

(b) Zeigen Sie nun, daß für das klassische ideale Gas ($\langle N \rangle$ sei hier die mittlere Gesamtteilchenzahl des Gases)

$$\sigma_{N,\text{kl.}} = \frac{1}{\langle N \rangle}$$

und für das ideale Bosegas ($\langle N \rangle$ sei dabei die mittlere Besetzungszahl für ein einzelnes Energieniveau)

$$\sigma_{N,\text{Bose}} = \frac{1 + \langle N \rangle}{\langle N \rangle}$$

gilt. Für $\langle N \rangle \gg 1$ ist demnach $\sigma_{N,\text{Bose}} \approx 1$ und es treten somit sehr große statistische Schwankungen in der Besetzungszahl eines einzelnen Niveaus im Bosegas auf. Im Mittel über alle Niveaus ist die Schwankung der Gesamtteilchenzahl jedoch wie beim klassichen idealen Gas sehr gering, da sich die Einzelschwankungen wegmitteln.

57. **Bose-Einstein-Kondensation** **(7 Punkte)**
Es soll die Kondensation eines Bosegases in den Grundzustand bei tiefen Temperaturen etwas genauer untersucht werden.

(a) Analog zur Vorlesung werden die Besetzungszahl N_0 für den Grundzustand und die Restteilchenzahl N_e getrennt behandelt. Leiten Sie zunächst die Beziehungen $N_0 = (1-\eta)N$ und $N_e = \eta N$ her, wobei

$$\eta = \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \frac{g_{3/2}(\sigma)}{g_{3/2}(1)} \qquad \text{und} \qquad g_{3/2}(\sigma) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \frac{x^2}{\sigma^{-1} e^{x^2} - 1} dx$$

gilt. Bestimmen Sie die kritische Temperatur T_c als Funktion der Dichte N/V.

(b) Zeigen Sie, daß

$$\sigma = \frac{N(1-\eta)}{N(1-\eta)+1}$$

gilt und bestimmen Sie daraus Näherungsausdrücke für $N_0(T)$ im Falle sehr großer Teilchenzahlen N. Skizzieren Sie den Verlauf von $N_0(T)$. ***Hinweis:*** $g_{3/2}(\sigma)$ wächst im Intervall $[0;1]$ monoton von Null auf den Wert 2,612.

58. **Klassische Berechnung des Strahlungsgesetzes** **(6 Punkte)**
Das Stefan-Boltzmann-Gesetz kann im wesentlichen auch aus einer nicht-statistischen Betrachtung mittels klassischer thermodynamischer Relationen abgeleitet werden, wobei die Proportionalitätskonstante jedoch unbestimmt bleibt.

(a) Leiten Sie zunächst aus dem totalen Differential der Entropie in den Variablen T und V die Relation

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p$$

ab.

(b) Leiten Sie unter Verwendung der Tatsache, daß $u = U/V$ eine reine Funktion der Temperatur ist, den Zusammenhang $u = aT^4$ ab.

59. **Glühemission** **(Zusatzaufgabe; + 5 Punkte)**
Die Austrittsarbeit für Elektronen in einem Metall sei Φ. Das Metall wird auf einige hundert Kelvin aufgeheizt. Es soll der Anteil der Elektronen, die aus dem Metall austreten können (im Fall $\Phi \gg kT$) näherungsweise berechnet werden, wobei im wesentlichen die funktionale Abhängigkeit von Φ interessiert.

60. **Wärmekapazität des intergalaktischen Raumes** **(Zusatzaufgabe; + 5 Punkte)**
Im intergalaktischen Raum befindet sich vermutlich ein ideales Gas aus Wasserstoffatomen mit einer Konzentration von einem Atom pro Kubikmeter. Außerdem wird der Raum noch von einer Wärmestrahlung bei 2,9K eingenommen. Zeigen Sie, daß das Verhältnis der Wärmekapazität der Materie zu der der Strahlung in etwa 10^{-10} beträgt.