INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

THERMODYNAMIK UND STATISTISCHE MECHANIK — WS 2004/2005

16. Übungsblatt — Abgabe: keine

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A225, Tel. 391-5183, sven.simon@tu-bs.de

---

53. **Bose-Verteilung kombinatorisch**
In der Vorlesung wurde die Bose-Einstein-Verteilung mit allen bis dahin erarbeiteten Werkzeugen abgeleitet. Es geht aber auch ganz elementar kombinatorisch, wie wir es am Beginn der Vorlesung gemacht haben. Das Problem dabei ist, wie man den Entartungsgrad g für ein gegebenes System abzählt. Für ein reales System ist dies normalerweise nicht möglich, da die genaue Lage und Entartung der (sehr vielen) Energieniveaus nicht bekannt ist. Was man aber (ungefähr) bestimmen kann, ist die Zustandsdichte $\mathcal{D}(\epsilon)$, und daraus die Zahl der Zustände pro Energieintervall $d\epsilon$. Diese Zahl sei $A(\epsilon) = \mathcal{D}(\epsilon)d\epsilon$ und als ganzzahlig angenommen.

(a) Wir denken uns das Energieniveauschema also zerlegt in k Intervalle der Breite $d\epsilon$, die mit dem Index i abgezählt werden. In jedem Intervall befinden sich $A_i = A(\epsilon_i)$ Energiezustände. Über die genaue Anordnung dieser A_i Zustände in einem bestimmten Intervall wissen wir nichts. Wir nehmen deshalb an, sie haben alle die gleiche Energie ϵ_i (diese Näherung wird umso besser, je kontinuierlicher die Niveaus liegen und je kleiner man $d\epsilon$ wählen kann). N_i sei die Anzahl von Fermionen im $i$ten Intervall. Bestimmen Sie den Entartungsfaktor $g(N_i, A_i)$

(b) Die Energie des Systems sei fest vorgegeben. Zeigen Sie, daß der wahrscheinlichste Zustand die Bedingung

$$\frac{N_i}{A_i} = \frac{1}{e^{-\alpha-\beta\epsilon_i} - 1}$$

erfüllt, wobei α und β die zwei Lagrangeparameter der entsprechenden Nebenbedingungen sind. Dies ist schon im wesentlichen die Fermi-Verteilung. Im kontinuierlichen Fall $d\epsilon \to 0$ ergibt sich für die Zahl der Teilchen pro Energieintervall demnach das bekannte Ergebnis

$$N(\epsilon)d\epsilon = \frac{A(\epsilon)}{e^{-\alpha-\beta\epsilon} - 1} = f(\epsilon)\mathcal{D}(\epsilon)d\epsilon \quad .$$