INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

THERMODYNAMIK UND STATISTISCHE MECHANIK — WS 2004/2005

15. Übungsblatt — Abgabe: Donnerstag, 13.01.05 (bis 11.25 Uhr)

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A225, Tel. 391-5183, sven.simon@tu-bs.de

49. **Zerlegung eines Strahlungsfelds in seine Moden** **(25 Punkte)**
Gegeben sei ein beliebig geformtes (einfach zusammenhängendes) Volumen V, das von metallischen Wänden begrenzt ist und in dem ein Vakuum vorliegt. Die elektromagnetische Strahlung wird beschrieben durch ein Coulomb-geeichtes Vektorpotential $\underline{A}(\underline{x}, t)$, so daß also gilt

$$\mathrm{div}\underline{A} = 0 \quad , \quad \underline{E} = -\partial_t \underline{A} \quad \text{und} \quad \underline{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\underline{A} \quad .$$

$\underline{A}(\underline{x}, t)$ wird zerlegt in eine Überlagerung von Einzelmoden, die durch den Index μ gekennzeichnet werden. Jede Mode wird beschrieben durch eine reelle Funktion des Ortes $\underline{A}_\mu(\underline{x})$ und eine reelle zeitabhängige Amplitude $q_\mu(t)$:

$$\underline{A}(\underline{x}, t) = \sum_\mu \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} q_\mu(t) \underline{A}_\mu(\underline{x}) \qquad .$$

(a) Leiten Sie aus der Wellengleichung für das Vektorpotential

$$\Delta \underline{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{A} = 0$$

die beiden Differentialgleichungen

$$\ddot{q}_\mu + \omega_\mu^2 q_\mu = 0 \quad \text{und} \quad \Delta \underline{A}_\mu + \frac{\omega_\mu^2}{c^2}\underline{A}_\mu = 0$$

ab.

(b) Finden Sie für den Fall des Würfels mit Kantenlänge L alle Lösungen für $\underline{A}_\mu(\underline{x})$. Die Randbedingungen für eine metallische Wand sind $\underline{E}_\parallel = 0$ und $\underline{B}_\perp = 0$.

(c) Zeigen Sie, daß

$$\langle \underline{A}_\mu | \underline{A}_\nu \rangle = \int_V \underline{A}_\mu(\underline{x}) \cdot \underline{A}_\nu(\underline{x}) \; dV$$

ein Skalarprodukt im Raum der auf V definierten Funktionen $\underline{A}_\mu(\underline{x})$ definiert.

(d) Zeigen Sie explizit, daß bei geeigneter Normierung die Lösungen aus Teil (b) die Orthonormalitätsbeziehung

$$\langle \underline{A}_\mu | \underline{A}_\nu \rangle = \delta_{\mu\nu}$$

erfüllen. Diese Beziehung gilt im übrigen auch für jedes beliebige Volumen und folgt allgemein aus den Eigenschaften des Laplace-Operators.

(e) Nun kann man unter Ausnutzung der Orthonormalität der $\underline{A}_\mu$ für wiederum beliebig geformte Volumina zeigen, daß die gesamte elektromagnetische Feldenergie des Systems

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int_V dV \; \left(\varepsilon_0 \underline{E}^2 + \mu_0 \underline{H}^2\right)$$

in die Summe der Energien der Einzelmoden zerlegbar ist, und dann die Form

$$\mathcal{H} = \sum_\mu \mathcal{H}_\mu = \sum_\mu \left(\frac{1}{2}p_\mu^2 + \frac{1}{2}\omega_\mu^2 q_\mu^2\right)$$

annimmt, wobei $p_\mu = \dot{q}_\mu$ ist. Versuchen Sie diese Form abzuleiten.

Rückseite beachten! ⟶

(f) Die q_μ, p_μ bilden jetzt ein System aus Koordinaten, die die Zeitentwicklung des kompletten Strahlungsfeldes beschreiben. Die $\mathcal{H}_\mu$ sind die zugehörigen Hamiltonschen Funktionen, die genau die Form haben, die auch beim harmonischen Oszillator auftaucht. Führen Sie nun noch für die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen eine Hauptachsentransformation durch, und zeigen Sie, daß sich die Hamiltonfunktion der Mode μ bei geeigneter Wahl der Vorfaktoren mit den dimensionslosen, komplexen Amplituden $a_\mu(t)$ als

$$\mathcal{H}_\mu = \frac{1}{2}\hbar\omega_\mu \left(a_\mu^* a_\mu + a_\mu a_\mu^*\right) = \hbar\omega_\mu a_\mu^* a_\mu$$

schreiben läßt. Der Stern bezeichnet komplexe Konjugation.

50. **Chemisches Potential des idealen Fermi-Gases** **(5 Punkte)**
In Anwendungen wird in der Fermi-Verteilung fast immer $\mu(\tau) \approx \mu(\tau = 0) = \epsilon_F$ gesetzt. Es soll die Genauigkeit dieser Annahme geprüft werden. Dazu soll $\mu(\tau, N, V)$ für das ideale Fermi-Gas im Fall starker Entartung bestimmt werden.

(a) μ läßt sich aus der Beziehung

$$N = \int_0^\infty \mathcal{D}(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon$$

ableiten, jedoch kann obiges Integral nur approximiert werden. Dazu verwende man die Reihenentwicklung

$$\int_0^\infty x^2 \frac{1}{\sigma^{-1}e^{x^2}+1} = \frac{1}{3}(\ln\sigma)^{3/2}\left(1 + \frac{\pi^2}{8(\ln\sigma)^2} + \dots\right) \quad ,$$

die im Fall $\sigma \gg 1$ gilt ($\sigma = e^{\mu/\tau} \gg 1$ ist der Fall starker Entartung). Zeigen Sie mit dieser Entwicklung, daß

$$\ln\sigma = \frac{\epsilon_F}{\tau}\left(1 - \frac{\pi^2}{12(\ln\sigma)^2} + \dots\right)$$

gilt.

(b) Da obige Gleichung mehr als nur den quadratischen Term in $\ln\sigma$ enthält, ist sie zunächst nicht auflösbar. Um dies zu umgehen, wird auf der rechten Seite die nullte Näherung für $\ln\sigma$ verwendet. Berechnen Sie so $\mu(\tau, N, V)$ und skizzieren Sie den Verlauf über τ. Bei welcher Temperatur weicht μ von ϵ_F bei Kupfer um mehr als 5% ab?

51. **Ideales Gas mit inneren Freiheitsgraden** **(Zusatzaufgabe; + 5 Punkte)**
Man betrachte ein ideales Gas, in dem die Teilchen zusätzlich zur Translation noch zwei Energiezustände, die durch die Energie $\Delta\epsilon$ getrennt sind, annehmen können (innerer Freiheitsgrad). Berechnen Sie das chemische Potential, die freie Energie, die Entropie, den Druck und die Wärmekapazität bei konstantem Druck für diesen Fall (Alte Ergebnisse sollen natürlich wiederverwendet werden).

52. **DNA-Molekül** **(Zusatzaufgabe; + 5 Punkte)**
Ein einfaches Modell für das Zertrennen bzw. Zusamenfügen von DNA-Strängen ist das „Reißverschluß-Modell“. Die Bindungsenergie eines Basenpaares in der DNS sei ϵ. Ein Paar kann jedoch nur getrennt werden, wenn schon alle Paare davor getrennt worden sind (die DNS soll nur von einer Seite her aufgetrennt werden), genau wie bei einem Reißverschluß. Bestimmen Sie die mittlere Anzahl getrennter Basenpaare für ein DNA-Molekül aus insgesamt N Basenpaaren im Fall $kT \ll \epsilon$. In welcher Größenordnung (in eV) muß demnach ϵ liegen, damit das Molekül in Lebewesen zwar stabil, aber leicht trennbar wird?