INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

THERMODYNAMIK UND STATISTISCHE MECHANIK — WS 2004/2005

10. Übungsblatt — Abgabe: Donnerstag, 02.12.04 (bis 11.25 Uhr)

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A225, Tel. 391-5183, sven.simon@tu-bs.de

35. **Ultrarelativistisches Gas** **(8 Punkte)**
Wir wollen die thermodynamischen Eigenschaften eines klassischen ultrarelativistischen Gases berechnen. Ein solches Gas besteht aus masselosen Teilchen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen (z.B. Photonen etc.). Nach der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung gilt

$$\epsilon = \sqrt{\underline{p}^2 c^2 + m^2 c^4} = \left|\underline{p}\right| c \quad \text{für} \quad m = 0 \quad .$$

Das ultrarelativistische Gas wird auch oft als leicht zu berechnendes Modell für Teilchen mit Masse $m \neq 0$ benutzt, wenn die Näherung $\left|\underline{p}\right| \gg mc$ erfüllt ist. Wir betrachten nun ein solches Gas aus N Teilchen in einem Gebiet vom Volumen V. Für die Hamilton-Funktion gilt also

$$\mathcal{H}\left(\underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_N, \underline{q}_1, \ldots, \underline{q}_N\right) = \sum_{i=1}^{N} \left|\underline{p}_i\right| c \quad .$$

(a) Berechnen Sie das kanonische Zustandsintegral für ein Gas aus N *nicht* unterscheidbaren, wechselwirkungsfreien ultrarelativistischen Teilchen.

(b) Bestimmen Sie die freie Energie als thermodynamisches Potential.

(c) Berechnen Sie Druck, Entropie, chemisches Potential, innere Energie und Wärmekapazität C_V.

(d) Leiten Sie die Beziehung $U = 3pV$ her, und vergleichen Sie dies mit dem bekannten Ergebnis für das nichtrelativistische ideale Gas.

(e) Geben Sie die Enthalpie H an und bestimmen Sie die Wärmekapazität C_p.

(f) Es sei $\underline{P} \equiv \sum_{i=1}^{N} \underline{p}_i$ der Gesamtimpuls der Teilchen. Zeigen Sie: Für jede Komponente P_k gilt

$$\left\langle P_k^2 \right\rangle = A \cdot N^\alpha \quad .$$

Bestimmen Sie insbesondere die Parameter α und A.

36. **Gitterschwingungen im Festkörper: Einstein-Modell** **(8 Punkte)**
Wir betrachten einen Festkörper aus N Atomen näherungsweise als ein System von $3N$ ungekoppelten, linearen, harmonischen Oszillatoren. Im *Einstein-Modell* wird angenommen, daß alle $3N$ Eigenfrequenzen identisch sind und einen festen Wert ω_E haben. Die Größe $\Theta_E = \hbar\omega_E / k_B$ wird als *Einstein-Temperatur* bezeichnet.

(a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme, die freie Energie F, das chemische Potential μ, den Druck p und die Entropie S.

(b) Geben Sie Näherungsausdrücke an, die das Verhalten von $\ln \mathcal{Z}$, F und S in den Grenzfällen $T \gg \Theta_E$ bzw. $T \ll \Theta_E$ beschreiben.

(c) Bestimmen Sie die innere Energie U. Geben Sie Näherungsausdrücke an, die das Verhalten von U in den Grenzfällen $T \gg \Theta_E$ bzw. $T \ll \Theta_E$ beschreiben. Diskutieren Sie die Ergebnisse. Skizzieren Sie die Funktion $U(T)$.

(d) Bestimmen Sie die Wärmekapazität C_V und stellen Sie das Ergebnis mit Hilfe der *Einstein-Funktion*

$$E(x) = \frac{x^2 \exp(x)}{\left(\exp(x) - 1\right)^2}$$

dar. Untersuchen Sie das Verhalten von C_V für $T \ll \Theta_E$. Zeigen Sie, daß C_V für $T \gg \Theta_E$ dem klassischen Wert $C_V = 3Nk_B$ entspricht (Gesetz von Dulong-Petit).

(e) Geben Sie die erste Korrektur für C_V zum Dulong-Petitschen Gesetz an. Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion $C_V(T)$.

Rückseite beachten! ⟶

37. **Ideales Gas IV: Großkanonische Zustandssumme** **(6 Punkte)**
Es soll die großkanonische Zustandssumme eines idealen Gases bestimmt werden.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der kanonischen Zustandssumme des idealen Gases, daß die großkanonische Zustandssumme für ein ideales Gas ununterscheidbarer Atome durch

$$\mathcal{Z}_G = \exp\left(\frac{V e^{\mu/kT}}{\lambda^3}\right)$$

gegeben ist.

(b) Zeigen Sie, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, N Atome im Volumen V vorzufinden, wenn sich das Gas in diffusivem Kontakt mit einem Reservoir befindet,

$$P(N) = \frac{\langle N\rangle^N}{N!} e^{-\langle N\rangle}$$

ist. Dies ist die *Poissonsche Verteilungsfunktion*. $\langle N\rangle$ ist der thermische Mittelwert der Anzahl der im Volumen V befindlichen Atome.

(c) Beweisen Sie die Beziehungen

$$\sum_N P(N) = 1 \quad \text{und} \quad \sum_N N P(N) = \langle N\rangle \quad .$$

38. **Berechnung von C_p aus dem Potential** $U(S, V, N)$ **(8 Punkte)**
Die in der Vorlesung angegebene Formel für C_p soll nun hergeleitet werden.

(a) Leiten Sie zunächst die Beziehung

$$C_p - C_V = T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

her. Gehen Sie dabei von der Entropie in den Variablen T und p aus.

(b) Leiten Sie die Beziehung

$$C_p - C_V = \frac{TV\alpha^2}{K_T} \quad ,$$

ab, wobei $\alpha = (1/V)(\partial V/\partial T)_p$ der *thermische Ausdehnungskoeffizient* und $K_T = -(1/V)(\partial V/\partial p)_T$ die *isotherme Kompressibilität* sind. Anhand dieser Beziehung kann man nun leicht ablesen, daß immer $C_p > C_V$ gilt.

(c) Nun soll C_p nur aus Ableitungen von $U(S, V, N)$ bestimmt werden. Dazu geht man von der Gleichung aus Teil (a) aus. Der entsprechende Ausdruck für C_V ist bereits in der Vorlesung vorgekommen. Die übrigen Terme müssen jetzt analog ersetzt werden. Für $(\partial p/\partial T)_V$ erhält man einen entsprechenden Ausdruck z.B. indem man p und T als Funktionen von S und V auffaßt, die Differentiale bildet, und $dV = 0$ setzt (wegen $V = \text{const.}$). $(\partial V/\partial T)_p$ ergibt sich aus den gleichen Differentialen durch Elimination von dS. Zusammen kommt man zu dem Ergebnis aus der Vorlesung (Da N sowieso konstant sein soll, ist der Index unterdrückt worden):

$$C_p = \frac{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial V^2}\right)_S \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V}{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial V^2}\right)_S \left(\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}\right)_V - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V}\right)^2}$$

Führen Sie diese Rechnung aus.