INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

Thermodynamik und Statistische Mechanik — WS 2004/2005

8. Übungsblatt — Abgabe: Donnerstag, 25.11.04 (bis 11.25 Uhr)

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A225, Tel. 391-5183, sven.simon@tu-bs.de

29. **Potts-Modell** **(10 Punkte)**
Betrachten Sie N idealisierte Spins, die in einer geschlossenen Kette angeordnet sind. Jeder Spin kann p verschiedene Mikrozustände annehmen, die durch eine natürliche Zahl $\nu = 1, 2, \ldots, p$ indiziert werden. Die Wechselwirkungsenergie zweier benachbarter Spins sei $-J$ (mit $J > 0$), wenn beide Spins im selben Zustand sind, und 0 sonst. Die Hamilton-Funktion des Gesamtsystems ist damit

$$H(\nu_1, \ldots, \nu_N) = -J \sum_{j=1}^{N} \delta_{\nu_j, \nu_{j+1}} \quad ,$$

wobei $(\nu_1, \ldots, \nu_N) \in \{1, 2, \ldots, p\}^N$ den Mikrozustand des Gesamtsystems bezeichnet, $\nu_{N+1} = \nu_1$ zu setzen ist und $\delta_{\nu,\nu'}$ das übliche Kronecker-Symbol bezeichnet.

(a) Zeigen Sie: Die Zustandssumme dieses Systems kann in der Form

$$\mathcal{Z} = tr\left(\underline{\underline{T}}^N\right)$$

geschrieben werden, wobei die Einträge der *Transfermatrix* $\underline{\underline{T}} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ durch

$$T_{ij} = \begin{cases} \exp(\beta J) & , \quad i = j \\ 1 & , \quad i \neq j \end{cases}$$

gegeben sind. Werten Sie diesen Ausdruck aus und geben Sie $\mathcal{Z}$ explizit an.

(b) Berechnen Sie die innere Energie *pro Teilchen* $u(T)$ im thermodynamischen Limes $N \to \infty$.

(c) Diskutieren Sie ferner das Hoch- und Niedrigtemperaturverhalten des Systems, d.h. die Limiten

$$\lim_{T\to\infty} u(T) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{T\to 0} u(T) \quad .$$

30. **Ideales Gas II: Gibbs´sches Paradoxon** **(10 Punkte)**
Es sollen die Grenzen der klassischen Annahme von unterscheidbaren Teilchen untersucht werden.

(a) Zeigen Sie, daß für ein Gas aus unterscheidbaren Teilchen die Entropie durch

$$S = Nk \ln V + \frac{3}{2} Nk \left[1 + \ln\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)\right]$$

gegeben ist. Leiten Sie damit die Beziehung $pV = NkT$ ab.

(b) Man betrachte jetzt zwei verschiedene Gase mit den Volumina V_1 und V_2, den Teilchenmassen m_1 und m_2, bestehend aus N_1 bzw. N_2 Teilchen in zwei durch eine Trennwand voneinander getrennten Behältern. Die Dichten N_i/V_i beider Gase seien gleich. Zeigen Sie, daß die Gesamtentropie des Systems nach dem Entfernen der Trennwand gegenüber der Summe der Einzelentropien um

$$\Delta S = k\left[N_1 \ln \frac{N_1 + N_2}{N_1} + N_2 \ln \frac{N_1 + N_2}{N_2}\right]$$

erhöht wird (dies ist die sogenannte Mischungsentropie). Zeigen Sie, daß es sich beim Mischen um einen irreversiblen Prozeß handelt.

(c) Das Gibbs´sche Paradoxon ergibt sich nun aus der Tatsache, daß für gleiche Gase in den Teilvolumina die Rechnung ebenfalls eine Entropiezunahme ΔS durch das Mischen ergibt. Das darf aber nicht sein, da ja das Mischen gleichartiger Gase mit gleichen Dichten ein reversibler Prozeß ist (das Widereinsetzen der Trennwand stellt ja exakt den Ausgangszustand wieder her, ganz im Gegensatz zu dem Fall, wo eine wirkliche Mischung stattfindet). Zeigen Sie, daß man dieses Paradoxon beheben kann, indem man für die Zustandssumme für N Teilchen aus Aufgabe 24 den sogenannten Boltzmann-Korrekturfaktor einführt:

$$\mathcal{Z}_N = \frac{1}{N!}\mathcal{Z}_1^N \quad .$$

Dieser Korrekturfaktor sorgt gerade näherungsweise dafür, daß in der zugrundeliegenden Kombinatorik die Teilchen als wirklich ununterscheidbar angesehen werden. Diese Näherung ist genau dann gültig, wenn sich im Mittel pro Energieniveau des Systems nur ein Teilchen befindet. Begründen Sie dies!

31. **Legendre-Transformation II** **(3 Punkte)**

Bestimmen Sie jeweils die Legendre-Transformierte der folgenden Funktionen.

(a) $f_1(x) = |x|^a$ mit $a > 1$;

(b) $f_2(x) = \exp(x-1)$;

(c) $f_3(x) = \begin{cases} (x+1)^4 & : \quad x < -1 \\ 0 & : \quad -1 \le x \le 1 \\ (x-1)^4 & : \quad x > 1 \end{cases}$

32. **Entropie und Information** **(7 Punkte)**

Wir betrachten eine Reihe von Ereignissen E_n $(n = 1, 2, \ldots, N)$, die mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten P_n eintreten können. Es gilt

$$\sum_n P_n = 1 \quad .$$

Wir ordnen nun der Feststellung eines Ereignisses E_n einen Informationswert I_n zu. Bei häufiger Wiederholung von solchen Feststellungen an der gleichen Reihe von Ereignissen erhält man dann einen *mittleren Informationsgehalt*, der durch

$$I = -\sum_n P_n \log_2 P_n \tag{1}$$

festgelegt ist. Diese Definition ist so gewählt, daß sie die mittlere Anzahl von einfachen Alternativfragen (ja oder nein, 0 oder 1) angibt, die zur vollständigen Charakterisierung eines Ereignisses der Reihe nach gestellt und beantwortet werden müssen. Folgende Beispiele sollen dies verdeutlichen:

- $N = 1$. Ein Ereignis tritt mit Sicherheit ein, $P_n = 1$. In diesem Fall ist $I = 0$. Man gewinnt keine Information, da der Eintritt des Ereignisses von vornherein feststeht.
- $N = 2, P_1 = P_2 = 1/2$. Beide Ereignisse treten mit gleicher Wahrscheinlichkeit ein. Durch Einsetzen erhält man $I = 1\,bit$. Das *bit* ist die Einheit der Information und entspricht einer 0-oder-1-Entscheidung.

Man beachte, daß in der Definition von I keine Bewertung der Information (etwa nützlich-unnütz) enthalten ist.

(a) Ein Hund hält sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit von $P_n = 1/128$ auf den 128 Fliesen am Boden eines rechteckigen Raumes auf, der doppelt so lang wie breit ist. Wie groß ist die mittlere Information der Feststellung des Aufenthaltsorts? Erklären Sie das Ergebnis.

(b) Erinnert die Definition der Information nicht an die Boltzmann-Entropie? Schreiben Sie in einem Satz, warum größere Entropie mit mehr Information zu identifizieren ist.

(c) Ein Fabrikant möchte 3000 Bälle in den Farben rot, grün und blau produzieren. Wie viele Bälle von jeder Farbe muß er herstellen, wenn er möglichst viele verkaufen will, über die Beliebtheit der verschiedenen Farben bei Kindern aber keine Erhebungen angestellt hat? Versuchen Sie zuerst durch Argumentieren auf ein Ergebnis zu kommen und berechnen Sie dann die Information dieser Verteilung.

(d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten P_n, unter denen die Information (Gleichung (1)) maximal wird. Berücksichtigen Sie dabei etwaige Nebenbedingungen. Vergleichen Sie mit Aufgabe 26 und erklären Sie eingehend die Unterschiede!

(e) Interpretieren Sie das Beispiel vom Fabrikanten anhand dieser Erkenntnis. Was der Fabrikant tut, muß nicht funktionieren: Wenn zum Beispiel eine Umfrage ergibt, daß alle Kinder lieber rote Bälle haben wollen als blaue, er von dieser Umfrage aber nichts weiß, so wird er keinen großen Verkaufserfolg landen.