INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

Thermodynamik und Statistische Mechanik — WS 2004/2005

7. Übungsblatt — Abgabe: keine

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A225, Tel. 391-5183, sven.simon@tu-bs.de

24. **Ideales Gas I: Kanonische Zustandssumme**
Als einfache Anwendung des Zustandsintegrals aus der Vorlesung soll die innere Energie eines Gases aus N unterscheidbaren Teilchen abgeleitet werden. Später werden wir sehen, wo die Grenzen der Annahme der Unterscheidbarkeit von Teilchen liegen.

    (a) Zeigen Sie zunächst, daß für ein (freies) Teilchen im Volumen V (das man sich periodisch ins Unendliche fortgesetzt denken kann) das Kanonische Zustandsintegral

    $$\mathcal{Z}_1 = \frac{V}{\lambda^3}$$

    liefert, wobei λ auch manchmal „thermische Wellenlänge“ genannt wird. Bestimmen Sie inbesondere λ.

    (b) Berechnen Sie nun für N unterscheidbare Teilchen im Volumen V die innere Energie $U(T)$. Vergleichen Sie die thermische Wellenlänge mit der deBroglie-Wellenlänge von Teilchen, die die Energie U/N besitzen.

25. **Totale Differentiale und Zustandsgrößen**
Wir betrachten das Differential der Wärme δQ.

    (a) Zeigen Sie am Beispiel eines idealen Gases, daß

    $$\delta Q = dU + pdV$$

    kein totales Differential darstellt (Stichwort: exakte Differentialgleichungen).

    (b) Zeigen Sie, daß $1/T$ ein integrierender Faktor ist. Damit folgt also (was natürlich schon vorher bekannt war), daß

    $$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV$$

    ein totales Differential und $S(U,V)$ somit eine Zustandsgröße ist. Wie werden in der Mechanik solche Größen genannt? Welche Rolle kommt in dieser Analogie p/T zu?

26. **Boltzmann-Entropie**
Wir betrachten ein System mit den Energieniveaus U_n, $n \in \{1, 2, \ldots\}$. Die Wahrscheinlichkeit, das System in einem bestimmten Zustand U_l anzutreffen, beträgt P_l. Dann ist die *Boltzmann-Entropie* durch

    $$\sigma = -\sum_n P_n \ln P_n$$

    definiert. Finden Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung mit maximaler Entropie. Berücksichtigen Sie die Nebenbedingungen $\sum_n P_n = 1$ und $\sum_n P_n U_n = U$ mit der Methode der Lagrangeschen Parameter.

27. **Berechnung der Entropie aus der kanonischen Zustandssumme**
Leiten Sie aus der Boltzmannschen Entropiedefinition die Gleichung

    $$\sigma = \frac{U}{\tau} + \ln \mathcal{Z} = \frac{\partial}{\partial \tau}(\tau \ln \mathcal{Z})$$

    ab.

Rückseite beachten! ⟶

28. **Legendre-Transformation I**
Ein paar einfache Beispiele:

(a) Bestimmen Sie die Legendre-Transformierte $g(u)$ der Funktion $f(x) = x^2$.

(b) Bestimmen Sie die Legendre-Transformierte $g(x, v)$ der Funktion $f(x, y) = x^2 y^3$.

(c) Bestimmen Sie die zu der Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}\left(\underline{q}, \dot{\underline{q}}\right) = \frac{m}{2}\dot{\underline{q}}^2 + \underline{A}\left(\underline{q}\right) \cdot \dot{\underline{q}}$$

gehörende Hamilton-Funktion $\mathcal{H}\left(\underline{p}, \underline{q}\right)$.