INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

THERMODYNAMIK UND STATISTISCHE MECHANIK — WS 2004/2005

6. Übungsblatt — Abgabe: Donnerstag, 18.11.04 (bis 11.25 Uhr)

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A225, Tel. 391-5183, sven.simon@tu-bs.de

20. **Paramagnetismus und magnetische Kühlung** **(12 Punkte)**
Betrachten Sie die Spinkette aus N Spins mit magnetischem Moment μ bei der Temperatur T.

(a) Zeigen Sie, daß nach Anlegen eines äußeren Magnetfelds B die Spinkette ein magnetisches Gesamtmoment

$$M = N\mu \tanh\left(\frac{\mu B}{kT}\right)$$

besitzt und die Entropie dann durch

$$S = Nk\left\{\ln\left[2\cosh\left(\frac{\mu B}{kT}\right)\right] - \frac{\mu B}{kT}\tanh\left(\frac{\mu B}{kT}\right)\right\}$$

gegeben ist. Gehen Sie dabei von der aus der Vorlesung bekannten Entartungsfunktion

$$g(N,m) = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}+m\right)!\left(\frac{N}{2}-m\right)!}$$

aus. Diskutieren Sie für die Entropie den Grenzfall $B = 0$ und skizzieren Sie den Verlauf von $M(T)$.

(b) Wenn man bei eingeschaltetem Magnetfeld B_a wartet, bis sich das thermodynamische Gleichgewicht mit der Temperatur T_a eingestellt hat und dann das äußere Magnetfeld auf den Wert B_e rasch absenkt und dafür sorgt, daß die Entropie des Systems konstant bleibt (adiabatischer Vorgang), so stellt sich ein neues Gleichgewicht bei niedrigerer Temperatur $T_e < T_a$ ein, die Spinkette wird also abgekühlt. Zeigen Sie, daß dann in 1. Näherung die Beziehung

$$\frac{T_e}{T_a} = \frac{B_e}{B_a}$$

gilt.

(c) Wenn man nun das Magnetfeld wieder auf B_a langsam erhöht, und dabei die Temperatur konstant hält, so kann man sukzessive zu tieferen Temperaturen gelangen. Skizzieren Sie diesen Vorgang in einem S-T-Diagramm. Warum kann man nie $T = 0$ erreichen?

21. **Gleichgewicht bei chemischen Reaktionen: Massenwirkungsgesetz** **(6 Punkte)**
Gegeben sei eine chemische Reaktionsgleichung

$$\sum_{i=1}^{N} \nu_i X_i \rightleftharpoons 0 \quad .$$

Die X_i stehen für die chemischen Namen der einzelnen Verbindungen; die ν_i sind die stöchiometrischen Koeffizienten und werden für die Reaktionsprodukte negativ gerechnet. Ein einfaches Beispiel ist die Knallgasreaktion $2H_2 + O_2 - 2H_2O \rightleftharpoons 0$.

(a) Zeigen Sie allgemein, daß im thermodynamischen Gleichgewicht für die Konzentrationen der einzelnen Molekülsorten $c_i = n_i / \sum_{j=1}^{N} n_j$ das Massenwirkungsgesetz

$$c_1^{\nu_1} \cdot c_2^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot c_N^{\nu_N} = 1$$

gilt.

(b) Zeigen Sie weiterhin, daß die chemischen Potentiale der Bedingung

$$\nu_1\mu_1 + \nu_2\mu_2 + \ldots + \nu_N\mu_N = 0$$

genügen.

Rückseite beachten! ⟶

22. **Zustandssumme für N unterscheidbare Teilchen** **(6 Punkte)**
Wie hängt die Zustandssumme eines N-Teilchen-Systems mit der eines Einteilchen-Systems zusammen?

(a) Zeigen Sie am Beispiel des Zwei-Niveausystems, daß die kanonische Zustandssumme für N *unterscheidbare* nicht wechselwirkende Teilchen $\mathcal{Z}_N$ und die Einteilchenzustandssumme $\mathcal{Z}_1$ über

$$\mathcal{Z}_N = \mathcal{Z}_1^N$$

zusammenhängen.

(b) Leiten Sie damit nochmals die Magnetisierung (s. Aufg. 20) für eine Spinkette aus N Spins ab (die sind nämlich als unterscheidbar angesehen worden). Das geht jetzt sehr viel einfacher.

23. **Zustandssumme und Zustandsintegral** **(6 Punkte)**
Betrachten Sie ein freies quantenmechanisches Teilchen im Intervall $[0, a]$. Für den Hamilton-Operator gilt also

$$\mathcal{H} = \frac{\mathcal{P}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \quad ,$$

wobei als Eigenfunktionen nur Funktionen mit den Dirichlet-Randbedingungen $\phi(x = 0) = \phi(x = a) = 0$ zugelassen werden.

(a) Bestimmen Sie die quantenmechanische Zustandssumme

$$\mathcal{Z}_{\mathrm{QM}} = \sum_n \exp\left(-\beta U_n\right)$$

sowie die mittlere Energie U.

(b) Geben Sie die klassische Hamilton-Funktion $H(p, q)$ an, die dieses Problem beschreibt. Berechnen Sie das Zustandsintegral

$$\mathcal{Z}_{\mathrm{klass}} = \int \exp\left(-\beta H(p, q)\right)\, \mathrm{d}p\, \mathrm{d}q$$

und bestimmen Sie daraus wiederum die Energie U.

(c) Zeigen Sie nun explizit: Wenn die quantenmechanischen Größen im Grenzfall hoher Temperaturen mit den entsprechenden klassischen Größen übereinstimmen sollen, muß das klassische Phasenraumvolumen als $d\gamma = h^{-1}\, \mathrm{d}p\, \mathrm{d}q$ normiert werden.