INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

THERMODYNAMIK UND STATISTISCHE MECHANIK — WS 2004/2005

5. Übungsblatt — Abgabe: keine

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A225, Tel. 391-5183, sven.simon@tu-bs.de

---

18. **Die kanonische Verteilung**
Die Zustandssumme der kanonischen Verteilung ist gegeben durch

$$\mathcal{Z} = \sum_n \exp\left(-\beta U_n\right) \quad .$$

(a) Drücken Sie den Mittelwert der Energie $< U >$ und des Quadrates der Energie $< U^2 >$ durch $\mathcal{Z}$ und β aus.

(b) Zeigen Sie, daß für das mittlere Schwankungsquadrat $(\Delta U)^2 =< U^2 > - < U >^2$ die Beziehung

$$(\Delta U)^2 = -\frac{\partial < U >}{\partial \beta} \tag{1}$$

gilt.

(c) In der Vorlesung wurde gezeigt, daß in einem Zweiniveau-System negative Temperaturen auftreten können. Begründen Sie: Wenn die möglichen Energiewerte eines Systems *unbeschränkt* sind, muß stets $\beta > 0$ gelten.

(d) Nehmen Sie nun an, daß die Energieniveaus so nahe beieinander liegen, daß die Summation in der Zustandssumme durch eine Integration über die Termdichte $\Omega(\epsilon)$ ersetzt werden kann. Für $\Omega(\epsilon) = \epsilon^{aN}$ (a von der Größenordnung 1) berechne man $< U >$ sowie $(\Delta U)^2$ direkt und mittels Gl. (1).

19. **Klassischer und quantenmechanischer Oszillator**
Wir betrachten ein System, das aus N quantenmechanischen harmonischen Oszillatoren mit gleicher Frequenz ω besteht.

(a) Bestimmen Sie die Zustandssumme $\mathcal{Z}_N$ dieses Systems.

(b) Zeigen Sie, daß die innere Energie U durch

$$U = N\hbar\omega \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1}\right]$$

gegeben ist. Untersuchen Sie das Verhalten von U in den Grenzfällen $T \to 0$ und $T \to \infty$.

(c) Berechnen Sie aus

$$< U_n >= \frac{1}{\mathcal{Z}_1} \sum_{n=0}^{\infty} U_n \exp(-\beta U_n)$$

die mittlere Energie *eines einzelnen* harmonischen Oszillators. Nutzen Sie das Resultat für eine Interpretation des Ergebnisses von Teilaufgabe (b).

(d) Betrachten Sie nun ein System aus N unterscheidbaren *klassischen* harmonischen Oszillatoren gleicher Frequenz ω. Für die Hamilton-Funktion gilt:

$$H(p_1, \ldots, p_N, q_1, \ldots, q_N) = \sum_{\nu=1}^{N} \left(\frac{p_\nu^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q_\nu^2\right) \quad .$$

   i. Berechnen Sie das klassische Zustandsintegral

   $$\mathcal{Z}_{\text{klass}} = \int \exp\left(-\beta H\right) \, \mathrm{d}^N p \, \mathrm{d}^N q$$

   sowie die Innere Energie U des Systems.

   ii. Zeigen Sie explizit: Wenn die quantenmechanischen Größen im Grenzfall hoher Temperaturen mit den entsprechenden klassischen Größen übereinstimmen sollen, muß das klassische Phasenraumvolumen als $d\gamma = h^{-N} \, \mathrm{d}p \, \mathrm{d}q$ normiert werden.

   iii. Berechnen Sie für *einen einzelnen* klassischen Oszillator den Mittelwert und die Varianz des Impulses als Funktion der Temperatur.