INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. T. Bagdonat

THERMODYNAMIK UND STATISTIK — WS 1999/2000

14. Übungsblatt — Abgabe: Donnerstag, 10.2.2000, bis 11^{25} Uhr

Sprechstunde: T. Bagdonat, A317, Dienstag ab 14^{00} Uhr, Tel.: 391-5187
Ein Link zu dieser Vorlesung: `http://www.tu-bs.de/institute/theophys/edu.html`

38. **Photonengas im Schwerefeld.**

    (a) Es soll eine barometrische Höhenformel für Photonen in einem Gravitationsfeld abgeleitet werden. Betrachten Sie ein Höhenelement dz und setzen Sie die auftretenden Kräfte gleich (non der z-Abhängigkeit von g sehe man zunächst einmal ab). Daraus erhält man eine Gleichung für den Druck. Bestimmen Sie daraus die höhenabhängige Energiedichteverteilung.

    (b) Da im Photonengas $u \propto T^4$ gilt ergibt sich aus (a) offenbar ein Temperaturgefälle. Das Gesamtsystem muß natürlich im thermodynamischen Gleichgewicht sein. Dementsprechend muß obiges Ergebnis auch aus der Forderung nach der Maximierung der Entropie im Gleichgewicht ableitbar sein.

    Betrachten Sie dazu wieder zwei Schichten bei z und $z + \Delta z$. Um relativistischen Effekten aus dem Weg zu gehen, stelle man sich den Einfluß der Gravitation auf die Photonen so vor, daß die Energie $E = 2m_e c^2$ des Strahlungsfelds in ein Elektron-Positron-Paar „zerstrahlt“, die aufgrund der Gravitation nach unten fallen, und dann wieder zu einem Photon rekombinieren. Im Gleichgewicht muß dann die Entropieänderung $\Delta S(z) = \Delta E(z)/kT(z) = \Delta E(z)\beta(z)$ bei diesem Prozeß Null sein. Zeigen Sie, daß daraus die Bedingung

    $$c^2\beta(z + \Delta z) = (c^2 + g\Delta z)\beta(z)$$

    folgt. Entwickeln Sie die Gleichgewichtsbedingung bis zur ersten Ordnung in Δz um eine Differentialgleichung für die Temperaturverteilung und damit die Energiedichte wie unter (a) zu bekommen.

    (c) Nun sind die beiden Ergebnisse von (a) und (b) leider verschieden. Man kann aber das Ergebnis aus (a) verbessern, wenn man in der Ausgangsgleichung den allgemein relativistischen Gangunterschied zweier Uhren berücksichtigt. Für ein z-abhängiges g geht nämlich in niedrigster Ordnung eine Uhr bei $z + \Delta z$ um den Faktor $(1 + g\Delta z/c^2)$ schneller, als eine Uhr bei z. Zeigen Sie, daß man damit das Ergebnis aus (b) reproduzieren kann.

39. **Satz von Liouville I.** Man überprüfe den Satz von Liouville für den Fall eines elastischen Stoßes zweier Massenpunkte, die sich auf einer Geraden bewegen, indem man die Konstanz eines Phasenvolumenelements $d\Omega$ zeigt.

40. **Satz von Liouville II.** Ein Teilchen bewegt sich zwischen zwei elastisch reflektierenden Wänden bei $x = 0$ und $x = l$ hin und her.

    (a) Skizzieren Sie die Bahnkurve im Phasenrau und berechnen Sie das Phasenraumvolumen Ω, daß Energienwerten kleiner als E entspricht.

(b) Die Wand bei $x = l$ werde nun mit einer Geschwindigkeit $u \ll v$ (v sei die Geschwindigkeit des Teilchens) in x-Richtung bewegt. Zeigen Sie, daß dabei das Phasenraumvolumen Ω konstant bleibt. Die Bedingung $u \ll v$ sorgt dafür, daß der Vorgang adiabatisch abläuft – deshalb spricht man in diesem Fall auch von adiabatischer Invarianz. Beschreiben Sie qualitativ, was passiert, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist.