INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. T. Bagdonat

THERMODYNAMIK UND STATISTIK — WS 1999/2000

2. Übungsblatt — Abgabe: Donnerstag, 4.11.99, bis 11.25 Uhr

Sprechstunde: T. Bagdonat, A317, Dienstag ab 14^{00} Uhr, Tel:: 391-5187

3. **Thermisches Gleichgewicht**. Bestimmen Sie Lage und Breite δ des Maximums des Produkts der Entartungsfunktionen $g_1(N_1, n_1)$ und $g_2(N_2, n_2)$ für zwei Systeme aus N_1 bzw. N_2 unterscheidbaren, harmonischen Oszillatoren, wobei n_1 und n_2 analog zu Aufgabe 2 das Maß für die Gesamtenergie des Systems seien (in Einheiten von $\hbar\omega$). Diese Rechnung ist etwas länger. Man führe Sie in folgenden Einzelschritten durch:

   (a) Zeigen Sie: Die Entartungsfunktion für N unterscheidbare Oszillatoren mit Gesamtenergie n kann für $1 \ll n, N$ genähert werden als
   $$g(N,n) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(N+n)^{N+n}}{N^N \cdot n^n}$$
   .

   (b) Bestimmen Sie eine Bedingung für n_1 und n_2, unter der das Produkt $g_1(N_1, n_1) \cdot g_2(N_2, n_2)$ mit der Nebenbedingung $n_1 + n_2 = n$ extremal wird (wahrscheinlichster Zustand, thermisches Gleichgewicht).

   (c) Setzen Sie nun in $\ln(g_1 \cdot g_2)$ für $n_1 = \hat{n}_1 + \delta$ und $n_2 = \hat{n}_2 - \delta$, wobei $\hat{n}_{1,2}$ die Gleichgewichtsgrößen seien, die die Bedingung aus (b) erfüllen. Entwickeln Sie die Logarithmen bis zur 2. Ordnung in δ und vernachlässigen Sie alle Terme dritter und höherer Ordnung von δ.

   (d) Mit dem Ergebnis aus (c) erhält man eine Näherung von $g_1 g_2$ in Form einer Gaußverteilung als Funktion von δ. Daraus kann man nun die relative Breite der Verteilung δ/n bestimmen. Tun Sie dies und diskutieren Sie das Ergebnis hinsichtlich des Verhaltens für sehr große n.

4. **Boltzmann-Verteilung**. Ein Kristall mit N Gitterplätzen hat n_A Fehlstellen mit der Aktivierungsenergie ϵ_A und n_B Fehlstellen mit ϵ_B.

   (a) Bestimmen Sie den Entartungsfaktor $g(N, n_A, n_B)$ für die Anordnung der Fehlstellen.

   (b) Bestimmen Sie das Maximum der Entropie σ unter der Nebenbedingung, daß E konstant ist. Wie ist das Verhältnis von n_A zu n_B?

   (c) Berechnen Sie die Fehlstellendichten n_A/N und n_B/N als Funktion der Temperatur τ.

   Hinweise: Es soll gelten: $1 \ll n_A, n_B \ll N$. Verwenden Sie dementsprechend geeignete Näherungen.

5. **Ein Teilchen $\leftrightarrow$ N Teilchen.**

(a) Bestimmen Sie die Zahl der Zustände $g(E,1)$ mit der Energie $E_n < E$ für ein Teilchen in einem Würfel der Kantenlänge L. Dazu stelle man sich die durch n_x, n_y, n_z charakterisierten scharfen Quantenzustände im n-Raum homogen verschmiert vor und berechne die im entsprechenden Volumen enthaltene Menge an Zuständen.

(b) Berechnen Sie g(E,N) für N Teilchen. Das Volumen einer n-dimensionalen Kugel mit Radius R ist $V_{S_n} = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} R^n$.

(c) Zeigen Sie nun, daß man das Ergebnis aus (b) auch näherungsweise aus

$$g(E,N) = \left(g\left(\frac{E}{N}, 1\right)\right)^N$$

erhält (bis auf einen konstanten Faktor). Benutzen Sie dabei für das Ergebnis aus (b) die Stirlingsche Formel als Näherung.

(d) Bestimmen Sie die Temperatur τ aus diesem Ergebnis. Obwohl das in der Vorlesung noch abgeleitet werden wird, können Sie jetzt schon den Zusammenhang zwischen τ und der thermodynamischen Temperatur T angeben?