Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Ing. Ch. Jurecka

THERMODYNAMIK UND STATISTISCHE MECHANIK WS 1998/99

16. Übungsblatt Abgabe: Dienstag, 9. 2. 99, bis 11.25 Uhr

43. **Nullpunktsenergie des Vakuums**

In der Vorlesung wurde die Nullpunktsenergie des Photonengases vernachlässigt. Daß diese Nullpunktsenergie aber sehr wohl observabel ist, soll hier gezeigt werden.

Betrachten Sie dazu einen leeren (würfelförmigen) Kasten mit Seitenlängen L.

(a) Berechnen Sie die Nullpunktsenergie W_L des Kastens, indem Sie über alle $\mathbf{k}$ Zustände summieren. Beachten Sie hierbei, daß es jeweils zwei Polarisationszustände gibt. Mit $L \to \infty$ liegen die einzelnen $\mathbf{k}$ Vektoren dicht, so daß Sie von der Summation zur Integration übergehen können.

Nun wird der Kasten geteilt, indem an Position R eine leitende Platte eingebracht wird.

(b) Berechnen Sie wie oben die Nullpunktsenergie W_{L-R} des Teils mit Länge $L-R$.

(c) Berechnen Sie außerdem die Nullpunktsenergie W_R des Teiles mit Kantenlänge R. Hierbei ist zu beachten, daß R endlich bleiben soll, also die Summation nicht (ohne weiteres) durch eine Integration ausgedrückt werden kann.

(d) Berechnen Sie die Differenz $\Delta W = W_L - W_{L-R} - W_R$. Nach geeigneter Umformung sollten Sie

$$\Delta W = \frac{2\pi^2 \hbar L^2}{R^3} \int_0^\infty dx \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{x+n^2} - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sqrt{x+\omega^2} \right) \tag{1}$$

erhalten.

Diese Differenz zweier divergierender Ausdrücke läßt sich auswerten und man erhält bemerkenswerter Weise ein nicht divergierendes Ergebnis:

$$\Delta W = \frac{\hbar c \pi^2 L^2}{720 R^3}. \tag{2}$$

(e) Berechnen Sie die Kraft auf die leitende Platte und vergleichen Sie die Ortsabhängigkeit mit der der Van-der-Waals Kraft.

Eine sich im Vakuum befindende leitende Platte erfährt eine Kraft[1], die nur vom Abstand und von den universellen Konstanten $\hbar$ und c abhängt. Sie hängt nicht von der Elementarladung e ab, die ein Maß für die Kopplung des elektrischen Feldes an Materie ist. Als streng quantenelektrodynamischer Effekt verschwindet die Kraft natürlich mit $\hbar \to 0$. Zum Abschluß sei erwähnt, daß diese Kraft auch schon experimentell beobachtet wurde.

[1] Dieses Ergebnis wird manchmal Casimir Effekt genannt.

44. **Einstein Phononen**

In Festkörpern mit mehr als einem Atom pro Gitterpunkt treten neben den in der Vorlesung behandelten akustischen Phononen, die mit der Debye Theorie näheungsweise beschrieben werden, noch optische Phononen auf. Die einfachste Beschreibung der optischen Phononen geht auf Einstein zurück und geht von einer Phononenzustandsdichte $Z(\omega) = \delta(\omega - \omega_E)$ aus (ω_E ist eine konstante Frequenz).

(a) Berechnen Sie die mittlere Energie der Phononen.

(b) Berechnen Sie die spezifische Wärme. Zeigen Sie, daß sich die Phononen bei hohen Temperaturen gemäß der Regel von Dulong und Petit verhalten.

45. **Pauli-Paramagnetismus**

In einem äußeren Magnetfeld sind die Einteilchenenergien eines nicht wechselwirkenden Fermigases[2] $\epsilon_\sigma(p)$ für die beiden Spinrichtungen $\sigma = \pm 1$ (parallel oder antiparallel zum Magnetfeld) unterschiedlich:

$$\epsilon_\sigma(p) = \frac{p^2}{2m} - \sigma\mu_B B. \tag{3}$$

(μ_B ist das Bohrsche Magneton.) Für beide Spineinstellungen ergeben sich damit unterschiedliche Besetzungszahlen $< n_\sigma(p) >$ bei gleichem chemischen Potential μ. Magnetisierung und Suszeptibilität sind definiert durch

$$M = \mu_B(< N_+ > - < N_- >) \qquad \text{mit} \qquad N_\sigma = \sum_p n_\sigma(p) \tag{4}$$

und

$$\chi = \chi(T, B) = \left.\frac{\partial M}{\partial B}\right|_{T,N}. \tag{5}$$

(a) Zeigen Sie $\chi(T,0) = N\mu_B^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon Z'(\epsilon) n(\epsilon)$, wobei $Z(\epsilon)$ die Zustandsdichte, $n(\epsilon)$ die Fermiverteilung zum chemischen Potential $\mu(T)$ ist.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Sommerfeldentwicklung $\mu(T) = \epsilon_F - \frac{\pi^2 (k_B T)^2}{12\epsilon_F^2}$ für ein Elektronengas mit $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$ und Fermienergie ϵ_F.

(c) Entwickeln Sie mit der Sommerfeld'schen Methode $\chi(T,0)$ bis zur Ordnung T^2. Die Gesamtteilchenzahl ist natürlich vorgegeben, sodaß die in (b) berechnete Temperaturabhängigkeit von μ zu berücksichtigen ist.

[2] Die in der Vorlesung behandelten Ableitungen der Einteilchenenergien sind hier wegen der fehlenden Wechselwirkung Null.