INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Ing. Ch. Jurecka

THERMODYNAMIK UND STATISTISCHE MECHANIK — WS 1998/99

15. Übungsblatt — Abgabe: Dienstag, 2. 2. 99, bis 11.25 Uhr

40. **Fermionen**

Die Entropie eines Systems sei gegeben durch

$$S = -k \sum \{ < n_s(\mathbf{p}) > \ln < n_s(\mathbf{p}) > + (1 - < n_s(\mathbf{p}) >) \ln (1 - < n_s(\mathbf{p}) >) \}. \quad (1)$$

Finden Sie Verteilung $< n_s(\mathbf{p}) >$ bei der die Entropie unter den Nebenbedingungen $\sum < n_s(\mathbf{p}) >= N$ und $\sum \epsilon_s(\mathbf{p}) < n_s(\mathbf{p}) >= E$ maximal wird.

41. **Thermodynamische Herleitung des Stefan-Boltzmann Gesetzes**

Neben der in der Vorlesung gezeigten statistischen Herleitung des Stefan-Boltzmann Gesetzes gibt es noch eine rein thermodynamische. Hierzu wird zunächst der Zusammenhang $3PV = E$ klassisch hergeleitet.

(a) Betrachten Sie den (elastischen) Stoß eines Photons an einer Wand. Berechnen Sie den Impulsübertrag pro Zeitintervall in Abhängigkeit der Einfallswinkel φ und ϑ.

(b) Berechnen Sie außerdem die Zahl der pro Zeitintervall mit der Wand stoßenden Photonen. Auch dieses Ergebnis sollte eine Funktion von φ und ϑ sein.

(c) Mitteln Sie nun den Gesamtimpulsübertrag über den Raumwinkel. Sie sollten $3PV = E$ gezeigt haben.

(d) Zeigen Sie, daß $(\frac{\partial E}{\partial V})_T = T(\frac{\partial P}{\partial T})_V - P$ gilt.

(e) Nehmen Sie an[1], daß $E = Vf(T)$. Hiermit und mit den Ergebnissen der vorigen Punkte sollten Sie nun das Stefan-Boltzmann Gesetz bis auf eine Konstante erhalten.

42. **Photonengas im Schwerefeld**

(a) Barometrische Höhenformel für Photonen

Zunächst soll so etwas wie eine barometrische Höhenformel für ein Photonengas hergeleitet werden.

i. Betrachten Sie ein Höhenelement dz. Setzen Sie die auftretenden Kräfte gleich. Hieraus erhalten Sie die gesuchte Gleichung für den Druck.

ii. Mit Hilfe der Zustandsgleichung aus Aufgabe 40 bekommen Sie eine Beziehung für die Energiedichte ϵ in Abhängigkeit von der Höhe.

[1] Da es sich um ein System freier Teilchen handelt, können intensive Zustandsgrößen, wie die Energiedichte nur von der Temperatur abhängen.

(b) Gleichgewicht?

Nun gilt aber $E \propto T^4$. Also findet man mit dem obigen Ergebnis ein Temperaturgefälle mit der Höhe. Das Gesamtsystem muß natürlich im thermodynamischen Gleichgewicht sein. Dementsprechend müßte man auf das gleiche Ergebnis wie oben kommen, wenn man die Gleichgewichtsbedingung aus der Forderung der Maximierung der Entropie herleitet.

i. Betrachten Sie wieder zwei Höhenschichten, eine an z, die andere bei $z + \Delta z$. Um relativistischen Effekten aus dem Weg zu gehen, betrachten wir nicht Photonen, die von der oberen in die untere Höhenschicht gelangen, sondern lassen die Energie $E = 2m_e c^2$ des Strahlungsfeldes in ein ruhendes Elektron-Positron-Paar "zerstrahlen". Dieses Paar fällt dann unter dem Einfluß der Schwerkraft in die untere Höhenschicht, wo es wieder zu Photonen rekombiniert. Im Gleichgewicht sollte die Entropieänderung dieses Prozesses, gegeben durch $\Delta S(z) = \beta(z)\Delta E(z)$, Null sein. Zeigen Sie, daß dieses Vorgehen zur Gleichgewichtsbedingung

$$c^2\beta(z + \Delta z) = (c^2 + g\Delta z)\beta(z) \tag{2}$$

führt.

ii. Entwickeln Sie die Gleichgewichtsbedingung bis zur ersten Ordnung in Δz um eine Differentialgleichung für die Temperaturverteilung zu bekommen. Wie Sie sehen, ist, unter Berücksichtigung der Gravitation, der Gleichgewichtszustand kein Zustand mit konstanter Temperatur.

iii. Setzen Sie in das Ergebnis das Stefan-Boltzmann-Gesetz ein und vergleichen Sie mit der vorhin erhaltenen Höhenformel.

(c) Paradoxon

Wir sind nun also in der unangenehmen Lage, mit zwei plausiblen Ansätzen unterschiedliche Ergebnisse erhalten zu haben. Wie läßt sich das Paradoxon aufklären? Die Herleitung über die Entropie ist die allgemeinere, weil sie nur von einer Gleichgewichtsbedingung ausging. Die Herleitung der Höhenformel läßt sich allderdings verbessern:

Berücksichtigen Sie hierzu den allgemein relativistischen Gangunterschied[2] zweier Uhren als Funktion der Höhe Δz im Gravitationsfeld: Die Uhr bei $z + \Delta z$ geht um den Faktor $(1 + g\Delta z/c^2)$ schneller, als die bei der Höhe z.

i. Stellen Sie die Gleichgewichtsbedingung unter Berücksichtigung des Gravitationseffektes auf.

ii. Zeigen Sie, daß dann die korrekte Höhenabhängigkeit der Energiedichte folgt.

[2] In einer Entwicklung nach Potenzen $\frac{1}{c}$ ist der Term $g\Delta z/c^2$ bis auf den Vorfaktor schon aus Dimensionsgründen die niedrigste Ordnung, wenn nur g und c als dimensionsbehaftete Konstanten gegeben sind.