INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Ing. Ch. Jurecka

THERMODYNAMIK UND STATISTISCHE MECHANIK — WS 1998/99

6. Übungsblatt — Abgabe: Dienstag, 24. 11. 98, bis 11.25 Uhr

15. **Entropie und Information**

Wir betrachten eine Reihe von Ereignissen E_n $(n = 1, 2, \ldots, N)$, die mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten p_n mit

$$\sum_n p_n = 1 \tag{1}$$

eintreten können. Wir ordnen nun der Feststellung eines Ereignisses E_n einen Informationswert I_n zu, bei häufiger Wiederholung von solchen Feststellungen an der gleichen Reihe von Ereignissen erhält man dann einen mittleren Informationsgehalt, festgelegt als[1]

$$I = -\sum_n p_n \log_2 \mathrm{p_n}. \tag{2}$$

Diese Definition ist so gewählt, daß sie die mittlere Anzahl von einfachen Alternativfragen (Ja oder Nein, 0 oder 1) angibt, die zur vollständigen Charakterisierung eines Ereignisses der Reihe nach gestellt und beantwortet werden müssen.

Beispiele:

(a) $N = 1$. Ein Ereignis tritt mit Sicherheit ein, $p_n = 1$. In diesem Fall ist $I = 0$. Man gewinnt keine Information, da der Eintritt des Ereignisses von vornherein feststeht.

(b) $N = 2$. $p_1 = p_2 = 1/2$. Beide Ereignisse treten mit der gleichen Wahrscheinlichkeit ein. Durch Einsetzen erhält man[2] $I = 1\mathrm{bit}$.

Aufgaben:

(a) Ein Hund hält mit sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit von $p_n = 1/128$ auf den 128 Fliesen am Boden eines rechteckigen Raumes, der doppelt so lang wie breit ist, auf. Wie groß ist die mittlere Information der Feststellung des Aufenthaltsorts[3]?

(b) Erinnert die Definition der Information nicht an die Entropie? Schreiben Sie in einem Satz, warum größere Entropie mit mehr Information zu identifizieren ist.

(c) Ein Fabrikant möchte 3000 Bälle in den Farben rot, grün und blau produzieren. Wieviele Bälle von jeder Farbe muß er herstellen, wenn er möglichst viele verkaufen will, über die Beliebtheit der verschiedenen Farben bei Kindern aber keine Erhebungen angestellt hat. Versuchen Sie zuerst durch Argumentieren auf ein Ergebnis zu kommen und berechnen Sie dann die Information dieser Verteilung.

[1] $\log_2$ ist der Logarithmus zur Basis 2.

[2] bit ist die Einheit der Information und entspricht einer 0 oder 1 Entscheidung.

[3] Man sieht, daß in der Definition von I keine Bewertung der Information (etwa nützlich - unnützt) enthalten ist.

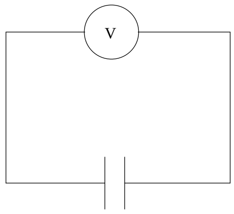

Abbildung 1: Thermodynamisches System in Aufgabe 17(b).

(d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_n, unter denen die Information (Gleichung 2) maximal wird. Berücksichtigen Sie dabei etwaige Nebenbedingungen.

(e) Formulieren Sie die vorige Aufgabe in der Sprache der Thermodynamik (Entropie, Ensembles,...). Vergleichen Sie mit Aufgabe (12).

(f) Interpretieren Sie das Beispiel vom Fabrikanten anhand dieser Erkenntnis. Was der Fabrikant tut, muß nicht funktionieren: wenn zum Beispiel eine Umfrage ergibt, daß alle Kinder lieber rote Bälle wollen, als blaue, er von der Umfrage aber nichts weiß, so wird er keinen großen Verkaufserfolg landen. Die Rechtfertigung seiner Handlungsweise geschieht also wenn, dann nachträglich. Vergleichen Sie die Situation des Fabrikanten mit der eines Physikers, der Gleichverteilung im mikrokanonischen Ensemble annimmt.

16. **Volumenausgleich**

Wir betrachten den Volumenausgleich zwischen zwei durch einen beweglichen Stempel gekoppelten Systemen in Analogie zum Energieaustausch. Stellen Sie das totale Differential der verallgemeinerten freien Enthalpie auf und zeigen Sie insbesondere, daß die Gleichgewichtsbedingung $\delta S = 0$ unter der Nebenbedingung $V = v_1 + v_2 = const.$ bedeutet, daß die Drucke P_1 und P_2 in beiden Systemen gleich groß sind.

17. **Thermische Fluktuationen**

(a) Berechnen Sie die mittleren quadratischen Fluktuationen des Volumens eines Systems bei konstantem Druck. Berechnen Sie einen Zahlenwert für 1 l Wasser bei $T = 293.15\text{K}$. $\frac{\partial V}{\partial p}$ ist aus dem Experiment bekannt, für Wasser erhält man $-\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p} = 5 \cdot 10^{-10}\text{Pa}^{-1}$.

(b) Folgendes thermodynamische System werde betrachtet: An einem Kondensator liege eine konstante Spannung (siehe Abb.1). Berechnen Sie die Ladungsfluktuationen am Kondensator.

(c) Geben Sie im großkanonischen Ensemble die mittlere Energie und die mittlere Teilchenzahl an. Zeigen Sie dann durch direktes Ausrechnen, daß gilt:

$$< (\Delta E + \mu \Delta N)^2 >= kT^2 \frac{\partial(< E > + \mu < N >)}{\partial T}. \tag{3}$$

Läßt sich die rechte Seite dieser Gleichung nicht durch die Entropie und die Temperatur allein ausdrücken?