INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Ing. Ch. Jurecka

THERMODYNAMIK UND STATISTISCHE MECHANIK WS 1998/99

5. Übungsblatt Abgabe: Dienstag, 17. 11. 98, bis 11.25 Uhr

---

12. **Entropie**

Die Entropie ist definiert als

$$S = -k \sum_n \rho_n \ln \rho_n . \tag{1}$$

Finden Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung mit maximaler Entropie. Berücksichtigen Sie die Nebenbedingungen $\sum_n \rho_n = 1$ und $\sum_n \rho_n E_n = E$ mit der Methode der Lagrange'schen Parameter.

13. **Die Maxwellverteilung aus der mikrokanonischen Gesamtheit**

Ausgehend von einer Verteilung im Gesamtphasenraum Γ, kommt man zur Verteilung für ein Teilchen mittels Integration über alle Orte und Impulse, außer denen dieses Teilchens:

$$\rho(\vec{r},\vec{p}) = \int \rho(\vec{p},\vec{p}_2,\ldots,\vec{p}_N,\vec{r},\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_N) d^{6(N-1)}(p_2,\ldots,r_{3N}) \tag{2}$$

Anhand dieser Beziehung kann nun die Maxwellverteilung, ausgehend von der mikrokanonischen Verteilung mit infinitesimalem Energieintervall Δ, also $\rho \propto \delta(\sum p_i^2/2m - E)$, hergeleitet werden.

(a) Zeigen Sie, daß $\rho(\vec{p})$ in die Form $\rho(\vec{p}) = \sqrt{(2m)^{-3}} O_{3(N-1)}(R')/O_{3N}(R)$ gebracht werden kann, wobei $O_N(R)$ die Oberfläche einer N-dimensionalen Kugel mit Radius R ist. Wie hängen R und R' mit E, $\vec{p}$ und m zusammen?

(b) Vereinfachen Sie den obigen Ausdruck weiter, indem sie $O_N(R) = \frac{N}{R} V_N(R)$ verwenden ($V_N(R)$ ist das Volumen der N-dimensionalen Kugel mit Radius R, siehe 3.Übungsblatt).

(c) Die Gesamtenergie E läßt sich als $E = N\epsilon$, mit einer zunächst willkürlichen Konstanten ϵ darstellen. Führen Sie den Grenzübergang $N \to \infty$ durch[1] und wählen sie anschließend die Konstante ϵ (mittlere Energie!!) geeignet.

14. **Auf die Schnelle: Ultrarelativistisches Gas**

Für masselose, relativistische Teilchen ist der Zusammenhang zwischen Energie und Impuls durch $E(p) = c|\vec{p}|$ gegeben.

(a) Berechnen Sie die klassische Zustandssumme!

(b) Aus der Zustandssumme ergeben sich Energie E und Druck P. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem nichtrelativistischen Fall.

(c) Berechnen Sie auch die Entropie S.

---

[1] Hierbei könnten $(1 + x/N)^N \to e^x$ und $(3N/2)!/(3(N-1)/2)! \approx (3N/2)^{3/2}$ nützlich sein.