INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Ing. Ch. Jurecka

THERMODYNAMIK UND STATISTISCHE MECHANIK — WS 1998/99

3. Übungsblatt — Abgabe: Dienstag, 3. 11. 98, bis 11.25 Uhr

7. **Wieviele Zustände haben Teilchen?**

   Ein freies Teilchen der Masse m befinde sich in einem Würfel der Kantenlänge L. Nehmen Sie hierbei periodische Randbedingungen $\psi(0, y, z) = \psi(L, y, z)$, $\psi(x, 0, z) = \psi(x, L, z)$ usw. an.

   (a) Man bestimme die Zahl $g(E, 1)$ der Zustände mit einer Energie $E_n < E$.

   Nun betrachte man N unabhängige Teilchen unter den gleichen Bedingungen. Die Zahl der Zustände von N Teilchen mit $E_n < E$ sei g(E,N). Man kann nun argumentieren[1], daß g(E,N) in vielen Fällen von der Form

   $$g(E, N) = (\bar{g}(\frac{E}{N}))^N \tag{1}$$

   sein wird.

   (b) Bestimmen[2] Sie $g(E, N)$. Bringen Sie das Resultat mit Hilfe der Stirlingformel in Form (**??**) und bestimmen Sie die Funktion $\bar{g}(\frac{E}{N})$.

   (c) Bestimmen Sie $\beta(E) = \frac{\partial \ln g(E)}{\partial E}$.

8. **Mikrokanonische Verteilung**

   Unter der Annahme eines Potenzgesetzes $\Omega(\epsilon) \propto \epsilon^{aN}$ (a von der Größenordnung Eins) bestimme man die Mittelwerte $E =< \epsilon >$ und $(\Delta E)^2 =< \epsilon^2 > -E^2$ für große N bei der mikrokanonischen Verteilung.

9. **Dichteoperatoren für Spin-$\frac{1}{2}$**

   Für die Komponenten S_i $(i = x, y, z)$ des Spinoperators $\vec{S}$ eines quantenmechanischen Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchens gelten $[S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k$ und $\vec{S}^2 = \sum_{i=1}^{3} S_iS_i = 3\hbar^2/4$.

   (a) Zeigen Sie, daß für die S_i gilt: $\mathrm{Sp\ S_i} = 0$.

   (b) Welche Bedingungen muß ein Dichteoperator für ein Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen erfüllen? Beweisen Sie, daß

   $$\rho = \frac{1}{2}(1 + \vec{u}\vec{\sigma}) \tag{2}$$

   mit $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ einem Vektor aus den drei Paulimatrizen und $\vec{u}$ einem reellen Parametervektor, die von Ihnen aufgestellten Bedingungen erfüllt. Nehmen Sie an, daß $\rho \geq 0$[3] für geeignete Werte von $\vec{u}$ erfüllt ist (siehe (e)).

   (c) Zeigen Sie weiter, daß $\vec{u}$ identisch ist mit dem Mittelwert $< \vec{\sigma} >= \mathrm{Sp}\ (\rho\vec{\sigma})$.

---

[1] siehe Vorlesung

[2] Das Volumen einer n-dimensionalen Kugel mit Radius R ist $V_n = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!}R^n$.

[3] d.h. $< \psi|\rho|\psi > \geq 0$ für alle $|\psi > \in \mathcal{H}$.

(d) Der Dichteoperator habe die Eigenwerte ρ_1 und ρ_2. Drücken Sie $Sp\ \rho$ und $Sp\ \rho^2$ durch ρ_1 und ρ_2 aus.

(e) Berechnen Sie $Sp\ \rho^2$ direkt und gewinnen Sie daraus die Eigenwerte ρ_1 und ρ_2.

(f) Begründen Sie, daß $u := |\vec{u}| \leq 1$ sein muß. Welche Eigenschaft von $\vec{u}$ charakterisiert einen reinen Zustand?

(g) Nun betrachte man N Teilchen in einem Neutronenstrahl. Die Hälfte der Teilchen sei in Richtung der positiven x-Achse, die andere Hälfte in Richtung der negativen y-Achse ausgerichtet. Finden Sie den Dichteoperator! Wie sieht der Dichteoperator aus, wenn man über die Spins der zweiten Hälfte gar nichts weiß?