INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Ing. Ch. Jurecka

THERMODYNAMIK UND STATISTISCHE MECHANIK WS 1998/99

2. Übungsblatt Präsenzübung

---

4. **Das Gesetz der großen Zahl**

   Eine Zufallsvariable[1] X unterliege einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $w(x)$ mit $<x>= \int x w(x) dx < \infty$ und $(\Delta x)^2 = \int (x- <x>)^2 w(x) dx < \infty$. Aus N gleichartigen Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots X_N$ bilden wir $Y = \frac{1}{N}(X_1 + X_2 + \ldots + X_N)$ als neue Zufallsvariable. Ausgangspunkt ist die Wahrscheinlichkeit $\prod_{n=1}^{N} w(x_n) dx_n$ dafür, daß X_1 im Intervall $(x_1, x_1 + dx_1)$, X_2 im Intervall $(x_2, x_2 + dx_2)$ usw. liegt.

   (a) Berechnen Sie Mittelwert und Schwankung von Y.

   (b) Interpretiert man X als mögliche Meßwerte, so beschreibt N die Anzahl gleichartiger Messungen. Wie oft muß man messen, um (zufällige) Meßfehler auf ein Zehntel des Fehlers einer Messung zu reduzieren.

   (c) In der Statistischen Physik betrachtet man typischerweise 10^{23} Teilchen; wie groß sind die relativen Schwankungen hier?

5. **Der zentrale Grenzwertsatz**

   Gesucht wird nun die Wahrscheinlichkeitsverteilung $W(y)$ für die in der vorigen Aufgabe definierte Zufallsvariable Y. Man betrachte hierzu die erzeugende Funktion $\Phi(t) =< e^{itY} >= \int e^{ity} W(y) dy$.

   (a) Zeigen Sie, daß $\Phi(t) = [\varphi(\frac{t}{N})]^N$ mit $\varphi(t) =< e^{itX} >$.

   (b) Entwickeln Sie $\ln \Phi$, indem Sie zunächst φ nach $\frac{t}{N}$ und anschließend den Logarithmus entwickeln. Behalten Sie nur Terme $\propto 1$ und $\propto \frac{1}{N}$.

   (c) Die gesuchte Verteilung ist die Fouriertransformierte von $\Phi(t)$. Führen Sie die Rechnung aus.[2] Hängt die Wahrscheinlichkeitsverteilung noch von $w(x)$ ab?

   (d) Berechnen Sie die Schwankung $(\Delta y)^2 = \int (y- <y>)^2 W(y) dy$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Ergebnis aus Aufgabe (4).

6. **Fehlerrechnung, mal grundsätzlich**

   Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit Mittelwert $<x>$ und Schwankung $(\Delta x)^2$, sowie eine differenzierbare Funktion $y(x)$. Zeigen Sie, daß in erster Ordnung in Δx gilt:

$$<y>= y(<x>) \qquad \text{und} \qquad \Delta y = |y'(<x>)| \Delta x.$$

---

[1] Unter einer Zufallsvariable versteht man eine Variable X mit einer dazugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung.

[2] Verwenden Sie hierzu

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3)} = \left(\frac{\pi}{|\alpha_1|}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\alpha_2^2}{4\alpha_1} - \alpha_3\right) \exp\left(-\frac{i}{2} \arg \alpha_1\right).$$

wobei α_1, α_2, α_3 komplexe Zahlen sind und $\Re \alpha_1 > 0$ zu fordern ist.