INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Ing. Ch. Jurecka

THERMODYNAMIK UND STATISTISCHE MECHANIK — WS 1998/99

1. Übungsblatt — Abgabe: Dienstag, 27. 10. 98, bis 11.25 Uhr

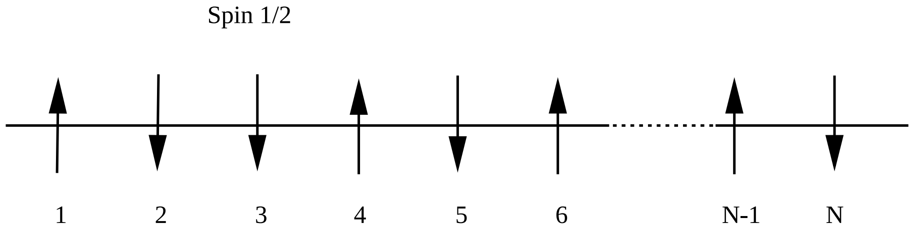
1. **Zur Motivation der statistischen Beschreibung**

   Betrachtet wird die Bewegung eines klassischen Teilchens in einem verdünnten Gas. Die Bahn möge als Gerade zwischen zwei Stößen idealisiert werden, so daß man nur die Orte und Zeiten der Stöße speichern muß. Zur Bestimmung der mittleren Stoßzeit benutze man die Zahlenwerte: Dichte $n = 10^{19} cm^{-3}$, Wirkungsquerschnitt $\sigma = 10^{-16} cm^2$, mittlere Geschwindigkeit $v = 10^5 cms^{-1}$. Zur Speicherung einer reellen Zahl in sog. "double precision" benötigt man auf einem Computer 8 Byte.

   Man berechne den pro Sekunde benötigten Speicherplatz um die Bahn des Teilchens zu tabellieren. Welcher Zahlenwert ergibt sich, wenn man statt eines Teilchens alle Teilchen in einem cm^3 betrachtet?

2. **Noch mehr Motivation: Spin-Modelle**

   Man betrachte als Modellsystem[1] eine lineare Kette (1-dimensionales Gitter) von N Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen (N gerade).



   Das System wird durch einen Hamiltonoperator $\hat{H}(\vec{S}_1, ..., \vec{S}_N)$ beschrieben, wobei die $\vec{S}_i$ die Spinoperatoren am i-ten Platz sind, für deren Komponenten die üblichen Spin-Vertauschungsrelationen gelten.

   (a) Der Einteilchenhilbertraum eines solchen Spins sei $\mathcal{H}_{12}$. Wie sieht der Zustandsraum der Kette aus?

   (b) Welche Dimension hat dieser Zustandsraum?

   (c) Wieviele Elemente hat eine Matrixdarstellung des Hamiltonoperators in einer Basis dieses Hilbertraumes? Wieviele Byte Speicherplatz sind für eine Kette mit $N = 20$ nötig, wenn die Matrixdarstellung reell ist?

---

[1] Eine in der statistischen Mechanik übliche Vorgehensweise ist das Aufstellen von Modellsystemen, die gewisse Facetten der Realität beschreiben sollen. Für Festkörper sind Gittermodelle von grosser Bedeutung. Hierbei werden i.a. jedem Gitterpunkt eine Anzahl an Freiheitsgraden zugeordnet, die meist mit den Freiheitsgraden der umliegenden Gitterplätzen wechselwirken können.

Ist man zum Beispiel an den magnetischen Eigenschaften des Festkörpers interessiert ordnet man z.B. jedem Festkörperatom seinen Gesamtdrehimpuls zu und kommt so zu einem Gittermodell, bei dem an jedem Gitterpunkt ein Drehimpuls zu finden ist. Die Modellierung der Wechselwirkung zwischen den Drehimpulsen auf Grund der Struktur des Festkörpers ist dann ein entscheidender und schwieriger Schritt, der uns hier aber nicht interessieren soll.

Oft ist der Hamiltonoperator von der Form $\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1}$.

(d) Zeigen Sie, daß für diesen Fall gilt $[\hat{H}, \sum_{i=1}^{N} S_{z_i}] = 0$, der Gesamtspin in z-Richtung also eine Erhaltungsgröße darstellt. Damit sind die Eigenzustände von $\hat{H}$ nach $S_z = \sum_{i=1}^{N} S_{z_i}$ klassifizierbar.

(e) Die Matrixdarstellung des Hamiltonoperators bezüglich o.g. Basis hat Blockdiagonalform. Wie groß ist der größte Block für die lineare Kette. Berechnen Sie wiederum den Speicherbedarf für $N = 20$.

(f) Wie sieht die kleinste Blockmatrix aus, wie der dazugehörige Zustand? Wie kann er interpretiert werden?

(g) Sei $P_{S_{z,j}}$ die Wahrscheinlichkeit für eine Zustand mit Gesamtspin $S_{z,j}$. Zeigen Sie, daß gilt: $\sum_j P_{S_{z,j}} = 1$. Nehmen Sie dabei an, daß die Wahrscheinlichkeit für einen einzelnen Spin "up"($\uparrow$) oder "down"($\downarrow$) zu zeigen, gleich $\frac{1}{2}$ ist. [2]

3. **Unterscheidbare und ununterscheidbare Kugeln**

(a) Wir betrachten zunächst "klassische" Kugeln: r Kugeln werden auf N Töpfe verteilt. Jeder Topf faßt beliebig viele Kugeln. Die Kugeln seien unterscheidbar, man kann sie sich beispielsweise numeriert vorstellen. Berechnen Sie die Anzahl der möglichen Anordnungen.

(b) r Kugeln werden auf N Töpfe verteilt. Hierbei soll jeder Topf beliebig viele Kugeln fassen. Allerdings sollen die Kugeln ununterscheidbar sein. Berechnen Sie die Anzahl solcher Anordnungen.

(c) r Kugeln werden auf N Töpfe ($r < N$) verteilt. Jetzt soll allerdings jeder Topf nur eine Kugel aufnehmen können. Die Kugeln seien wieder ununterscheidbar. Berechnen Sie wiederum die Anzahl der verschiedenen Gesamtzustände.

[2] Für nicht wechselwirkende Spins ist diese Bedingung immer erfüllt, bei "eingeschalteter" Wechselwirkung streng nur bei $T = \infty$, wenn jede Wechselwirkung gegenüber der thermischen Bewegung vernachlässigt werden kann.