Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Allgemeine Relativitätstheorie

Skriptum zur Vorlesung

überarbeitet

Wintersemester 2012/2013

Prof. Dr. U. Motschmann

Dr. S. Simon

Dr. Yasuhito Narita

Dipl.-Phys. H. Kriegel

Braunschweig, 2013

Das Skriptum ersetzt nicht die Vorlesung und kein Lehrbuch. Niedergelegt sind erklärender Text nur in Stichpunkten und Formeln im Detail inclusive sehr vieler Zwischenrechnungen. Das Skriptum soll den Studierenden helfen, sich in der Vorlesung auf die Erklärungen zu den Ausgangspunkten, Ableitungen und Schlussfolgerungen zu konzentrieren und Entlastung beim Abschreiben der mitunter detailreichen Gleichungen von der Tafel bringen. Die Studierenden sollten das Skriptum zur Vorlesung vorliegen haben und die Erklärungen nach eigenem Bedarf einfügen.

Uwe Motschmann

Satz: LaTeX2$_\varepsilon$

Wir danken allen, die an der Entstehung und Fehlersuche für dieses Skript mitgewirkt haben, insbesondere Jochen Bandlow, Jörg Duhme, Hendrik Kriegel und Ulf Stolzenberg.

Braunschweig, 12. Februar 2013

U. Motschmann

Inhaltsverzeichnis

I Physikalische Grundlagen der ART **9**

1 Was ist ART ? 9

2 Bezugssysteme 10

3 Äquivalenz-Prinzip 11

II Mathematische Grundlagen **15**

1 Bemerkung zur Historie 15

2 Krummlinige Koordinatensysteme 15

3 Metrischer Fundamentaltensor 18

4 Tensoren im Riemannschen Raum 23

5 Kovariante Ableitung und Parallelverschiebung 30

6 Geodäten 41

7 Geodäten in 2-d Polarkoordinaten 48

8 Kovariante Differentialoperatoren 52

9 Spezielle Koordinatensysteme 61

10 Krümmungstensor 67

11 Bianchi - Identitäten 79

12 Einbettung gekrümmter Räume in flache Räume höherer Dimension 84

III Grundgesetze der Physik im Riemannschen Raum **87**

1 Kovarianzprinzip 87

2 Punktmechanik 89

3 Elektrodynamik 91
4 Hydrodynamik 92
5 Einsteinsche Feldgleichungen 99

IV Schwarzschild-Lösung **107**

1 Kugelsymmetrie in 4 Dimensionen 107
2 Aufstellen der Feldgleichungen 109
3 Lösung der Vakuum - Feldgleichungen 113
4 Planetenbewegung und Periheldrehung 123
5 Lichtablenkung 128
6 Rotverschiebung 130
7 Physik am Schwarzschildradius 134

V Gravitationswellen **139**

1 Linearisierte Theorie 139
2 Ebene Gravitationswellen 143
3 Teilchen im Feld der Gravitationswelle 146
4 Nachweis von Gravitationswellen 149

VI Innere Schwarzschild-Lösung **151**

1 Aufstellen der Feldgleichungen und der Integrabilitätsbedingungen 151
2 Lösung für inkompressible Materie 157
3 Übergangsbedingungen an die äußere Schwarzschild - Lösung 159
4 Massenobergrenze für stabile Sterne 160
5 Zustandsgleichung und Sterntypen 162

VII Gravitationskollaps und schwarze Löcher **167**

1 Kugelsymmetrischer Ansatz in Gauss-Koordinaten 167
2 Inkohärente Materie als Sternenmaterial 170
3 Kollabierender Stern mit räumlich konstanter Dichte 190

VIIIKosmologie **197**

1 Kosmologisches Prinzip 197

2 Robertson-Walker-Metrik 198

3 Feldgleichungen für die Robertson-Walker-Metrik 201

4 Strahlungskosmos 208

5 Friedman - Kosmos 211

6 Kosmologische Rotverschiebung und Hubble - Konstante 217

7 Kritische Massendichte 221

8 Einfluss der kosmologischen Konstanten 222

9 Massenparameter 224

10 Helligkeits-Rotverschiebungs-Beziehung 225

11 Flachheitsproblem 230

Kapitel I

Physikalische Grundlagen der ART

1 Was ist ART ?

- Ausgangspunkt ist SRT, d.h. Gleichberechtigung aller Inertialsysteme
- Grenzen der SRT durch Schwerkraft,
  Schwerkraft führt zur Beschleunigung von Massen und zerstört damit die Inertialsysteme
- Einbeziehung der Schwerkraft (Gravitation) führt auf die ART
- ART auch Einsteinsche Gravitationstheorie genannt
- Namensgebung „ART“ geht auf Einstein zurück, der die ausgezeichnete Rolle der Inertialsysteme beseitigen und eine Theorie finden wollte, die kein Bezugssystem vor einem anderen auszeichnet.

Einsteinsche Gravitationstheorie	Newtonsche Gravitationstheorie
Geometrisierung der Gravitation; Kraft ist in Zeitintervall und räumlichen Abstand eingearbeitet	Kraft oder Potential im Raum

Bemerkung:

Mit dem Begriff der Kraft scheinen alle modernen Theorien ihre Nöte zu haben. In der Quantentheorie sind die „Kräfte“ ebenfalls abgeschafft; sie gehen in Austausch-Wechselwirkungen über. Austausch - WW werden durch Teilchen mit ganzzahligem Spin getragen:

- Elem. Kraft → Photonen (s=0)
- Schwache Kraft → Schwache Eichbosonen (s=1)

- Starke Kraft → Gluonen (s=1)
- Gravitation → Gravitonen (s=2)

Massive Teilchen haben halbzahligen Spin.

2 Bezugssysteme

IS := Inertialsysteme
KS := Beliebige Bezugssysteme (i.a. beschleunigt, krummlinig, etc.)

Newtonsche Gravitationstheorie

- Galilei-kovariant, d.h. Newtonsche Gleichungen haben in allen IS bei Anwendung von Galilei-Transformationen die gleiche Form
- in KS treten zusätzliche Trägheitskräfte auf: Corioliskraft, Zentrifugalkraft
- Raum und Zeit sind nach Newton absolut; „Beweis“ durch Eimerversuch: anfangs ruht das Wasser im absoluten Raum (Oberfläche eben), dann rotiert es relativ dazu (Oberfläche gekrümmt)
- Problem : Warum sind alle IS gleichberechtigt?
  Erwartung eines ausgezeichneten IS, das im absoluten Raum ruht!

Maxwellsche Gleichungen

- nicht Galilei-kovariant
- Lorentz-kovariant
- Raum und Zeit relativiert
- absolute Raum-Zeit (= Minkowski-Raum), die die IS auszeichnet
- Offener Punkt: Auszeichnung der IS bleibt unerklärt; gegenüber was sind IS nicht beschleunigt???
- Unbefriedigender Punkt:
  Raum-Zeit der IS wirkt auf die Bewegung von Körpern, aber diese wirken nicht zurück
- Bemerkung:
  Maxwell beanspruchte die Gültigkeit seiner Gleichungen nur für dasjenige IS, das im Äther (lichttragendes Medium) ruht.

Machsches Prinzip

- Hypothese: träge Masse eines Körpers wird in irgendeiner Weise von allen anderen Massen bestimmt
- Gedankenexperiment:

  Beschleunigte Rakete im leeren Raum, Trägheit wird verspürt, aber gegen was wird beschleunigt? (Eimerversuch analog)

  Nach obiger Hypothese gäbe es im leeren Raum keine Beschleunigung und damit keine Trägheit
- Nach Mach kommt dem Raum keine eigene Bedeutung zu (reine Hilfsgröße)
- Wirklich sind nur die relativen Beziehungen (Abstände und Bewegungen) aller Körper
- Daraus folgt auch: Die anderen vorhandenen Massen bestimmen die IS.

ART

- beantwortet wie die Massen im Kosmos auf den Raum zurückwirken und wie die KS und (lokalen) IS bestimmt werden
- allerdings: Raum wird nicht eliminiert, Struktur und Dynamik des Raumes sind eng mit den vorhandenen Massen verknüpft.

3 Äquivalenz-Prinzip

Vorab: Hier geht es nicht um die Äquivalenz von Masse und Energie ($U = mc^2$)!

Äquivalenz von träger und schwerer Masse

- $m_t \underline{\ddot{x}} = \underline{F}$ (2. Newtonsches Gesetz)
  m_t : träge Masse eines Körpers
  $\underline{F}$: Kraft auf und nahe der Erdoberfläche. :
- $\underline{F} = m_s \underline{g}$ (Schwerkraft)
  m_s : schwere Masse des Körpers
  $\underline{g}$ = const
  $\rightsquigarrow \underline{x}(t) = \frac{1}{2} \frac{m_s}{m_t} \underline{g} t^2$ (freier Fall)
- Galilei: alle Körper fallen gleich schnell!
  $\rightsquigarrow$ $\frac{m_s}{m_t}$ für alle Körper gleich oder
  $\frac{m_s}{m_t} = const \Rightarrow 1$, Proportionalitätskonstante kann 1 gesetzt werden

- analoge Überlegung für Pendelschwingung
- Experimentelle Überprüfungen

Experiment	$\frac{\Delta m}{m}$
Galilei (1564 - 1642)	Augenmaß
Newton (1643 - 1727)	10^{-3}
Eötvös (1848 - 1919)	$5 \cdot 10^{-9}$
Braginski 1972	$3 \cdot 10^{-12}$
$\vdots$	

$\rightarrow m_t = m_s$ heißt mitunter schwaches Äquivalenzprinzip.

Äquivalenz von Gravitationskräften und Trägheitskräften

1. Bezugssystem ruhend auf Erdoberfläche = IS (In guter Näherung)

$$m_t \underline{\ddot{x}} = m_s \underline{g} \tag{I.1}$$

2. Transformation in einen frei fallenden Fahrstuhl = KS' (beschleunigtes Bezugssystem)

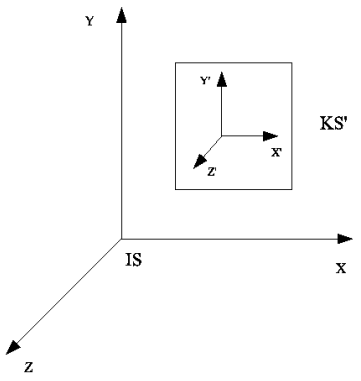


Abbildung I.1: Koordinatensystem

$$\underline{x} = \underline{x}' + \frac{1}{2}\underline{g}t^2 \tag{I.2}$$

$$\rightsquigarrow m_t \underline{\ddot{x}}' + \frac{m_t}{2}\underline{g}2 = m_s \underline{g} \tag{I.3}$$

$$m_t \underline{\ddot{x}}' = (m_s - m_t)\underline{g} \tag{I.4}$$

- da $m_t = m_s$ (Schwaches Äquivalenzprinzip)
  $\ddot{\underline{x}}' = 0$ (Bewegungsgleichung für freies Teilchen)
  $\rightarrow$ in KS' wird keine Schwerkraft verspürt

- Verallgemeinerung des Befundes von Einstein:
  In einem frei fallenden KS laufen alle Vorgänge so ab, als ob kein Gravitationsfeld vorhanden sei.
  D.h. der Befund wird von mechanischen auf alle physikalischen Prozesse zu allen Zeiten an allen Orten ausgedehnt.
  Diese Verallgemeinerung heißt auch Einsteinsches Äquivalenzprinzip.

Einführung des Lokalen IS

- Betrachtung eines die Erde umkreisenden Satellitenlabors (SL) ohne Eigenrotation

- Frage: Handelt es sich um ein IS?
  Bewegung um Erde ist eigentlich beschleunigt.
  Handelt es sich um ein KS?
  Im Innern des SL wirken weder Trägheits- noch Gravitationskräfte.

- SL ist auf jeden Fall ein frei fallendes Bezugssystem: Gravitation wird durch Zentrifugalkraft kompensiert, zumindest im Schwerpunkt und in kleiner Umgebung.

- Vorgänge laufen so ab wie in einem IS und als ob keine Gravitation vorhanden ist.

- Derartiges Bezugssystem heißt lokales IS; es unterscheidet sich von einem IS, da es offensichtlich gegenüber Erde, Sonne, Fixsternhimmel beschleunigt ist.

- Das lokale IS kann soweit ausgedehnt werden wie von der Inhomogenität des Gravitationsfeldes abgesehen werden kann; wird es zu groß betrachtet, wirken Gezeitenkräfte.

Zusammenfassung zu den Koordinatensystemen

- im Gebrauch sind 3 Arten von Koordinatensystemen

1. IS :
   - nicht beschleunigt
   - existieren nur näherungsweise, denn irgendein Punkt im Universum existiert immer, zu dem das IS doch beschleunigt ist, z.B. Labor fest auf Erde ist gegenüber Sonne oder Fixsternhimmel beschleunigt
   - Gravitation kann wirken
2. KS:
   - beliebiges Koordinatensystem

- beschleunigt
- z.B. rotierend
- Gravitation und Trägheitskräfte können wirken

3. Lokales IS:
   - Koordinatensystem, in dem keine Trägheitskräfte wirken und die Gravitation eliminiert ist
   - da sich Gravitation nur lokal eliminieren lässt, heißt das Koordinatensystem Lokales IS
   - SL und frei fallender Fahrstuhl sind Beispiele für Lokales IS.

Physik im Lokalen IS

Im Lokalen IS laufen alle Vorgänge so ab, als sei kein Gravitationsfeld vorhanden. Dieser Befund wird verallgemeinert zum s.g. starken Äquivalenzprinzip:
Im Lokalen IS gelten die Gesetze der SRT !

Physik im KS

- wenn ein Lokales IS verlassen wird, wird die Gravitation i.a. wieder spürbar
- Transformation der im Lokalen IS gültigen und bekannten Gesetze der SRT in ein KS fährt auf relativistische Gesetze mit Gravitation:

$$\begin{array}{ccc} \text{Lokales IS} & \xrightarrow{\text{Koordinatentransformation}} & \text{KS} \\ \text{SRT-Gesetz ohne Gravitation} & & \text{ART-Gesetz mit Gravitation} \end{array}$$

- Koordinatentransformationen sind nichtlinear;
  lineare Koordinatentransformationen sind gerade die Lorentz-Transformationen und diese überführen IS in IS und nicht in KS!
- Repräsentation der Gravitation durch Koordinatentransformationen nennt man Geometrisierung der Gravitation.

Kapitel II

Mathematische Grundlagen

1 Bemerkung zur Historie

Entwicklung der Grundlagen und Begrifflichkeit

1860-1900: Riemann, Ricci, Levi-Civita
$\longrightarrow$ Absoluter Differentialkalkül

1915-1960: Theoretische Physiker
$\longrightarrow$ Tensoranalysis

heute: Mathematiker/Physiker
$\longrightarrow$ Differentialgeometrie

2 Krummlinige Koordinatensysteme

4-dim. Raum

- aufgespannt durch Koordinatenlinien ξ^i; $\xi^i = (\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$
- Spezialfall Minkowski-Raum mit den Koordinatenlinien x^i; $x^i = (x^1, x^2, x^3, x^4) = (x, y, z, ct)$
- Vereinbarung zur Indizierung:
  i,j,k,... = 1,2,3,4
  a,b,c,d,...,h = 1,2,3 oder 1,2 wenn explizit angegeben
  α, β, γ, ... = 1,....,N
- Vereinbarung der Summenkonvention: über doppelt auftretenden Indizes wird summiert.
- Ereignis P: $(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) \overset{\text{kurz}}{\longrightarrow} (\xi^i)$
  { Verallgemeinerung des „Ortes“; es gibt keinen Ortsvektor $\underline{\xi}$ }

Veranschaulichung
ξ^1, ξ^2 in Papierebene projiziert
$\xi^3 = \text{const}$, $\xi^4 = \text{const}$

Beispiele im 3-dim. Raum

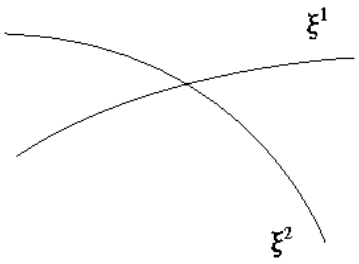


Abbildung II.1: Krummlinige Koordinatenlinien. Die ξ^1-Koordinate ist dadurch ausgezeichnet, dass alle anderen Koordinaten feste Werte haben ($\xi^2 = const, \xi^3 = const, \xi^4 = const$). Für einen anderen Satz der Konstanten entsteht eine andere ξ^1-Koordinate. Analog für die ξ^2-Koordinate etc.

- Euklidischer Raum in kartesischen Koordinaten
  $\xi^a = x^a$
- Zylinderkoordinaten
  $\xi^1 = \rho\ ,\ \xi^2 = \varphi\ ,\ \xi^3 = z$
- Kugelkoordinaten
  $\xi^1 = r\ ,\ \xi^2 = \theta\ ,\ \xi^3 = \varphi$

Verhältnis von krummlinigen Koordinaten und gekrümmtem Raum

- Rückzug auf 2-dimensionale Räume zur Wahrung der Vorstellung
- Unterschied zwischen einem 2-dim. gekrümmten Raum und einem 2-dim. ebenen Raum ist anschaulich klar
- jeder 2-dim. Raum, der sich in eine Ebene abwickeln lässt ist eben oder flach; z.B. Zylindermantel, Kegelmantel
- Kugeloberfläche ist gekrümmt
- Krummlinige Koordinaten und gekrümmter Raum sind zwei verschiedene Dinge: krummlinige Koordinaten sind auch im flachen Raum möglich, z.B. ebene Polarkoordinaten
- Kartesische Koordinaten im gekrümmten Raum sind global nicht möglich (wird später exakt bewiesen)
- Definition der Krümmung des Raumes folgt später durch den Krümmungstensor

Vektoren in Ereignissen

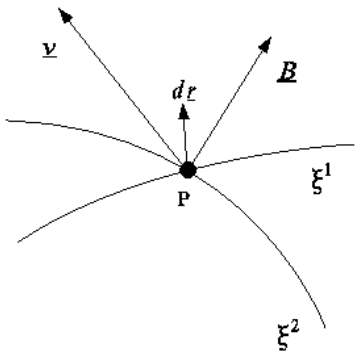


Abbildung II.2: Vektoren

- in einem Ereignis (Punkt des 4-dim. Raumes) können bestimmte physikalische Eigenschaften vorliegen, die je durch einen Vektor zu beschreiben sind
- z.B.
  $\underline{B}$ Magnetfeld in P
  $\underline{v}$ Geschwindigkeit eines Teilchens in P
  $d\underline{r}$ Abstandsvektor zu einem benachbarten Punkt P'

Einführung von Basisvektoren in P

- Basisvektoren sind von Ereignis zu Ereignis verschieden
- wenn eine Basis in P eingeführt ist, kann ein beliebiger Vektor in P mit dieser Basis dargestellt werden
- es gibt verschiedene Möglichkeiten für die Einführung einer Basis
  - Kovariante Basis $\underline{b}_i$

$$\underline{b}_i := \frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi^i} \tag{II.1}$$

    $\underline{b}_i$ schmiegen sich an die Koordinatenlinien an
    $\underline{b}_1 = \left(\frac{d\underline{r}}{d\xi^1}\right)_{\xi^2,\xi^3,\xi^4=const} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi^1}$
  - Kontravariante Basis $\underline{b}^i$

$$\underline{b}^i := \frac{\partial \xi^i}{\partial \underline{r}} \tag{II.2}$$

    die Definition des Kontravarianten Basisvektors $\underline{b}^i$ entspricht der Bildung des Gradienten auf der Fläche $\xi^i = const$; $\underline{b}^i$ steht dann senkrecht auf dieser Fläche
- die $\underline{b}_i, \underline{b}^j$ sind i.a. nicht normiert.
- für orthogonale Koordinaten wird $\underline{b}_i \parallel \underline{b}^i$

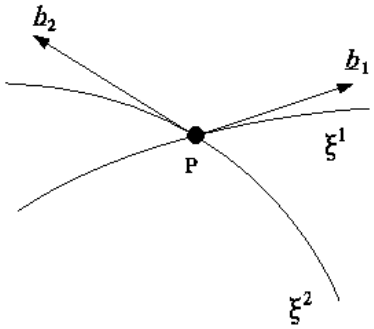


Abbildung II.3: Kovariante Basis

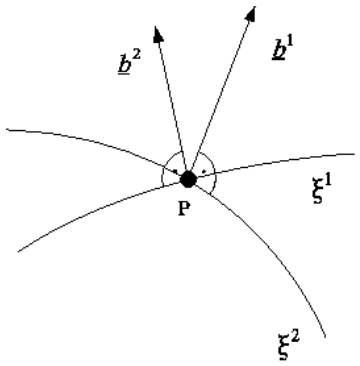


Abbildung II.4: Kontravariante Basis

3 Metrischer Fundamentaltensor

Das Skalarprodukt

$$g_{ij} \;:=\; \underline{b}_i \cdot \underline{b}_j \tag{II.3}$$

heißt metrischer Fundamentaltensor.

- $g_{ij} = g_{ji}$
- $g^{ij} \;:=\; \underline{b}^i \cdot \underline{b}^j$
- $g_i^j \;:=\; \underline{b}_i \cdot \underline{b}^j$
- Anwendung der Kettenregel
  $g_i^j = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \xi^j}{\partial \underline{r}} = \frac{\partial \xi^j}{\partial \xi^i} = \delta_i^j$,
  δ_i^j Kronecker-Symbol,
  d.h. $\underline{b}_i \perp \underline{b}^j$ für $i \neq j$
  klar nach Konstruktionsvorschrift.

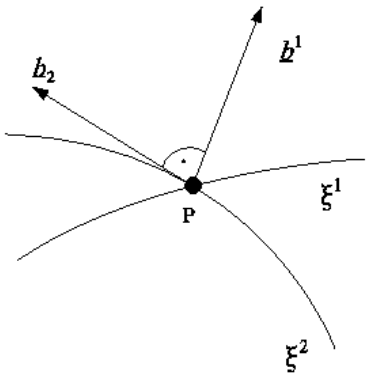


Abbildung II.5: Orthogonalität von $\underline{b}_i$ und $\underline{b}^j$ bei $i \neq j$ nach Konstruktionsvorschrift.

Zerlegung eines beliebigen Vektors $\underline{v}$ in P

- nach der kovarianten Basis; man schreibt mit Summenkonvention

$$\underline{v} = v^i \underline{b}_i \tag{II.4}$$

  und nennt v^i die kontravarianten Komponenten von $\underline{v}$

- nach der kontravarianten Basis; man schreibt

$$\underline{v} = v_j \underline{b}^j \tag{II.5}$$

  und nennt v_j die kovarianten Komponenten von $\underline{v}$

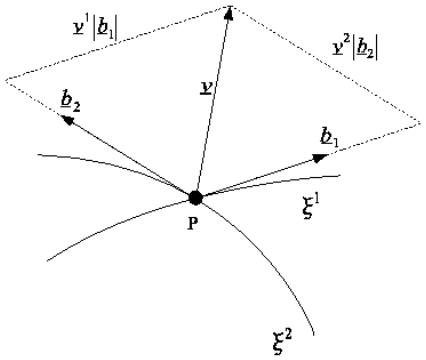


Abbildung II.6: Darstellung von $\underline{v}$ in kovarianter Basis

- für die kontravarianten Komponenten v^i folgt

$$v^i = \underline{v} \cdot \underline{b}^i \tag{II.6}$$

  da $\underline{v} \cdot \underline{b}^i = v^j \underline{b}_j \cdot \underline{b}^i = v^j \delta^i_j = v^i$

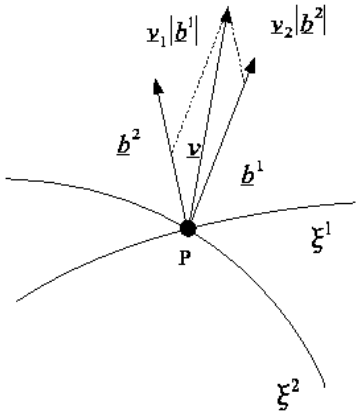


Abbildung II.7: Darstellung von $\underline{v}$ in kontravarianter Basis

- für die kovarianten Komponenten v_i folgt

$$v_i = \underline{v} \cdot \underline{b}_i \tag{II.7}$$

  da $\underline{v} \cdot \underline{b}_i = v_k \underline{b}^k \cdot \underline{b}_i = v_k \delta_i^k = v_i$

- Umrechnung ko- und kontravarianter Komponenten ineinander

$$v^i = \underline{v}\ \underline{b}^i = v_j \underline{b}^j \underline{b}^i = g^{ij} v_j \tag{II.8}$$

  $\hat{=}$ „Indexziehen“

- Umrechnung ko- und kontravarianter Basen ineinander

$$\begin{aligned}
\underline{v} &= (\underline{v}\ \underline{b}^i)\ \underline{b}_i && \text{(II.9)}\\
\text{sei}\quad \underline{v} &= \underline{b}^j && \text{(II.10)}\\
\underline{b}^j &= (\underline{b}^j \underline{b}^i)\ \underline{b}_i = g^{ij} \underline{b}_i && \text{(II.11)}\\
\text{oder} & && \text{(II.12)}\\
\underline{v} &= (\underline{v}\ \underline{b}_i)\ \underline{b}^i && \text{(II.13)}\\
\text{sei}\quad \underline{v} &= \underline{b}_j && \text{(II.14)}\\
\underline{b}_j &= (\underline{b}_j \underline{b}_i)\ \underline{b}^i = g_{ij} \underline{b}^i && \text{(II.15)}\\
& && \text{(II.16)}
\end{aligned}$$

- inverser metrischer Tensor

$$\begin{aligned}
\underline{b}^i &= g^{ij}\ \underline{b}_j && \text{(II.17)}\\
\underline{b}_j &= g_{jk}\ \underline{b}^k && \text{(II.18)}\\
\rightsquigarrow\quad \underline{b}^i &= g^{ij}\ g_{jk}\ \underline{b}^k \overset{!}{=} \delta_k^i\ \underline{b}^k && \text{(II.19)}\\
\rightsquigarrow\quad g^{ij}\ g_{jk} &= \delta_k^i && \text{(II.20)}
\end{aligned}$$

g^{ij} verhält sich invers zu g_{jk} , wenn beide Größen als Matrizen aufgefasst werden.

- Skalarprodukt zweier beliebiger Vektoren:

$$\begin{aligned} \underline{v} \cdot \underline{w} &= v^i \underline{b}_i \cdot w_j \underline{b}^j = v^i w_j \, \underline{b}_i \cdot \underline{b}^j && \text{(II.21)} \\ &= v^i w_j \, \delta_i^j = v^i w_i && \text{(II.22)} \end{aligned}$$

- analog

$$\begin{aligned} \underline{v} \cdot \underline{w} &= v_i w^i && \text{(II.23)} \\ \underline{v} \cdot \underline{w} &= v^i w^j \, g_{ij} = v_i w_j \, g^{ij} && \text{(II.24)} \end{aligned}$$

- man beachte im allgemeinen

$$\underline{v} \cdot \underline{w} \neq v^i w^i \neq v_j w_j \qquad \text{(II.25)}$$

Abstand zweier infinitesimaler benachbarter Ereignisse $ds := |d\underline{r}|$

$$d\underline{r} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi^i} \, d\xi^i = \underline{b}_i \, d\xi^i \qquad \text{(II.26)}$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\underline{r} \cdot d\underline{r} = \underline{b}_i d\xi^i \cdot \underline{b}_j d\xi^j && \text{(II.27)} \\ &= g_{ij} \, d\xi^i d\xi^j \quad \text{(metrische Fundamentalgleichung)} && \text{(II.28)} \end{aligned}$$

Die $d\xi^i$ sind die Koordinatendifferentiale, vom Typ her sind sie kontravariant.

Einführung kovarianter Koordinatendifferentiale $d\xi_i$

$$d\xi_i := g_{ij} d\xi^j \qquad \text{(II.29)}$$

Gleichung kann als Dgl. für $\xi_i(\xi^j)$ aufgefasst werden. $d\xi_i$ ist vollständiges Differential und damit integrabel, nur wenn

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^k} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial \xi^j} \qquad \text{(II.30)}$$

gilt. Im allgemeinen ist das aber nicht der Fall, so dass es keinen globalen Zusammenhang $\xi_i(\xi^j)$ gibt; ξ_i sind also in der Regel anholonome Koordinaten, während ξ^i definitionsgemäß holonome Koordinaten darstellen.

Beispiel Minkowski-Raum

- $\xi^i = (x^1, x^2, x^3, x^4) = (x, y, z, ct)$

- $g_{ij} = \eta_{ij} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \eta^{ij}$
- $ds^2 = \eta_{ij}\ dx^i\ dx^j = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2$
- Gültigkeit des Schwarzschen Satzes:

$$\frac{\partial \eta_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial \eta_{ik}}{\partial x^j} = 0$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow dx_i &= \eta_{ij} dx^j \qquad \text{integrabel} \\ \rightsquigarrow x_1 &= x^1 = x \\ x_2 &= x^2 = y \\ x_3 &= x^3 = z \\ x_4 &= -x^4 = -ct \end{aligned}$$

Bemerkung:

Prinzip des richtigen Indexbildes

Der Kalkül ist so konstruiert, dass auf beiden Seiten das gleiche Indexbild auftreten muss. Das gilt für freie Indizes; Summationsindizes (gesättigt) müssen immer ko- und kontravariant angeordnet sein.

Levi - Civita - Symbol

$$\Delta^{ijkl} := \begin{cases} 1 & \text{bei } i=1, j=2, k=3, l=4 \text{ und allen geraden Indexpermutationen} \\ -1 & \text{bei allen ungeraden Indexpermutationen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

z.B.

$$\begin{aligned} \Delta^{1243} &= -1 \\ \Delta^{4123} &= -1 \\ \Delta^{1134} &= 0 \end{aligned}$$

d.h. vollständig antisymmetrisch.

Determinante des metrischen Tensors

- $g := det(g_{ik})$
- $g = \Delta^{ijkl}\ g_{1i}\ g_{2j}\ g_{3k}\ g_{4l}$
  Beweis durch Ausrechnen (s.u.)

- Rechenregel gilt für beliebige Dimensionszahl N
  $g = \Delta^{ij\ldots k}\ g_{1i}\ g_{2j}\ \cdots\ g_{Nk}$
  Beweis durch Induktion!
  $\Delta^{ij\ldots k}$ ist entsprechend definiert.

- $g_{mi}\ g_{nj}\ g_{ok}\ g_{pl}\Delta^{ijkl} = g\ \Delta^{mnop}$
  im Sinne von zahlenmäßiger Gleichheit, denn Indexbil m,n,o,p stimmt nicht.

  Beweis für zahlenmäßige Gleichheit:

  1. $m = 1, n = 2, o = 3, p = 4$: klar
  2. zwei Indizes aus m,n,o,p gleich: links Null, da Spur aus symmetrischen und antisymmetrischen Ausdruck; rechts null, klar.
  3. alle Indizes verschieden, Reihenfolge weicht von m=1,n=2,o=3,p=4 ab: Permutationen rechts und links der Anzahl nach gleich, um Reihenfolge 1234 zu erreichen. q.e.d.

Beweis der Formel $g = \Delta^{ijkl} g_{1i}\ g_{2j}\ g_{3k}\ g_{4l}$

- zunächst $N = 2$
  $g = \Delta^{ij}\ g_{1i}\ g_{2j} = \Delta^{12}\ g_{11}\ g_{22} + \Delta^{21}\ g_{12}\ g_{21} = g_{11}\ g_{21} - g_{12}\ g_{21}$
- nun $N = 3$:

$$
\begin{aligned}
g &= \Delta^{ijk}\ g_{1i}\ g_{2j}\ g_{3k} \\
&= g_{11}\Delta^{1jk}\ g_{2j}\ g_{3k} + g_{12}\Delta^{2jk}\ g_{2j}\ g_{3k} + g_{13}\Delta^{3jk}\ g_{2j}\ g_{3k} \\
&\text{dazu:} \\
\Delta^{1jk} g_{2j}\ g_{3k} &= \Delta^{123} g_{22}\ g_{33} + \Delta^{132} g_{23}\ g_{32} \\
&= \underbrace{g_{22}\ g_{33} - g_{23}\ g_{32}}_{11-\text{ Unterdeterminante}} \\
\Delta^{2jk} g_{2j}\ g_{3k} &= \Delta^{213} g_{21}\ g_{33} + \Delta^{231} g_{23}\ g_{31} \\
&= \underbrace{-(g_{21}\ g_{33} - g_{23}\ g_{31}}_{12-\ \text{Unterdeterminante}} \\
&\textit{etc}
\end{aligned}
$$

  $\longrightarrow$ Formel entspricht Entwicklungssatz nach der 1. usw. Zeile

4 Tensoren im Riemannschen Raum

Betrachtung eines 4-dim. Raumes mit der metrischen Fundamentalform

$ds^2 = g_{ik}(\xi^1, \ldots, \xi^4)\ d\xi^i\ d\xi^k = g_{ik}(\xi)\ d\xi^i\ d\xi^k$

- mit g_{ik} ist Längen- und Winkelmessung in jedem Ereignis P festgelegt
- Länge von b_i
  z.B. b_1

$$|\underline{b}_1| = \sqrt{\underline{b}_1 \cdot \underline{b}_1} = \sqrt{g_{11}} \tag{II.31}$$

  etc
- Winkel zwischen b_i und b_j
  z.B. b_1 und b_2

$$\cos \sphericalangle(b_1, b_2) = \frac{\underline{b}_1 \cdot \underline{b}_2}{|\underline{b}_1| \cdot |\underline{b}_2|} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \tag{II.32}$$

  etc.
  $\rightsquigarrow$ Raum mit Maßbestimmung
- Forderungen
  $g := det(g_{ik}) \neq 0$,
  $g_{ik}(\xi)$ differenzierbar

Der durch die metrische Fundamentalform definierte Raum heißt Riemannscher Raum.

- Der Riemannsche Raum kann auch in N Dimensionen betrachtet werden; hier interessiert insbes. N = 4 .

Ereignis $P_0 : (\xi_0^1, \xi_0^2, \xi_0^3, \xi_0^4) \overset{\text{kurz}}{\longrightarrow} (\xi_0)$

- $ds^2 = g_{ik}(\xi_0)\ d\xi^i\ d\xi^k$
  kann lokal approximiert werden bei P_0
- wegen $g_{ik}(\xi_0) = const$ ist Transformation zu Minkowski-Koordinaten möglich (Hauptachsentrafo u. Umskalierung der Koordinatendifferentiale)
  $ds^2 = \eta_{ik}\ dx^i\ dx^k$
- gilt exakt in ξ_0 und genähert in $U(\xi_0)$

In einem Ereignis P können physikalische Größen existieren:

- Skalare
  $S = S(\xi)$
- Vektoren
  $\underline{v} = \underline{v}(\xi) = v^i(\xi)\ \underline{b}_i(\xi) = v_j(\xi)\ \underline{b}^j(\xi)$

- Tensoren im engeren Sinne
  $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}(\xi) = T^{ij}(\xi)\ \underline{b}_i(\xi) \circ \underline{b}_j(\xi) = T_{ij}(\xi)\ \underline{b}^i(\xi) \circ \underline{b}^j(\xi) = T^i{}_j\ \underline{b}_i \circ \underline{b}^j = T_i{}^j\ \underline{b}^i \circ \underline{b}_j$
- Tensoren höherer Ordnung z.B. $\underline{\underline{\underline{T}}} = T^{ijk}\ \underline{b}_i \circ \underline{b}_j \circ \underline{b}_k$ etc.
- Koordinatenlinien ξ^l und Basisvektoren $\underline{b}_l, \underline{b}^l$ bzw. deren dyadische Produkte dienen zur quantitativen Darstellung der physikalischen Größen

Definition von Tensoren (vorläufig)

- Physikalische Größen in einem Ereignis P des Riemannschen Raumes nennen wir Tensoren.
- Skalare sind Tensoren 0.Stufe
- Vektoren sind Tensoren 1.Stufe
- Es gibt Tensoren beliebiger Stufe.
- v^i sind dann die kontravarianten Komponenten des Tensors 1.Stufe (oder Vektors) $\underline{v}$
- v_i analog kovariante Komponenten von $\underline{v}$
- T^{ij} kontravariante Komponenten von $\underline{\underline{T}}$
- T_{ij} kovariante Komponenten von $\underline{\underline{T}}$
- $T^i{}_j$, $T_i{}^j$ gemischte Komponenten

Bemerkung zur Definition

- Mitunter wird v^i als Kontravarianter Tensor und v_i als Kovarianter Tensor bezeichnet; entsprechend für höhere Stufen.
- Diese Benennung ist als Kurzbezeichnung aufzufassen, die allerdings nicht präzise ist.
- Es gibt Größen mit Tensor-Charakter, die nicht unmittelbar physikalische Größen sind; diese werden dann geometrische Objekte genannt, z.B. g_{ij}.

Tensorfelder

- Ausdehnung der Betrachtung von Tensoren in einem Ereignis P auf den gesamten Riemannschen Raum

Bei Koordinatentransformationen dürfen sich physikalische Größen als Ganzes nicht ändern, wohl aber ihre Komponenten; phys. Größe ist objektiv, Komponenten sind subjektiv, da Koordinaten subjektiv.

- Transformation von KS zu KS'

$$\xi^{i'} \;=\; \xi^{i'}(\xi^1,...,\xi^4) \;=\; \xi^{i'}(\xi^l) \;=\; \xi^{i'}(\xi) \tag{II.33}$$

sowie die Umkehrtransformation

$$\xi^{i} \;=\; \xi^{i}(\xi^{1'},...,\xi^{4'}) \;=\; \xi^{i}(\xi^{l'}) \;=\; \xi^{i}(\xi') \tag{II.34}$$

- resultierende Transformation der Basisvektoren

$$\underline{b}_{i'} \;=\; \frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi^{i'}} \;=\; \frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi^{j}} \cdot \frac{\partial \xi^{j}}{\partial \xi^{i'}} \;=\; \underline{b}_j \cdot A^{j}_{i'} \tag{II.35}$$

$$\text{mit} \qquad A^{j}_{i'} \;=\; \frac{\partial \xi^{j}}{\partial \xi^{i'}} \tag{II.36}$$

$A^{j}_{i'}$ ist die Jacobi-Matrix oder die inverse Jacobi-Matrix.

$$\underline{b}^{i'} \;=\; \frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \underline{r}} \;=\; \frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \xi^{j}} \cdot \frac{\partial \xi^{j}}{\partial \underline{r}} \;=\; A^{i'}_{j} \cdot \underline{b}^{j} \tag{II.37}$$

$$\text{mit} \qquad A^{i'}_{j} \;=\; \frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \xi^{j}} \tag{II.38}$$

$A^{i'}_{j}$ ist die Jacobi-Matrix oder die inverse Jacobi-Matrix.

- $A^{i'}_{j}$ und $A^{k}_{l'}$ invers:

$$A^{i'}_{j} \cdot A^{j}_{l'} \;=\; \frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \xi^{j}} \cdot \frac{\partial \xi^{j}}{\partial \xi^{l'}} \;=\; \frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \xi^{l'}} \;=\; \delta^{i'}_{l'} \tag{II.39}$$

- beliebiger Vektor $\underline{v}$

$$\underline{v} \;=\; v^{i'}\underline{b}_{i'} \;=\; v^{i'}A^{j}_{i'}\underline{b}_j \;=\; v^{j}\underline{b}_j \tag{II.40}$$

$$\rightsquigarrow \quad v^{j} \;=\; A^{j}_{i'}v^{i'} \tag{II.41}$$

$$v^{k'} \;=\; A^{k'}_{l}v^{l} \tag{II.42}$$

- analog für Tensoren höherer Stufen

$$T^{i'j'} \;=\; A^{i'}{}_{k}A^{j'}{}_{l}T^{kl} \quad \text{usw.} \tag{II.43}$$

Transformationsverhalten ist wesentliche Eigenschaft von Tensoren

Definition:
Tensoren sind physikalische oder Geometrische Größen, deren Komponenten sich bei Koordinatentransformation $KS \rightarrow KS'$ wie folgt verhalten:

- Tensoren 0. Stufe

$$S = S' \tag{II.44}$$

- Tensoren 1. Stufe

$$v^{i'} = A^{i'}_{\ k}\ v^k \tag{II.45}$$
$$v_{i'} = A_{i'}^{\ k}\ v_k \tag{II.46}$$

- Tensoren 2.Stufe

$$T^{i'j'} = A^{i'}_{\ k}\ A^{j'}_{\ l}\ T^{kl} \tag{II.47}$$
$$T_{i'j'} = A_{i'}^{\ k}\ A_{j'}^{\ l}\ T_{kl} \tag{II.48}$$
$$T^{i'}_{\ j'} = A^{i'}_{\ k}\ A_{j'}^{\ l}\ T^k_l \tag{II.49}$$
$$T_{\prime i}^{\ \ j'} = A_{i'}^{\ k}\ A^{j'}_{\ l}\ T_k^{\ l} \tag{II.50}$$

$$\left(T_{i'}^{\ \ j'} \neq T^{j'}_{\ i'} \text{ i.A.}\right) \tag{II.51}$$

- Tensoren höherer Stufen analog
- Rücktransformationen mit den jeweils inversen Matrizen

Transformation der metrischen Fundamentalgleichung

$$ds^2 = g_{ik}\ d\xi^i\ d\xi^k = g_{l'm'}\ d\xi^{l'}\ d\xi m' \tag{II.52}$$
$$\text{mit}\quad d\xi^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial \xi^{l'}}\ d\xi^{l'} = A^i_{\ l'}\ d\xi^{l'} \tag{II.53}$$
$$ds^2 = g_{ik}(\xi)\ A^i_{l'}\ A^k_{m'}\ d\xi^{l'}\ d\xi^{m'} = g_{l'm'}\ d\xi^{l'}\ d\xi^{m'} \tag{II.54}$$
ds^2 ist Tensor 0.Stufe
$$g_{ik}\ A^i_{\ l'}\ A^k_{\ m'} = g_{l'm'} \quad \text{transformiert sich} \tag{II.55}$$
wie die kovarianten Komponenten eines Tensors

Tranformationmatrizen $A^{i'}_{\ j}$, $A_{j'}^{\ i}$, sind keine Tensorkomponenten.

Im Minkowski-Raum gehen die Transformationsmatrizen in die Lorentz-Matrizen über:

$$A^{i'}_{\ j} \rightarrow L^{i'}_{\ j} \tag{II.56}$$
$$A_{j'}^{\ i} \rightarrow L_{j'}^{\ i} \tag{II.57}$$

Lorentz- Transformation enthält nur Konstanten und gilt im gesamten Minkowski-Raum;

Transformations-Matrizen des Riemannschen Raumes sind ereignisabhängig, also $A^{i'}_{\ j}(\xi)$.

Tensor-Operationen

- Verjüngung eines Tensors = Kontraktion zweier Indizes = Summation über einen oberen und einen unteren Index:
  $T = T^i{}_i$, $T^i = T^{ik}{}_k$
  $\hat{=}$ Spurbildung bei Tensor 2.Stufe
  $\hat{=}$ Skalarprodukt für $T^i{}_k = A^i\ G_k$

Symmetrien für Tensoren 2.Stufe

- T_{ik} symmetrisch $\rightleftharpoons T_{ik} = T_{ki}$
  $\rightsquigarrow T^{ik} = T^{ki}$ (ÜA)
  $(N^2 - N)/2 + N = \frac{1}{2}(N^2 + N)$ unabh. Komp.,
  $N = 4 \rightsquigarrow$ 10 Komponenten
- T_{ik} antisymmetrisch $\rightleftharpoons T_{ik} = -T_{ki}$
  $\rightsquigarrow T^{ik} = -T^{ki}$
  $(N^2 - N)/2$ unabh. Komp. ,
  $N = 4 \rightsquigarrow$ 6 Komponenten
- $T^i{}_k = T^k_i$ unsinnig!
- Bachsche Klammern

$$T_{ik} = \underbrace{\frac{1}{2}(T_{ik} + T_{ki})}_{symmetr.} + \underbrace{\frac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki})}_{antisymm.} \tag{II.58}$$

$$=: T_{(ik)} + T_{[ik]} \tag{II.59}$$

Addition

- nur für Tensoren gleicher Stufen und Typs (gleiches Indexbild)

$$T_{ik} + V_{ik} = W_{ik} \tag{II.60}$$

Multiplikation

- Verallgemeinerung des dyadischen Produktes

$$S^i{}_j{}^k T^{lm}{}_n = Q^i{}_j{}^{klm}{}_n \tag{II.61}$$

Überschiebung

- Multiplikation mit gleichzeitiger Verjüngung

$$T^{ij}{}_k S_r{}^k = Q^{ij}{}_r \tag{II.62}$$

- Spezialfall: Indexziehen

$$g_{ij}T^j = T_i \tag{II.63}$$

- Spezialfall: Skalarprodukt ; v^i, w^i

$$v^i w_i = g^{ij} v_i w_j = g_{ij} v^i w^j \tag{II.64}$$

- Spezialfall: „Länge“ eines Vektors v^i

$$v_i\ v^i \begin{cases} > 0 & \text{raumartig} \\ = 0 & \text{Nullvektor (lichtartig)} \\ < 0 & \text{zeitartig} \end{cases} \tag{II.65}$$

Quotientensatz

- $T^{ij\cdots}$ sei Tensor
- $N_{ij\ldots}$?
- Falls $T^{ij\cdots}\ N_{ij\ldots}$ = invariant (Skalar)
  $\rightsquigarrow N_{ij\ldots}$ ist Tensor
- Beweis: ÜA

Spur eines Produktes aus 2-Stufigen Tensoren

- sei $S_{ik} = S_{ki}\ ,\ a_{lm} = -a_{ml}$
- dann $S_{ik}\ a^{ki} = 0$
- Beweis:

(1)

$$\begin{aligned} a^{ik} &= g^{il}\ g^{km}\ a_{lm} \\ &= -g^{il}\ g^{km}\ a_{ml} \\ &= -g^{km}\ g^{il}\ a_{ml} \\ &= -a^{ki} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} S_{ik}\ a^{ki} &= -S_{ki}\ a^{ik} \quad (\text{ Einarbeiten der Symmetrien}) \\ &= -S_{ik}\ a^{ki}\ (k \rightsquigarrow i) \\ \rightsquigarrow S_{ik}\ a^{ki} &= 0 \end{aligned}$$

5 Kovariante Ableitung und Parallelverschiebung

Partielle Ableitung der Komponenten eines Tensorfeldes ist im Riemannschen Raum i.a. kein Tensorfeld

Notwendigkeit der Verallgemeinerung der Differentation auf die s.g. kovariante Ableitung, die bei Anwendung auf ein Tensorfeld wieder ein Tensorfeld ergibt

- Beispiel

$$v^i, \qquad \xi^{j'} = \xi^{j'}(\xi^l) \tag{II.66}$$

$$\frac{\partial v^{i'}}{\partial \xi^{j'}} \neq A^{i'}_k \; A^l_{j'} \; \frac{\partial v^k}{\partial \xi^l} \tag{II.67}$$

$$v^{i'} = A^{i'}_k \; v^k \tag{II.68}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi^{j'}} = \frac{\partial \xi^l}{\partial \xi^{j'}} \frac{\partial}{\partial \xi^l} \tag{II.69}$$

$$= A^l_{j'} \; \frac{\partial}{\partial \xi^l} \tag{II.70}$$

$$\frac{\partial v^{i'}}{\partial \xi^{j'}} = A^l_{j'} \frac{\partial}{\partial \xi^l} \left(A^{i'}{}_k v^k \right) \tag{II.71}$$

$$= A^l{}_{j'} \; A^{i'}{}_k \; \frac{\partial v^k}{\partial \xi^l} + A^l_{j'} \; \frac{\partial A^{i'}_k}{\partial \xi^l} \; v^k \tag{II.72}$$

$$= A_{j'}^{\;l} \; A^{i'}_k \; \frac{\partial v^k}{\partial \xi^l} + \underbrace{\frac{\partial A^{i'}_k}{\partial \xi^{j'}} \; v^k} \tag{II.73}$$

verschwindet im Minkowski-Raum, verschwindet nicht im Riemann- Raum

Totales Differential eines Tensorfeldes ist damit i.a. auch kein Tensor:

$$dv^i = \frac{\partial v^i}{\partial \xi^j} \; d\xi^j = v^i(\xi + d\xi) - v^i(\xi) \tag{II.74}$$

klar, da sich $v^i(\xi + d\xi)$ mit $A^{i'}{}_j(\xi + d\xi)$ und $v^i(\xi)$ mit $A^{i'}{}_j(\xi)$ transformieren.

Damit die Differenz zweier Tensoren (hier Vektoren) wieder einen Tensor (Vektor) ergibt, müssen die beiden Tensoren(Vektoren) am selben Ereignis betrachtet werden.

Einführung einer abkürzenden Notation für die Parielle Ableitung

$$v^i_{|j} := \frac{\partial v^i}{\partial \xi^j} \quad . \tag{II.75}$$

5.1 Kovariante Ableitung

$\underline{v}$ sei Tensor und repräsentiere eine physikalische Größe

$\rightsquigarrow$ $\underline{v}$ invariant gegenüber Koordinatentransformationen.

Die Einführung der kovarianten Ableitung wird in zwei Varianten vorgestellt:

1. Variante

- $d\underline{v}$ sei infinitesimale Differenz

$$\begin{aligned} d\underline{v} &= \underline{v}(\xi + d\xi) - \underline{v}(\xi) && \text{(II.76)}\\ &= v^i(\xi + d\xi)\ \underline{b}_i(\xi + d\xi) - v^i(\xi)\ \underline{b}_i(\xi) && \text{(II.77)}\\ &= v^i(\xi + d\xi)\ \underline{b}_i(\xi + d\xi) - v^i(\xi + d\xi)\ \underline{b}_i(\xi) \\ &\quad + v^i(\xi + d\xi)\ \underline{b}_i(\xi) - v^i(\xi)\ \underline{b}_i(\xi) && \text{(II.78)}\\ &= v^i(\xi + d\xi)\ \{\ \underline{b}_i(\xi + d\xi) - \underline{b}_i(\xi)\ \} + \{\ v^i(\xi + d\xi) - v^i(\xi)\ \}\ \underline{b}_i(\xi) && \text{(II.79)}\\ &= v^i(\xi + d\xi)\ d\underline{b}_i + dv^i\ \underline{b}_i(\xi) && \text{(II.80)} \end{aligned}$$

- zum gleichen Ergebnis kommt man mittels

$$d\underline{v} = d\left(v^i\,\underline{b}_i\right) = dv^i\,\underline{b}_i + v^i\,d\underline{b}_i \qquad \text{(II.81)}$$

- die beiden rechten Summanden sind für sich genommen keine Tensoren, denn dv^i und auch $d\underline{b}_i$ sind keine Tensoren

- Umformung der rechten Seite

$$\begin{aligned} d\underline{v} &= v^i d\underline{b}_i - \Gamma^k_{il}\ \underline{b}_k\ d\xi^l\ v^i + \Gamma^k_{il}\ v^i\ d\xi^l\ \underline{b}_k + dv^i\ \underline{b}_i && \text{(II.82)}\\ d\underline{v} &= v^i\left\{d\underline{b}_i - \Gamma^k_{il}\ \underline{b}_k\ d\xi^l\right\} + \left\{dv^i + \Gamma^i_{kl}\ v^k\ d\xi^l\right\}\underline{b}_i && \text{(II.83)} \end{aligned}$$

Einführung neuer Bezeichnungen

$$\begin{aligned} Dv^i &:= dv^i + \Gamma^i_{kl} v^k d\xi^l\ :=\ \left(v^i{}_{|l} + \Gamma^i_{kl} v^k\right) d\xi^l && \text{(II.84)}\\ D\underline{b}_i &:= d\underline{b}_i - \Gamma^k_{il}\ \underline{b}_k\ d\xi^l\ :=\ \left(\underline{b}_{i|l} - \Gamma^k_{il}\ \underline{b}_k\right) d\xi^l && \text{(II.85)} \end{aligned}$$

- die freien Parameter Γ^k_{il} sind so zu bestimmen, dass

$$\begin{aligned} D\underline{b}_i &= 0 && \text{(II.86)}\\ \rightsquigarrow\quad \underline{b}_{i|l} - \Gamma^k_{il}\ \underline{b}_k &= 0 && \text{(II.87)}\\ \underline{b}^m \cdot \underline{b}_{i|l} - \Gamma^k_{il}\delta^m_k &= 0 && \text{(II.88)}\\ \Gamma^m_{il} &= \underline{b}^m \cdot \underline{b}_{i|l} && \text{(II.89)}\\ &\overset{\text{s.ÜA}}{=} \frac{1}{2}\, g^{mk}\left(g_{ik|l} + g_{lk|i} - g_{il|k}\right) && \text{(II.90)} \end{aligned}$$

- damit ist Dv_i bzw. $v^i_{|l} + \Gamma^i_{kl} v^k$ ein Tensor, denn die einzelnen Größen verhalten sich bei Koordinaten-Transformation wie folgt

$$
\begin{aligned}
v^{i'}_{\ |l'} &= \frac{\partial}{\partial \xi^{l'}} v^{i'} = A^p_{l'} \frac{\partial}{\partial \xi^p} \left(A^{i'}_q v^q \right) = A^p_{l'} A^{i'}_q v^q_{|p} + A^p_{l'} A^{i'}_{q|p} v^q && \text{(II.91)} \\
\Gamma^{i'}_{k'l'} &= \underline{b}^{i'} \frac{\partial}{\partial \xi^{l'}} \underline{b}_{k'} = A^{i'}_r \underline{b}^r A^p_{l'} \frac{\partial}{\partial \xi^p} \left(A^s_{k'} \underline{b}_s \right) && \text{(II.92)} \\
&= A^{i'}_r A^p_{l'} A^s_{k'} \underline{b}^r \frac{\partial}{\partial \xi^p} \underline{b}_s + A^{i'}_r A^p_{l'} A^s_{k'|p} \underline{b}^r \underline{b}_s && \text{(II.93)} \\
&= A^{i'}_r A^p_{l'} A^s_{k'} \Gamma^r_{sp} + A^{i'}_r A^p_{l'} A^r_{k'|p} && \text{(II.94)} \\
v^{i'}_{|l'} + \Gamma^{i'}_{k'l'} v^{k'} &= A^{i'}_q A^p_{l'} v^q_{|p} + A^p_{l'} A^{i'}_{q|p} v^q + A^{i'}_r A^p_{l'} A^s_{k'} \Gamma^r_{sp} A^{k'}_q v^q \\
&\quad + A^{i'}_r A^p_{l'} A^r_{k'|p} A^{k'}_q v^q && \text{(II.95)} \\
v^{i'}_{|l'} + \Gamma^{i'}_{k'l'} v^{k'} &= A^{i'}_q A^p_{l'} v^q_{|p} + A^{i'}_r A^p_{l'} \delta^s_q \Gamma^r_{sp} v^q \\
&\quad + \underbrace{A^p_{l'} A^{i'}_{q|p} v^q + A^p_{l'} A^{i'}_r A^r_{k'|p} A^{k'}_q v^q}_{=\,0 \quad \text{s.u.}} && \text{(II.96)} \\
&= A^{i'}_q A^p_{l'} v^q_{|p} + \underbrace{A^{i'}_r A^p_{l'} \Gamma^r_{qp} v^q}_{r \leftrightarrow q} && \text{(II.97)} \\
&= A^{i'}_q A^p_{l'} (v^q_{|p} + \Gamma^q_{rp} v^r) && \text{(II.98)}
\end{aligned}
$$

- noch zu zeigen, dass sich obige 3. und 4. Summanden wegheben:

$$
\begin{aligned}
\text{zu zeigen:} \quad A^{i'}_{q|p} + A^{i'}_r A^r_{k'|p} A^{k'}_q &\stackrel{!}{=} 0 \quad | \cdot A^q_{s'} && \text{(II.99)} \\
A^q_{s'} A^{i'}_{q|p} + A^{i'}_r A^r_{k'|p} \delta^{k'}_{s'} &= 0 && \text{(II.100)} \\
A^q_{s'} A^{i'}_{q|p} + A^{i'}_r A^r_{s'|p} &= 0 && \text{(II.101)} \\
A^r_{s'} A^{i'}_{r|p} + A^{i'}_r A^r_{s'|p} &= 0 && \text{(II.102)} \\
\left(A^{i'}_r \cdot A^r_{s'} \right)_{|p} &= \delta^{i'}_{s'|p} = 0 && \text{(II.103)}
\end{aligned}
$$

q.e.d.

2. Variante

- Betrachtung zweier benachbarter Tensoren $\underline{v}(\xi + d\xi)$ und $\underline{v}(\xi)$ eines Tensorfeldes; i.a. wird $\underline{v}(\xi + d\xi) \neq \underline{v}(\xi)$ sein außer für ein homogenes Tensorfeld.
- $d\underline{v} = d(v^i \underline{b}_i) = dv^i \underline{b}_i + v^i d\underline{b}_i$
- Komponenten von $\underline{b}(\overline{P})$ sind verschieden von den Komponenten von $\underline{b}(P)$, weil
  1. $\underline{b}(P) \neq \underline{b}(\overline{P})$
  2. die Basen in P und $\overline{P}$ unterschiedlich sind, d.h. selbst ein konstanter Vektor hätte in P und $\overline{P}$ verschiedene Komponenten

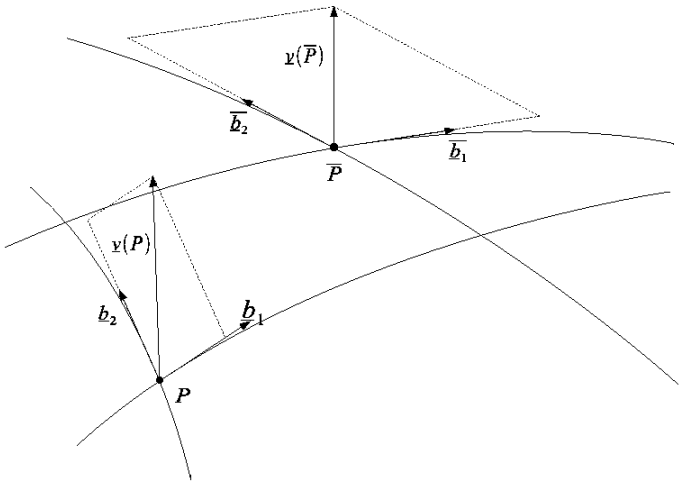


Abbildung II.8: Tensorfeld

- Zurückverschiebung von $\underline{v}(\overline{P})$ nach P und Betrachtung der Komponenten von $\underline{v}(\overline{P})$ in der Basis bei P

Einführung des s.g. kovarianten Differentials

$$\begin{aligned} D\underline{v} &:= \underline{v}(\xi + d\xi) - \underline{v}(\xi) && \text{(II.104)} \\ &= D(v^i \underline{b}_i) && \text{(II.105)} \\ &= Dv^i \cdot \underline{b}_i + v_i \underbrace{D\underline{b}_i}_{=0} && \text{(II.106)} \end{aligned}$$

- Mit $v^i(\xi + d\xi)$ als die Komponenten von $\underline{v}(\overline{P})$ zur Basis in $\overline{P}$ gilt:

$$Dv^i \neq v^i(\xi + d\xi) - v^i(\xi) = dv^i \qquad \text{(II.107)}$$

- Mit $\tilde{v}^i(\xi + d\xi)$ als die Komponenten von $\underline{v}(\overline{P})$ zur Basis in P gilt:

$$Dv^i = \tilde{v}^i(\xi + d\xi) - v^i(\xi) \qquad \text{(II.108)}$$

- Ansatz

$$\begin{aligned} \tilde{v}^i(\xi + d\xi) &= v^i(\xi + d\xi) - \delta v^i && \text{(II.109)} \\ \delta v^i &= -\Gamma^i_{jk} v^j d\xi^k && \text{(II.110)} \end{aligned}$$

  Γ^i_{jk} sind Übertragungskoeffizienten, Christoffel-Symbole

- Einsetzen

$$\begin{aligned} Dv^i &= v^i(\xi + d\xi) + \Gamma^i_{jk} v^j d\xi^k - v^i(\xi) && \text{(II.111)} \\ &= dv^i + \Gamma^i_{jk} v^j d\xi^k && \text{(II.112)} \end{aligned}$$

- Γ^i_{jk} sind so zu bestimmen, dass Dv^i wieder ein Tensor (Vektor) ist und im Minkowski-Raum in dv^i übergeht.
- Es ergibt sich (s.ÜA)

$$\Gamma^i_{jk} = \underline{b}^i \, \frac{\partial \underline{b}_j}{\partial \xi^k} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial \xi^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \xi^l} \right) \tag{II.113}$$

- $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$

Die weiteren Umformungen gelten für beide Varianten gleichermaßsen. Definition der kovarianten Ableitung $v^i{}_{||k}$ über

$$Dv^i := v^i{}_{||k} \, d\xi^k \tag{II.114}$$

- folglich gilt

$$v^i{}_{||k} = \frac{\partial v^i}{\partial \xi^k} + \Gamma^i_{jk} v^j \tag{II.115}$$

- Abkürzungen

$$v^i{}_{|k} \; := \; \frac{\partial v^i}{\partial \xi^k} \; := \; \partial_{\xi^k} v^i \; := \; \partial_k v^i \tag{II.116}$$

- oder auch

$$v^i{}_{||k} = v^i{}_{|k} + \Gamma^i_{jk} v^j \tag{II.117}$$

- $v^i{}_{||k}$ ist Tensor, da Dv^i als Tensor konstruiert wurde und $d\xi^k$ ein Tensor ist
- kontravariante Ableitung $v^{i||k}$ als Bezeichnung möglich, wenig gebräuchlich

$$v^{i||k} \quad := \quad g^{jk} v^i{}_{||j} \tag{II.118}$$
$$\tag{II.119}$$

- weiterhin gilt (Beweis ÜA)

$$v_{i||k} \quad = \quad v_{i|k} - \Gamma^j_{ik} v_j \tag{II.120}$$

Kovariante Ableitung für Tensoren anderer Stufen

- 0.Stufe

$$S_{||i} = S_{|i} \tag{II.121}$$

- 1.Stufe

$$v^i{}_{||j} = v^i{}_{|j} + \Gamma^i_{jk} v^k, \tag{II.122}$$

$$v_{i||j} = v_{i|j} - \Gamma^k_{ij} v_k \tag{II.123}$$

- 2.Stufe

$$\begin{aligned}
\text{sei} \quad T^{ij} &= v^i w^j && \text{(II.124)}\\
T^{ij}{}_{||k} &= v^i{}_{||k} w^j + v^i w^j{}_{||k} && \text{(II.125)}\\
&= (v^i{}_{|k} + \Gamma^i_{kl} v^l) w^j + v^i (w^j{}_{|k} + \Gamma^j_{km} w^k) && \text{(II.126)}\\
&= (v^i w^j)_{|k} + \Gamma^i_{kl} v^l w^j + \Gamma^j_{kl} v^i w^l && \text{(II.127)}\\
T^{ij}{}_{||k} &= T^{ij}{}_{|k} + \Gamma^i_{kl} T^{lj} + \Gamma^j_{kl} T^{il} && \text{(II.128)}\\
\text{bzw.} \quad T_{ij||k} &= T_{ij||k} - \Gamma^l_{ik} T_{lj} - \Gamma^l_{jk} T_{il} && \text{(II.129)}
\end{aligned}$$

- usw.

- Konsistenz für 0.Stufe

$$\begin{aligned}
S &= v^j v_j && \text{(II.130)}\\
S_{||i} &= v^j{}_{||i} v_j + v^j v_{j||i} \;=\; (v^j{}_{|i} + \Gamma^j_{il} v^l) v_j + v^j (v_{j|i} - \Gamma^l_{ji} v_l) && \text{(II.131)}\\
S_{||i} &= v^j{}_{|i} v_j + v^j v_{j|i} + \Gamma^j_{il} v^l v_j - \Gamma^l_{ji} v^j v_l && \text{(II.132)}\\
S_{||i} &= (v^j v_j)_{|i} && \text{(II.133)}
\end{aligned}$$

2. kovariante Ableitungen i.a. nicht vertauschbar

$$v_{i||k||p} \overset{\text{i.a.}}{\neq} v_{i||p||k} \tag{II.134}$$

(1.)

$$\begin{aligned}
v_{i||k||p} &= v_{i||k|p} - \Gamma^m_{ip} v_{m||k} - \Gamma^m_{kp} v_{i||m} && \text{(II.135)}\\
&= \left(v_{i|k} - \Gamma^m_{ik} v_m\right)_{|p} && \text{(II.136)}\\
&\quad - \Gamma^m_{ip} \left(v_{m|k} - \Gamma^r_{mk} v_r\right)\\
&\quad - \Gamma^m_{kp} \left(v_{i|m} - \Gamma^r_{im} v_r\right)\\
&= v_{i|k|p} - \Gamma^m_{ik|p} v_m - \Gamma^m_{ik} v_{m|p} && \text{(II.137)}\\
&\quad - \Gamma^m_{ip} v_{m|k} + \Gamma^m_{ip} \Gamma^r_{mk} v_r\\
&\quad - \Gamma^m_{kp} v_{i|m} + \Gamma^m_{kp} \Gamma^r_{im} v_r
\end{aligned}$$

(2.)

$$\begin{aligned} v_{i||k||p} - v_{i||p||k} &= -\Gamma^m_{ik|p} v_m + \Gamma^m_{ip|k} v_m \qquad \text{(II.138)} \\ &\quad - \Gamma^m_{ik} v_{m|p} + \Gamma^m_{ip} v_{m|k} \\ &\quad - \Gamma^m_{ip} v_{m|k} + \Gamma^m_{ik} v_{m|p} \\ &\quad - \Gamma^m_{kp} v_{i|m} + \Gamma^m_{pk} v_{i|m} \\ &\quad + \Gamma^m_{ip}\Gamma^r_{mk} v_r - \Gamma^m_{ik}\Gamma^r_{mp} v_r \\ &\quad + \Gamma^m_{kp}\Gamma^r_{im} v_r - \Gamma^m_{pk}\Gamma^r_{im} v_r \\ &= \left(\Gamma^m_{ip|k} - \Gamma^m_{ik|p} + \Gamma^r_{ip}\Gamma^m_{rk} - \Gamma^r_{ik}\Gamma^m_{rp}\right) v_m \qquad \text{(II.139)} \end{aligned}$$

q.e.d.

Einfacher Beweis für Darstellung der Christoffel-Symbole vermittels $D\underline{b}_i = 0$:

- Hintergrund des kovarianten Differentials ist der Bezug auf die „alte“ Basis, d.h. Basis ändert sich bei kovarianter Ableitung nicht

$$\begin{aligned} \underline{b}_{i||k} &= \underline{b}_{i|k} - \Gamma^l_{ik}\underline{b}_l \;=\; 0 \qquad \text{(II.140)} \\ \Gamma^l_{ik}\ \underline{b}_l\ \underline{b}^m &= \Gamma^l_{ik}\delta^m_l \;=\; \Gamma^m_{ik} \;=\; \underline{b}^m\ \underline{b}_{i|k} \qquad \text{(II.141)} \\ \Gamma^m_{ik} &= \underline{b}^m \cdot \underline{b}^n\ \underline{b}_n \cdot \underline{b}_{i|k}\ \text{, da} \qquad \text{(II.142)} \\ \underline{u}\cdot\underline{v} &= u^n v_n \;=\; \underline{u}\cdot\underline{b}^n\ \underline{v}\cdot\underline{b}_n \;=\; \underline{u}\cdot\underline{b}^n\ \underline{b}_n\cdot\underline{v} \qquad \text{(II.143)} \\ \Gamma^m_{ik} &= \frac{1}{2}\underline{b}^m\ \underline{b}^n\left(\underline{b}_{i|k}\ \underline{b}_n + \underline{b}_{k|i}\ \underline{b}_n\right) \qquad \text{(II.144)} \\ &= \frac{1}{2}\underline{b}^m\ \underline{b}^n\left\{(\underline{b}_i\ \underline{b}_n)_{|k} - \underline{b}_i\ \underline{b}_{n|k} + (\underline{b}_k\ \underline{b}_n)_{|i} - \underline{b}_k\ \underline{b}_n\right\} \\ &= \frac{1}{2}\underline{b}^m\ \underline{b}^n\left\{(\underline{b}_i\ \underline{b}_n)_{|k} + (\underline{b}_k\ \underline{b}_n)_{|i} - (\underline{b}_i\ \underline{b}_{k|n}) - (\underline{b}_i\ \underline{b}_{k|n}) - (\underline{b}_k\ \underline{b}_{i|n})\right\} \\ \Gamma^m_{ik} &= \frac{1}{2}g^{mn}\left(g_{in|k} + g_{kn|i} - g_{ik|n}\right) \qquad \text{(II.145)} \end{aligned}$$

q.e.d.

- $g_{ik||p} = (\underline{b}_i \cdot \underline{b}_k)_{||p} = 0$

Nachrechnen, dass Dv^i Tensor ist

$$\begin{aligned} Dv^i &= dv^i + \Gamma^i_{jk} v^j d\xi^k \qquad \text{(II.146)} \\ &= \left(\frac{\partial v^i}{\partial \xi^k} + \underline{b}^i \frac{\partial \underline{b}_j}{\partial \xi^k} v^j\right) d\xi^k \end{aligned}$$

zu zeigen:

$$\begin{aligned} Dv^{i'} &= A^{i'}_l\, Dv^l \qquad \text{(II.147)} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Geometrische Interpretation des kovarianten Differentials

- Betrachtung eines Vektors in P: $\underline{a} = a^i(P)\ \underline{b}_i(P)$
- Parallelverschiebung dieses Vektors um $d\xi$ in das infinitesimal benachbarte Ereignis $\overline{P} : \underline{a} = a^i(\overline{P})\ \underline{b}_i(\overline{P})$
- da sich Basis $\underline{b}_i$ ändert, ändern sich auch die Komponenten a^i , ohne dass sich $\underline{a}$ ändert
- zunächst Bildung von $d\underline{a}$

$$
\begin{aligned}
d\underline{a} \ = 0 \ &= \ \underline{a}(\overline{P}) - \underline{a}(P) && \text{(II.148)}\\
&= \ da^i\underline{b}_i + a^i d\underline{b}_i && \text{(II.149)}\\
\rightsquigarrow da^i\underline{b}_i \ &= \ -a^i d\underline{b}_i && \text{(II.150)}
\end{aligned}
$$

  Änderung der Basis muss durch Änderung der Komponenten kompensiert werden

- Bildung des kovarianten Differentials $D\underline{a}$

$$
\begin{aligned}
D\underline{a} \ &= \ 0 && \text{(II.151)}\\
&= \ Da^i\underline{b}_i + a^i D\underline{b}_i && \text{(II.152)}
\end{aligned}
$$

  hier gilt

$$D\underline{b}_i = 0 \qquad \text{(II.153)}$$

  da $\underline{a}(\overline{P})$zunächst nach P „zurückverschoben“ wird und damit in der Basis bei P betrachtet wird.

  Oder: $\underline{a}$ wird bei $\overline{P}$ betrachtet, indem die Basis von P zugrundegelegt wird.

  Folglich: Bei Betrachtung in der alten Basis ändern sich die Komponenten eines konstanten Vektors nicht:

$$Da^i = 0 \qquad \text{(II.154)}$$

5.2 Parallelverschiebung im krummlinigen Koordinatensystemen

- klar im flachen Raum, Hilfsgerade zw. P und $\overline{P}$, Beibehaltung der Winkel des Vektors zur Geraden, eindeutig auch bei Polygonzug.
- im gekrümmten Raum existiert keine Gerade, Gerade wird durch Geodäte (=kürzeste Entfernung zw. P und $\overline{P}$) ersetzt, Beibehaltung der Winkel zur Geodäten
- kein Fernparallelismus im gekrümmten Raum,
  z.B. Kugeloberfläche, „Polygonzug“ auch Geodäten = Großkreissegmente

  Übertragung RQP $\neq$ Übertragung RP

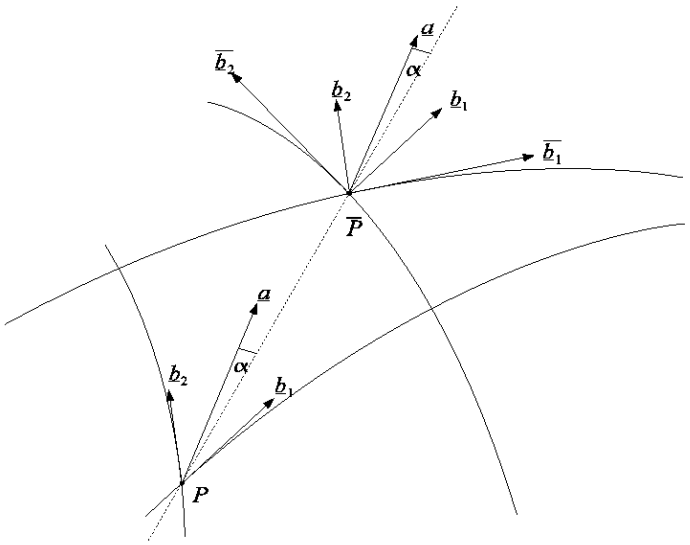


Abbildung II.9: Parallelverschiebung

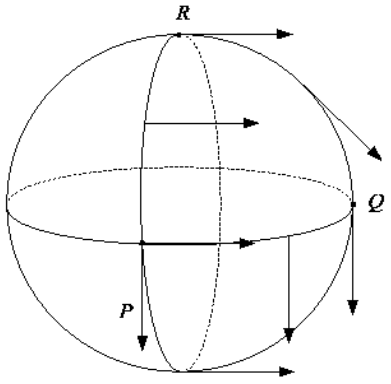


Abbildung II.10: Parallelverschiebung auf einer Kugel

Zusammenfassung

Tensoren im Riemannschen Raum

Koordinatentransformationen

$KS \leftrightarrow KS'$

$$\begin{aligned} \xi^{i'} &= \xi^{i'}(\xi^k), \\ \xi^k &= \xi^k(\xi^{i'}) \\ A^{i'}_k &= \frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \xi^k}, \\ A^k_{i'} &= \frac{\partial \xi^k}{\partial \xi^{i'}} \end{aligned}$$

Tensorkomponenten

$$T^{i'j'}_{\ \ k'l'}{}^{m'} = A^{i'}_n A^{j'}_o A^p_{k'} A^q_{l'} A^{m'}_r T^{no}_{\ \ pq}{}^r$$

Quotientensatz

$$\begin{aligned} T^{ij}Q_{ij} &= S \quad \text{, S Skalar (Invariante) , } T^{ij} \text{ Tensor} \\ &\longrightarrow Q_{ij} \quad \text{Tensor} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^{mn}a_{nm} &= 0 \\ \text{wenn} \quad s^{mn} &= s^{nm} \\ \text{und} \quad a_{nm} &= -a_{mn} \end{aligned}$$

Kovariante Ableitung, kovariantes Differential

Kovariante Ableitung

$$\begin{aligned} v^i{}_{||k} &= v^i{}_{|k} + \Gamma^i_{kl} v^l \\ v_{i||k} &= v_{i|k} - \Gamma^l_{ki} v_l \\ T^{ij}{}_{||k} &= T^{ij}{}_{|k} + \Gamma^i_{kl} T^{lj} + \Gamma^j_{kl} T^{il} \end{aligned}$$

Kovariantes Differential

$$Dv^i = v^i{}_{||k} d\xi^k = dv^i + \Gamma^i_{kl} v^l d\xi^k$$

Anwendung auf spezielle Objekte

$$\begin{aligned} \underline{b}_{i||k} &= 0, \\ \underline{b}^i{}_{||k} &= 0 \\ g_{ij||k} &= 0, \\ g^{ij}{}_{||k} &= 0 \end{aligned}$$

Geometrische Interpretation von Dv^i :

$$\underline{v}(\xi + d\xi) - \underline{v}(\xi) = dv^i \underline{b}_i + v^i d\underline{b}_i = Dv^i \underline{b}_i$$

Darstellung der infinitesimalen Differenz zweier Vektoren mittels nur <u>einer</u> Basis $\underline{b}_i$ im Punkt ξ

Christoffelsymbol

$$\Gamma^i_{kl} = \underline{b}^i \; \underline{b}_{k|l} = \frac{1}{2} g^{im} (g_{ml|k} + g_{mk|l} - g_{kl|m})$$

6 Geodäten

Definition: Geodäte zwischen A und B im Riemannschen Raum ist Kurve mit kürzestem Abstand, also

$$s = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{g_{ik} d\xi^i d\xi^k} = \quad \text{Minimum} \tag{II.155}$$

Sei $\xi^p(\lambda)$ gesuchte Kurve mit λ zunächst als beliebiger Kurvenparameter

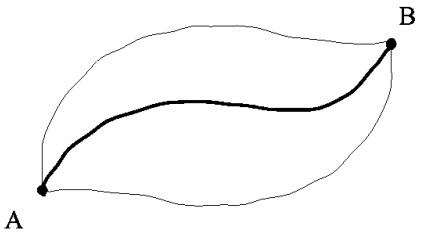


Abbildung II.11: Variation des Weges von A nach B

Hamiltonsche Prinzip

$$\delta \int_A^B \sqrt{g_{ik}\ \dot{\xi}^i\ \dot{\xi}^k}\ d\lambda \quad = \quad 0\ , \tag{II.156}$$

$$\text{mit} \quad \dot{\xi}^p \quad := \quad \frac{d\xi^p}{d\lambda}$$

Lagrange-Funktion

$$L(\xi, \dot{\xi}) = \sqrt{g_{ik}\ \dot{\xi}^i\ \dot{\xi}^k} = \frac{ds}{d\lambda} \tag{II.157}$$

Lagrange II

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^p} - \frac{\partial L}{\partial \xi^p} = 0 \tag{II.158}$$

- Wobei

$$\frac{\partial L}{\partial \xi^p} = \frac{1}{2L} g_{ik|p} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^k \tag{II.159}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^p} = \frac{1}{2L} (g_{ik} \delta^i_p \dot{\xi}^k + g_{ik} \dot{\xi}^i \delta^k_p) = \frac{g_{pk} \dot{\xi}^k}{L} \tag{II.160}$$

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^p} = \frac{1}{L} (g_{pk} \ddot{\xi}^k + g_{pk|l} \dot{\xi}^l \dot{\xi}^k) - \frac{g_{pk} \dot{\xi}^k}{L^2} \frac{dL}{d\lambda} \tag{II.161}$$

- Wahl eines geeigneten Kurvenparameters:

$$\lambda = as + b$$
(affiner Parameter; a,b Konstanten)

$$\rightsquigarrow \quad L = \frac{ds}{d\lambda} = const, \tag{II.162}$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = 0\ , \tag{II.163}$$

d.h. L=const entlang der Geodäten; jede Geodäte hat „ihr“ L ;

$$\begin{cases} L^2 > 0 & \text{raumartig} \\ L^2 = 0 & \text{lichtartig} \\ L^2 < 0 & \text{zeitartig} \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \quad g_{pk} \ddot{\xi}^k + g_{pk|l} \dot{\xi}^l \dot{\xi}^k - \frac{1}{2} g_{jk|p} \dot{\xi}^j \dot{\xi}^k = 0 \tag{II.164}$$

$$g_{pk|l} \dot{\xi}^l \dot{\xi}^k = \frac{1}{2} (g_{pl|k} + g_{pk|l}) \dot{\xi}^l \dot{\xi}^k \tag{II.165}$$

$$g_{pk} \ddot{\xi}^k + \frac{1}{2} (g_{pl|k} + g_{pk|l} - g_{lk|p}) \dot{\xi}^l \dot{\xi}^k = 0 \quad | \cdot g^{ip} \tag{II.166}$$

$$\ddot{\xi}^i + \frac{g^{ip}}{2} (g_{pl|k} + g_{pk|l} - g_{lk|p}) \dot{\xi}^l \dot{\xi}^k = 0 \tag{II.167}$$

- Geodätengleichung

$$\rightsquigarrow \quad \ddot{\xi}^i + \Gamma^i_{kl} \dot{\xi}^k \dot{\xi}^l = 0 \tag{II.168}$$

Minkowski- Raum $\xi^i = x^i$

$$
\begin{aligned}
g_{kl} = \eta_{kl} \quad &, \quad \Gamma^i_{kl} = 0 \\
\ddot{x}^i &= 0 \ : \\
\rightsquigarrow \quad x^1 &= v^1_0 \lambda + x^1_0 \\
x^2 &= v^2_0 \lambda + x^2_0 \\
x^3 &= v^3_0 \lambda + x^3_0 \\
ct &= c\lambda + ct_o
\end{aligned}
$$

Geodäte und kovariantes Differential

$$Dv^i = dv^i + \Gamma^i_{jk} v^j d\xi^k \tag{II.169}$$

$$v^i = \frac{d\xi^i}{d\lambda} =: \dot{\xi}^i \tag{II.170}$$

$$D\dot{\xi}^i = d\dot{\xi}^i + \Gamma^i_{jk} \dot{\xi}^j d\xi^k \qquad | : d\lambda \tag{II.171}$$

$$\frac{D\dot{\xi}^i}{d\lambda} = \ddot{\xi}^i + \Gamma^i_{jk} \dot{\xi}^j \dot{\xi}^k = 0 \tag{II.172}$$

$$\frac{D\dot{\xi}^i}{d\lambda} = 0 \quad \text{ist Geodäten-Gleichung in belieb. Koordinaten!} \tag{II.173}$$

Alternative Form der Geodäten-Gleichung, wenn die Eigenzeit τ als Kurvenparameter verwendet wird:

$$\ddot{\xi}^n + \Gamma^n_{ij} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j = 0 \qquad (\dot{\ }) = \frac{d(\ )}{d\tau} \tag{II.174}$$

Substitution

$$\dot{\xi}^n = u^n \tag{II.175}$$

$$\rightarrow \qquad \dot{u}^n + \Gamma^n_{ij} u^i u^j = 0 \tag{II.176}$$

$\dot{u}^n$ ausdrücken durch

$$\dot{u}^n = \frac{du^n}{d\tau} = \frac{\partial u^n}{\partial \xi^k} \frac{d\xi^k}{d\tau} = u^k{}_{|k}\, u^k \tag{II.177}$$

ergibt

$$u^k{}_{|k}\, u^k + \Gamma^n_{ik} u^i u^k = 0 \tag{II.178}$$

$$\left(u^n{}_{|k} + \Gamma^n_{ik} u^i \right) u^k = 0 \tag{II.179}$$

$$\boxed{u^n{}_{||k}\, u^k = 0} \tag{II.180}$$

$$\text{oder} \qquad u_{n\,||k} u^k = 0 \tag{II.181}$$

Geodäten des verallgemeinerten Variationsproblems

- jede Lagrange-Funktion $L = F(\sigma)$ mit $\sigma = g_{ik}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^k$
  führt auf Geodäten-Gleichung, wobei F beliebig monoton und differenzierbar

$$\delta \int_A^B F(\sigma(\xi, \dot{\xi}))d\lambda = 0 \ , \tag{II.182}$$

  λ zunächst wieder beliebig.

- L II

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial F}{\partial \dot{\xi}^p} - \frac{\partial F}{\partial \xi^p} = 0 \tag{II.183}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi^p} = F' g_{ik|p}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^k \tag{II.184}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{\xi}^p} = F' \ 2 \ g_{pk}\dot{\xi}^k \tag{II.185}$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{d}{d\lambda}(F' \ 2 \ g_{pk}\dot{\xi}^k) - F' g_{ik|p}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^k = 0 \tag{II.186}$$

- sei $\lambda = s$ (affiner Kurvenparameter)

$$\rightsquigarrow \quad \sigma = \left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = \left(\frac{ds}{ds}\right)^2 = 1 \quad \text{entlang der Geodäten} \tag{II.187}$$

$$\rightsquigarrow \quad g_{pk}\ddot{\xi}^k + g_{pk|l}\dot{\xi}^l\dot{\xi}^k - \frac{1}{2}g_{lk|p}\dot{\xi}^l\dot{\xi}^k = 0 \quad | \ g^{ip} \tag{II.188}$$

$$\rightsquigarrow \quad \ddot{\xi}^i + \Gamma^i_{kl}\dot{\xi}^k\dot{\xi}^l = 0 \tag{II.189}$$

- somit auch

$$L = \frac{m}{2}\dot{s}^2 = \frac{m}{2}g_{ik}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^k \tag{II.190}$$

  brauchbar

- für Geodäten-Gleichung wurde Dimension des Raumes nicht benötigt, somit kann für den 3-dim. flachen Raum $L = \frac{m}{2}g_{ab}\dot{\xi}^a\dot{\xi}^b$ gewählt werden; die kinetische Energie eines freien Teilchens der Masse m in generalisierten Koordinaten ξ^a

$$\rightsquigarrow \quad \ddot{\xi}^a + \Gamma^a_{bc}\dot{\xi}^b\dot{\xi}^c = 0 \tag{II.191}$$

  ist Geodäten-Gleichung bzw.

$$m\ddot{\xi}^a = -m\Gamma^a_{bc}\dot{\xi}^b\dot{\xi}^c \tag{II.192}$$

  wobei rechts die „Trägheitskräfte“ oder „Scheinkräfte“ stehen; eingeprägte Kräfte gibt es beim freien Teilchen nicht; Lösung ist natürlich die Gerade.

Geodäten-Gleichung bei allgemeinem Kurvenparameter $\lambda = f(s)$

- Ausgangspunkt

$$\frac{d^2\xi^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{d\xi^k}{ds}\cdot\frac{d\xi^l}{ds} = 0 \tag{II.193}$$

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{d\xi}{d\lambda}\cdot\frac{d\lambda}{ds} \tag{II.194}$$

$$\frac{d^2\xi}{ds^2} = \frac{d^2\xi}{ds\cdot d\lambda}\cdot\frac{d\lambda}{ds} + \frac{d\xi}{d\lambda}\cdot\frac{d^2\lambda}{ds^2} \tag{II.195}$$

$$= \frac{d^2\xi}{d\lambda 2}\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + \frac{d\xi}{d\lambda}\cdot\frac{d^2\lambda}{ds^2}$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{d^2\xi^i}{d\lambda^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{d\xi^k}{d\lambda}\cdot\frac{d\xi^l}{d\lambda} = h(\lambda)\cdot\frac{d\xi^i}{d\lambda} \tag{II.196}$$

$$\text{mit} \quad h(\lambda) = -\frac{\frac{d^2\lambda}{ds^2}}{\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2} \tag{II.197}$$

$$\text{bzw.} \quad \frac{d^2\lambda}{ds^2} + h\cdot\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 = 0 \tag{II.198}$$

- neuer Parameter λ wäre wieder affin, wenn $h = 0$, dann

$$\lambda = as + b$$

Die Geodäten-Gleichung (II.196) ist äquivalent zu (II.186), wenn

$$F(\sigma) = L = \sqrt{\sigma} = \frac{ds}{d\lambda} \quad , \quad \sigma = g_{ik}\,\dot{\xi}^i\dot{\xi}^k \tag{II.199}$$

gesetzt wird; also das ursprüngliche Variationsproblem (II.155)

$$s = \int_A^B \sqrt{\sigma}d\lambda = \text{Minimum}$$

betrachtet wird.

Beweis: Start von (II.186)

$$\frac{d}{d\lambda}\left(F'\ 2\ g_{pk}\dot{\xi}^k\right) - F' g_{ik|p}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^k = 0 \tag{II.200}$$

$$\frac{dF'}{d\lambda}\,2g_{pk}\dot{\xi}^k + F'2g_{pk\ |i}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^k + F'2g_{pk}\ddot{\xi}^k - F' g_{ik|p}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^k = 0 \tag{II.201}$$

$$\frac{dF'}{d\lambda}\,2g_{pk}\dot{\xi}^k + 2F'\left\{g_{pk}\ddot{\xi}^k + g_{pk|i}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^k - \frac{1}{2}g_{ik|p}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^k\right\} = 0 \tag{II.202}$$

$$\frac{1}{F'}\frac{dF'}{d\lambda}\dot{\xi}^n + g^{np}\left\{g_{pk}\ddot{\xi}^k + \frac{1}{2}g_{pk|i}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^k + \frac{1}{2}g_{pi|k}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^k - \frac{1}{2}g_{ik|p}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^k\right\} = 0 \tag{II.203}$$

$$\frac{1}{F'}\frac{dF'}{d\lambda}\dot{\xi}^n + \ddot{\xi}^n + \Gamma^n_{\ ik}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^k = 0 \tag{II.204}$$

$$\rightarrow \quad \ddot{\xi}^n + \Gamma^n{}_{ik}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^k = -\frac{1}{F'}\frac{dF'}{d\lambda}\dot{\xi}^n \tag{II.205}$$

$$F = \sqrt{\sigma} \tag{II.206}$$

$$F' = \frac{1}{2\sqrt{\sigma}} \tag{II.207}$$

$$\frac{dF'}{d\lambda} = -\frac{1}{4\sqrt{\sigma}^3}\frac{d\sigma}{d\lambda} = -\frac{1}{4\sqrt{\sigma}^3}\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 \tag{II.208}$$

$$\frac{1}{F'}\frac{dF'}{d\lambda} = -\frac{1}{2\sigma}2\frac{ds}{d\lambda}\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{ds}{d\lambda}\right) \tag{II.209}$$

$$\frac{1}{F'}\frac{dF'}{d\lambda} = -\frac{\frac{ds}{d\lambda}}{\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2}\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)\frac{ds}{d\lambda} \tag{II.210}$$

$$= -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\frac{d\lambda}{ds}}\right) = \frac{1}{\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2}\frac{d}{ds}\left(\frac{d\lambda}{ds}\right) \tag{II.211}$$

$$\frac{1}{F'}\frac{dF'}{d\lambda} = \frac{\dfrac{d^2\lambda}{ds^2}}{\left(\dfrac{d\lambda}{ds}\right)^2} \tag{II.212}$$

$$\Rightarrow \qquad \ddot{\xi}^n + \Gamma^n{}_{ik}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^k = \frac{\dfrac{d^2\lambda}{ds^2}}{\left(\dfrac{d\lambda}{ds}\right)^2} \tag{II.213}$$

q.e.d.

Zusammenfassung

Geodäten

Verallgemeinerung der Geraden im Riemannschen Raum

Kürzester Abstand:

$$\delta \int_A^B \sqrt{g_{ik} d\xi^i d\xi^k} = 0$$

Geodäten - Gleichung

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}^i + \Gamma^i_{kl} \dot{\xi}^k \dot{\xi}^l &= 0 \\ \dot{\xi}^m &= \frac{d\xi^m}{d\lambda} \quad , \lambda \text{ affiner Parameter} \end{aligned}$$

1.Zusatz: o.g. Geodäten-Gleichung auch für Lagrange-Funktionen der Form

$$L = L(\sigma) \quad \text{mit} \quad \sigma = g_{ik} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^k$$
$$\text{z.B.} \quad L = \frac{m}{2} g_{ik} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^k = \frac{m}{2} \left(\frac{ds}{d\lambda} \right)^2$$

2.Zusatz: λ nicht affin

$$\ddot{\xi}^i + \Gamma^i_{kl} \dot{\xi}^k \dot{\xi}^l = - \frac{\frac{d^2\lambda}{ds^2}}{\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2} \dot{\xi}^i$$

7 Geodäten in 2-d Polarkoordinaten

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= dr^2 + r^2 d\varphi^2,\ r = \xi^1\ ,\ \varphi = \xi^2 \\
g_{11} &= 1 \quad ,\ g_{22} = r^2 \quad ,\ g_{12} = 0 \\
\Gamma^i_{kl} &= \frac{1}{2} g^{im} \left(g_{mk|l} + g_{ml|k} - g_{kl|m} \right) \\
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2} g^{11} \left(g_{11|1} + g_{11|1} - g_{11|1} \right) = 0 \\
\Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2} g^{11} \left(g_{11|2} + g_{12|1} - g_{12|1} \right) = 0 \\
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2} g^{11} \left(g_{12|2} + g_{12|2} - g_{22|1} \right) = -\frac{1}{2} 2r = -r \\
\Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2} g^{22} \left(g_{21|1} + g_{21|1} - g_{11|2} \right) = 0 \\
\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2} g^{22} \left(g_{21|2} + g_{22|1} - g_{12|2} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} 2r = \frac{1}{r} \\
\Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2} g^{22} \left(g_{22|2} + g_{22|2} - g_{22|2} \right) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\ddot{\xi}^i + \Gamma^i_{kl} \dot{\xi}^l \dot{\xi}^k = 0
$$

1.

$$
\begin{aligned}
\ddot{\xi}^1 + \Gamma^1_{22} \dot{\xi}^2 \dot{\xi}^2 &= 0\ ; \\
\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 &= 0
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
\ddot{\xi}^2 + \Gamma^2_{12} \dot{\xi}^1 \dot{\xi}^2 + \Gamma^2_{21} \dot{\xi}^2 \dot{\xi}^1 &= 0\ ; \\
\ddot{\varphi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\varphi} &= 0
\end{aligned}
$$

Geradengleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ y &= mx + n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ar\cos(\varphi) + br\sin(\varphi) &= c \\ \dot{r}(a\cos\varphi + bsin\varphi) + r(-a\sin\varphi + b\cos\varphi)\dot{\varphi} &= 0 \\ \ddot{r}(a\cos\varphi + bsin\varphi) + 2\dot{r}(-a\sin\varphi + b\cos\varphi)\dot{\varphi} + & \\ r(-a\cos\varphi - b\sin\varphi)\dot{\varphi}^2 + r(-a\sin\varphi + b\cos\varphi)\ddot{\varphi} &= 0 \\ (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)(a\cos\varphi + b\sin\varphi) + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})(-a\sin\varphi + b\cos\varphi) &= 0 \\ (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)(a\cos\varphi + b\sin\varphi) + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{varphi})(-a\sin\varphi + b\cos\varphi) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \quad \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 &= 0, \\ \ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} &= 0 \\ & q.e.d. \end{aligned}$$

Geradengleichung ableiten:

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= r\dot{\varphi}^2 \\ \ddot{\varphi} &= -2\frac{\dot{r}}{r}\dot{\varphi} \\ \eta &= \dot{\varphi} \\ \rightsquigarrow \quad \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} &= \frac{\dot{\eta}}{\eta} = -2\frac{\dot{r}}{r} \\ \rightsquigarrow (\ln\dot{\eta}) &= -2(\ln\dot{r}) = \left(\ln\frac{\dot{1}}{r^2}\right) \\ \ln\eta &= \ln\frac{1}{r^2} + const \\ \rightsquigarrow \quad \eta &= \frac{const}{r^2} = \frac{k}{r^2} \\ \dot{\varphi} &= \frac{k}{r^2} \\ \rightsquigarrow \quad \ddot{r} &= \frac{k^2}{r^2} \end{aligned}$$

Ansatz für $r(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma} \\
\dot{r} &= \frac{1}{2r}(2\alpha\lambda+\beta) \\
\ddot{r} &= \frac{\alpha}{r} - \frac{1}{2}\frac{(2\alpha\lambda+\beta)^2}{2rr^2} = \frac{\alpha}{r} - \frac{(2\alpha\lambda+\beta)^2}{4r^3} \\
\ddot{r} - \frac{k^2}{r^3} &= \frac{\alpha}{r} - \frac{(2\alpha\lambda+\beta)^2}{4r^3} - \frac{k^2}{r^3} \;=\; 0 \\
\rightsquigarrow \quad r^2 &= \frac{(2\alpha\lambda+\beta)^2+4k^2}{4\alpha} \;\stackrel{!}{=}\; \alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma \\
\rightsquigarrow \quad \gamma &= \frac{\beta^2+4k^2}{4\alpha} \quad \text{bzw} \quad k^2 \;=\; \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4}
\end{aligned}$$

Umschrift der Konstanten α, β, γ :

$$\begin{aligned}
r^2 &= x^2+y^2 \;=\; (v_x\lambda+x_0)+(v_y\lambda+y_0)^2 \\
\rightsquigarrow \quad \alpha &= v_x^2+v_y^2 \\
\beta &= 2v_xx_0+2v_yy_0 \\
\gamma &= x_0^2+y_0^2 \\
\rightsquigarrow \quad k^2 &= \frac{1}{4}\left\{4(v_x^2+v_y^2)(x_0^2+y_0^2)-4(v_xx_0+v_yy_0)^2\right\} \\
k^2 &= \left\{v_x^2x_0^2+v_y^2y_0^2+v_x^2y_0^2+v_y^2x_0^2-v_x^2x_0^2-v_y^2y_0^2-2v_xv_yx_0y_0\right\} \\
k^2 &= (v_xy_0-v_yx_0)^2 \quad \left[=(\underline{v}_0\times\underline{x}_0)_z^2\right] \quad \propto \quad \text{Drehimpuls} \\
k &\stackrel{!}{=} -(v_xy_0-v_yx_0) \;=\; (\underline{x}_0\times\underline{v})_z \\
\rightsquigarrow \quad & \dot{\varphi}>0 \quad \text{bei „Rechtsdrehung“}
\end{aligned}$$

$\dot{\varphi}$ - Integration

$$
\begin{aligned}
\dot\varphi &= \eta = \frac{k}{r^2} = \frac{k}{\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma} \\
\dot\varphi &= \frac{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha}\frac{1}{\lambda^2+\frac{\beta}{\alpha}\lambda+\frac{\gamma}{\alpha}} \\
\dot\varphi = \frac{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha}\frac{1}{\left(\lambda+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}} &= \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}\frac{1}{\left(\lambda+\frac{\beta^2}{2\alpha}\right)^2+\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}} \\
\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\beta^2}{4\alpha^2} &= \frac{\beta^2}{4\alpha^2}+\frac{k^2}{\alpha^2}-\frac{\beta^2}{4\alpha^2} = \frac{k^2}{\alpha^2} \\
\dot\varphi &= \frac{k}{\alpha}\frac{1}{\left(\lambda+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{k^2}{\alpha^2}} = \frac{\alpha}{k}\frac{1}{1+\left(\frac{\lambda+\frac{\beta}{2\alpha}}{\frac{k}{\alpha}}\right)^2} \\
\tau &:= \frac{\lambda+\frac{\beta}{2\alpha}}{\frac{k}{\alpha}}, \\
d\tau &= \frac{\alpha}{k}d\lambda \\
\varphi &= \frac{\alpha}{k}\int d\lambda \frac{1}{1+\left(\frac{\lambda+\frac{\beta}{2\alpha}}{\frac{k}{\alpha}}\right)^2} \\
&= \int\frac{d\tau}{1+\tau^2} = \arctan\tau + const \\
\varphi &= \arctan\frac{\lambda+\frac{\beta}{2\alpha}}{\frac{k}{\alpha}} + const.
\end{aligned}
$$

Umschrift der Konstanten α, β, k :

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \arctan\left(\frac{\alpha}{k}\lambda+\frac{\beta}{2k}\right)+const \\
\varphi &= \arctan\left(-\frac{v_x^2+v_y^2}{v_xy_0-v_yx_0}\lambda-\frac{v_xx_0+v_yy_0}{v_xy_0-v_yx_0}\right)+const
\end{aligned}
$$

Additionstheorem:

$$
\arctan x+\arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy}
$$

Wahl der Integrationskonstanten :

$$
\lambda=0 \quad\rightsquigarrow\quad \varphi_0 = \arctan\frac{y_0}{x_0}
$$

$$
\begin{aligned}
\arctan\frac{y_0}{x_0} &= \arctan\left(-\frac{v_x x_0 + v_y y_0}{v_x y_0 - v_y x_0}\right) + const \\
const &= \arctan\frac{v_x x_0 + v_y y_0}{v_x y_0 - v_y x_0} + \arctan\frac{y_0}{x_0} \\
const &= \arctan\frac{\frac{v_x x_0 + v_y y_0}{v_x y_0 - v_y x_0} + \frac{y_0}{x_0}}{1 - \frac{v_x x_0 + v_y y_0}{v_x y_0 - v_y x_0} \cdot \frac{y_0}{x_0}} \\
const &= \arctan\frac{(v_x x_0 + v_y y_0)x_0 + (v_x y_0 - v_y x_0)y_0}{(v_x y_0 + v_y x_0)x_0 - (v_x x_0 + v_y y_0)y_0} \\
const &= \arctan\frac{v_x(x_0^2 + y_0^2)}{-v_y(x_0^2 + y_0^2)} = \arctan\left(-\frac{v_x}{v_y}\right) \\
\varphi &= \arctan\left(-\frac{v_x^2 + v_y^2}{v_x y_0 - v_y x_0}\lambda - \frac{v_x x_0 + v_y y_0}{v_x y_0 - v_y x_0}\right) + \arctan\left(-\frac{v_x}{v_y}\right) \\
\varphi &= \arctan\frac{-\frac{v_x^2 + v_y^2}{v_x y_0 - v_y x_0}\lambda - \frac{v_x x_0 + v_y y_0}{v_x y_0 - v_y x_0} - \frac{v_x}{v_y}}{1 + \left(-\frac{v_x^2 + v_y^2}{v_x y_0 - v_y x_0}\lambda - \frac{v_x x_0 + v_y y_0}{v_x y_0 - v_y x_0}\right) \cdot \frac{v_x}{v_y}} \\
\varphi &= \arctan\frac{-(v_x^2 + v_y^2)v_y\lambda - \{(v_x x_0 + v_y y_0)v_y + (v_x y_0 - v_y x_0) \cdot v_x\}}{(v_x y_0 - v_y x_0)v_y - (v_x^2 + v_y^2)\lambda v_x - (v_x x_0 + v_y y_0)v_x} \\
\varphi &= \arctan\frac{-(v_x^2 + v_y^2)v_y\lambda - (v_y^2 + v_x^2)y_0}{-(v_y^2 + v_x^2)x_0 - (v_x^2 + v_y^2)v_x\lambda} \\
\varphi &= \arctan\frac{v_y\lambda + y_0}{v_x\lambda + x_0} = \arctan\frac{y}{x}
\end{aligned}
$$

Zusammenfassung :

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{\alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma} = \sqrt{(v_x\lambda + x_0)^2 + (v_y\lambda + y_0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \\
\varphi &= \arctan\left(\frac{\alpha}{k}\lambda + \frac{\beta}{2k}\right) + const = \arctan\frac{v_y\lambda + y_0}{v_x\lambda + x_0} = \arctan\frac{y}{x}
\end{aligned}
$$

Gerade als Geodäte bestätigt!

8 Kovariante Differentialoperatoren

Mittels kovarianter Ableitung ist Angabe von grad, rot, div in krummlinigen Koordinaten äußerst einfach.

Determinante des metrischen Tensors

- indizierter Index für nächste Rechnung $i_1, \ldots, i_4$

$$g = \Delta^{i_1 i_2 i_3 i_4} g_{1i_1} g_{2i_2} \ldots g_{4i_4} \tag{II.214}$$

Differentiation nach ξ^l mit Anwendung der Leibnitz-Produkt-Regel

$$
\begin{aligned}
g_{|l} &= \sum_{n=1}^{4} \Delta^{i_1 \ldots i_4} g_{1i_1} \cdots g_{ni_n|l} \cdots g_{4i_4} && \text{(II.215)}\\
g_{ni_n|l} &= g_{nm|l}\delta^m_{i_n} = g_{nm|l} g^{mr} g_{ri_n} && \text{(II.216)}\\
g_{|l} &= \sum_{n=1}^{4} \Delta^{i_1 \ldots i_4} g_{1i_1} \cdots g_{nm|l} g^{mr} g_{ri_n} \cdots g_{4i_4} && \text{(II.217)}\\
&= \sum_{n=1}^{4} g_{nm|l} g^{mr} \Delta^{i_1 \ldots i_4} g_{1i_1} \cdots g_{ri_n} \cdots g_{4i_4} && \text{(II.218)}\\
&\quad (\ g_{ni_n} \text{ zugunsten von } g_{ri_n} \text{ ersetzt }\ )
\end{aligned}
$$

- Betrachtung der Summation über n und Summanden mit $r \neq n$: enthalten sind Produkte $g_{ri_n} \cdot g_{ri_r}$, die symmetrisch in i_n und i_r sind; $\Delta^{i_1 \ldots i_4}$ ist aber antisymmetrisch, so dass alle diese Terme verschwinden.
- überlebt nur Summand mit $r = n$:

$$
\begin{aligned}
g_{|l} &= g_{nm|l}\ g^{mn}\ g && \text{(II.219)}\\
-g_{|l} &= -g\ g_{nm|l}\ g^{mn} && \text{(II.220)}\\
(\ln(-g))_{|l} &= g^{mn}\ g_{nm|l} && \text{(II.221)}
\end{aligned}
$$

Transformationseigenschaft von g

$$
g_{i'j'} = A_{i'}{}^{k} A_{j'}{}^{l}\ g_{kl} \qquad \text{(II.222)}
$$

- Determinantenbildung via

$$
\begin{aligned}
g_{i'j'} &= A_{i'}{}^{k} g_{kl} A^{l}{}_{j'} && \text{(II.223)}\\
\rightsquigarrow \quad g' &= \det(A_{i'}{}^{k}) \cdot g \cdot \det(A_{j'}{}^{l})^T && \text{(II.224)}\\
&= \{\det(A_{j'}{}^{k})\}^2 g && \text{(II.225)}\\
g' &= A^2 g && \text{(II.226)}\\
\text{mit} \quad A &= \det\left(A_{i'}{}^{k}\right) = \det\left(\frac{\partial \xi^k}{\partial \xi^{i'}}\right) \quad \text{Jacobi - Det.} && \text{(II.227)}\\
&\quad \rightsquigarrow \quad g \text{ i.a. kein Tensor}
\end{aligned}
$$

- g',g ändern nie Vorzeichen! Da Riemannsche Räume betrachtet werden, die lokal die Einführung eines Minkowski-Systems gestatten, gilt $g',\ g < 0$.

ϵ - Tensor

- Δ^{ijkl} ist i.a. Riemannschen Raum kein Tensor, wohl aber im Minkowski-Raum, denn dort gehen die Transformationsmatrizen $A^{i'}_{j}$ in die Lorentz-Matrizen $L^{i'}_{j}$ über

- nach Definition des Levi-Civita-Symbols muss gelten $\Delta'^{\cdots} = \Delta^{\cdots}$,
  um Lorentz-Tensor zu sein, muss auch gelten

$$\Delta^{i'j'k'l'} = L^{i'}_{i} L^{j'}_{j} L^{k'}_{k} L^{l'}_{l} \Delta^{ijkl} \tag{II.228}$$

- nun gilt aber

$$\det\left(L^{i'}_{i}\right) = \Delta^{ijkl} L^{1}_{i} L^{2}_{j} L^{3}_{k} L^{4}_{l} \tag{II.229}$$

  oder auch

$$\Delta^{i'j'k'l'} \det(L^{i'}_{i}) = \Delta^{ijkl} L^{i'}_{i} L^{j'}_{j} L^{k'}_{k} L^{l'}_{l} \tag{II.230}$$

- für eigentliche Lorentz-Transformationen (auf die wir uns hier beschränken) gilt aber

$$\det\left(L^{i'}{}_{i}\right) = 1$$

  und somit

$$\Delta^{i'j'k'l'} = L^{i'}_{i} L^{j'}_{j} L^{k'}_{k} L^{l'}_{l} \Delta^{ijkl} \tag{II.231}$$

  und Δ^{ijkl} ist Tensor im Minkowski-Raum oder Lorentz- Tensor

- Durchführung einer Koordinatentransformation von Minkowski-Koordinaten zu beliebigen Krummlinigen Koordinaten und Definition von

$$\begin{aligned}
\epsilon^{i'j'k'l'} &:= \frac{\partial \xi^{i'}}{\partial x^{i}} \frac{\partial \xi^{j'}}{\partial x^{j}} \frac{\partial \xi^{k'}}{\partial x^{k}} \frac{\partial \xi^{l'}}{\partial x^{l}} \Delta^{ijkl} && \text{(II.232)}\\
&= A^{i'}_{i} A^{j'}_{j} A^{k'}_{k} A^{l'}_{l} \Delta^{ijkl} && \text{(II.233)}\\
&= A^{-1} \cdot \Delta^{i'j'k'l'}; && \text{(II.234)}
\end{aligned}$$

nun ist i.a.

$$A = \sqrt{\frac{g'}{g}}, \tag{II.235}$$

$$\text{hier aber} \quad A = \sqrt{-g'}, \tag{II.236}$$

da von Minkowski- Raum mit $g = -1$ ausgegangen wurde; somit

$$\epsilon^{i'j'k'l'} = \frac{\Delta^{i'j'k'l'}}{\sqrt{-g'}} \tag{II.237}$$

- ϵ^{ijkl} ist ein Riemann-Tensor 4. Stufe, denn

$$\epsilon^{i'j'k'l'} \stackrel{!}{=} A_i^{i'} A_j^{j'} A_k^{k'} A_l^{l'} \epsilon^{ijkl} \tag{II.238}$$

$$\frac{\Delta^{i'j'k'l'}}{\sqrt{-g'}} = A_i^{i'} A_j^{j'} A_k^{k'} A_l^{l'} \frac{\Delta^{ijkl}}{\sqrt{-g'}} \tag{II.239}$$

$$= A^{-1} \frac{\Delta^{i'j'k'l'}}{\sqrt{-g}}$$

$$A = \sqrt{\frac{g'}{g}} \tag{II.240}$$

q.e.d.

Transformation des Volumenelementes

- bekanntlich gilt

$$d^4\xi = A\, d^4\xi' \quad | \; d^4\xi = d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4 \tag{II.241}$$

$$A = \det\left(A^i_{j'}\right) \quad \text{Jacobi - Determinante} \tag{II.242}$$

$$A = \sqrt{\frac{g'}{g}} = \sqrt{\frac{-g'}{-g}} \tag{II.243}$$

- folglich

$$\sqrt{-g}\; d^4\xi = \sqrt{-g'}\; d^4\xi' \tag{II.244}$$

  und $\sqrt{-g}\; d^4\xi$ ist Tensor 0. Stufe

- gilt für beliebige Dimensionen und ebenso für $g \to -g$
- Beispiel: 3-dimensional

$$\xi = (x, y, z) \qquad \xi' = (r, \Theta, \varphi)$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad ds^2 = dr^2 + r^2 d\Theta^2 + r^2 sin^2\Theta d\varphi^2$$

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad g_{a'b'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 sin^2\Theta \end{pmatrix}$$

$$g = 1 \qquad g' = r^4 sin^2\Theta$$

$$dxdydz = r^2 \sin\Theta dr d\Theta d\varphi$$

Gradient in krummlinigen Koordinaten und beliebiger Dimension

- kovariante Ableitung eines Skalars geht in partielle Ableitung über

$$S_{||k} = S_{|k}, \tag{II.245}$$
$$\mathrm{grad}S = S_{|k}\underline{b}^k = S^{|k}\underline{b}_k \tag{II.246}$$

- Beispiel: 2-dim. Polarkoordinaten; $g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varrho^2 \end{pmatrix}$, $g^{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varrho^2} \end{pmatrix}$

$$\xi = (\varrho, \varphi) \tag{II.247}$$
$$S_{|1} = \frac{\partial S}{\partial \varrho} \tag{II.248}$$
$$S_{|2} = \frac{\partial S}{\partial \varphi} \tag{II.249}$$

$$g_{11} = \underline{b}_1 \cdot \underline{b}_1 = 1 \quad \rightarrow \quad |\underline{b}_1| = 1 \tag{II.250}$$
$$g^{11} = \underline{b}^1 \cdot \underline{b}^1 = 1 \quad \rightarrow \quad |\underline{b}^1| = 1 \tag{II.251}$$

Dann definieren wir $\underline{e}_\varrho := \underline{b}_1 = \underline{b}^1$ mit $|\underline{e}_\varrho| = 1$

$$g_{22} = \underline{b}_2 \cdot \underline{b}_2 = \varrho^2 \quad \rightarrow \quad |\underline{b}_2| = \varrho \tag{II.252}$$
$$g^{22} = \underline{b}^2 \cdot \underline{b}^2 = \frac{1}{\varrho^2} \quad \rightarrow \quad |\underline{b}^2| = \frac{1}{\varrho} \tag{II.253}$$

Dann definieren wir $\underline{e}_\varphi := \frac{1}{\varrho}\,\underline{b}_2 = \varrho\,\underline{b}^2$ mit $|\underline{e}_\varrho| = 1$

$$\rightarrow \quad \mathrm{grad}S = S_{|1}\,\underline{b}^1 + S_{|2}\,\underline{b}^2 = \frac{\partial S}{\partial \varrho}\,\underline{e}_\varrho + \frac{\partial S}{\partial \varphi}\frac{1}{\varrho}\underline{e}_\varphi \quad . \tag{II.254}$$

Die Rotation ist eine an den 3-dimensionalen Raum angepasste Konstruktion. Ihre Verallgemeinerung für beliebige Dimensionen ist der folgende antisymmetrische Tensor:

- Definition: antisymmetrischer Tensor

$$v_{i||k} - v_{k||i} \tag{II.255}$$

- folglich

$$v_{i||k} - v_{k||i} = (v_{i|k} - \Gamma^p_{ik}v_p) - (v_{k||i} - \Gamma^p_{ki}v_p) = v_{i|k} - v_{k|i} \tag{II.256}$$

- Besonderheit in 3 Dimensionen

  $v_{a||b} - v_{b||a}$ hat 3 unabhängige nichtverschwindende Komponenten
  $\rightsquigarrow$ Zusammenfassung in einem 3-Vektor

  kartesisch:

$$(\mathrm{rot}\underline{v})^a = \Delta^{abc}v_{c|b} = \frac{1}{2}\Delta^{abc}(v_{c|b} - v_{b|c}) \tag{II.257}$$

krummlinig:

$$\begin{aligned}(\mathrm{rot}\underline{v})^a &= \frac{1}{2}\epsilon^{abc}(v_{c||b} - v_{b||c}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\Delta^{abc}}{\sqrt{g}}(v_{c|b} - v_{b|c}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\Delta^{abc}v_{c|b} \end{aligned} \tag{II.258}$$

Divergenz in krummlinigen Koordinaten und beliebigen Dimensionen

- Minkowski-Raum : $\quad \mathrm{div}\ \underline{v} = v^i{}_{|i}$
- Riemannscher Raum : $\quad \mathrm{div}\ \underline{v} = v^i{}_{||i}$

$$v^i{}_{||i} = v^i{}_{|i} + \Gamma^i_{ik}v^k \tag{II.259}$$

- Kontraktion des Christoffel-Symbols

$$\Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2}g^{im}(g_{mi|k} + g_{mk|i} - g_{ik|m}) \tag{II.260}$$

$$g^{im}g_{mk|i} = g^{im}g_{ik|m} \quad \text{Symmetrie} \quad i \leftrightarrow m \tag{II.261}$$

$$\Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2}g^{im}g_{mi|k} = \frac{1}{2}\frac{g_{|k}}{g} = (\ln\sqrt{-g})_{|k} = \frac{(\sqrt{-g})_{|k}}{\sqrt{-g}} \tag{II.262}$$

- Daher

$$v^i{}_{||i} = v^i{}_{|i} + \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g})_{|k}v^k \tag{II.263}$$

$$v^i{}_{||i} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}v^k)_{|k} \tag{II.264}$$

Gaußscher Satz in krummlinigen Koordinaten und beliebigen Dimensionen

- kartesisch, 3-dim.

$$\int\limits_V d^3x\ v^a_{|a} = \int\limits_{(V)} df_a v^a \tag{II.265}$$

- Minkowski - Raum

$$\int\limits_V d^4x\ v^i_{|i} = \int\limits_{(V)} df_i v^i \tag{II.266}$$

- Riemannscher Raum

$$\int\limits_V \sqrt{-g}\; d^4\xi\; v^i_{||i} = \int\limits_V d^4\xi(\sqrt{-g}v^i)_{|i} = \int\limits_{(V)} df_i\sqrt{-g}v^i \tag{II.267}$$

Bemerkung zu Integralsätzen im Riemannschen Raum

- Gaußscher Satz im 4-dim Raum verknüpft 4-dim Volumen mit 3-dim Hyperfläche
- Es existieren weitere Integralsätze: Verknüpfung einer 3-dim Hyperfläche mit 2-dim Fläche sowie Verknüpfung einer 2-dim Fläche mit einem Kurven-Integral (äquivalent zum Stokesschen Satz).

Zusammenfassung

Kovariante Differentialoperatoren

Verallgemeinerung von grad,rot,div etc. im RR mittels kovarianter Ableitung

$$\begin{aligned} \text{grad } S &\longrightarrow S_{||i} = S_{|i} \\ \text{rot } \underline{v} &\longrightarrow v_{i||k} - v_{k||i} = v_{i|k} - v_{k|i} \\ \text{div } \underline{v} &\longrightarrow v^i{}_{||i} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}v^i)_{|i} \end{aligned}$$

Determinante des metrischen Tensors

$$g = \det(g_{ik}) = \Delta^{ijkl} g_{1i} g_{2j} g_{3k} g_{4l}$$

Transformation von g

$$\begin{aligned} g' &= A^2 g \\ A &= \det(A^k_{i'}) \\ A^k_{i'} &= \frac{\partial \xi^k}{\partial \xi^{i'}} \end{aligned}$$

Levi-Civita-Symbol

$$\Delta^{i'j'k'l'} = \Delta^{ijkl} \quad \text{(kein Riemann - Tensor)}$$

ϵ - Tensor

$$\epsilon^{ijkl} = \frac{\Delta^{ijkl}}{\sqrt{-g}} \quad \text{(Riemann - Tensor)}$$

Volumenelement $\quad d^4\xi \;:=\; d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4$

$$\sqrt{-g'} d^4\xi' = \sqrt{-g} d^4\xi \quad \text{(Riemann - Tensor 0. Stufe)}$$

Gaußscher Satz

$$\int\limits_V v^i{}_{||i}\sqrt{-g}d^4\xi = \int\limits_V (\sqrt{-g}v^i)_{|i}d^4\xi = \int\limits_{(V)} \sqrt{-g}\ v^i\ df_i$$

9 Spezielle Koordinatensysteme

Orthogonale Koordinaten

- es gilt

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{11}(d\xi^1)^2 + g_{22}(d\xi^2)^2 + g_{33}(d\xi^3)^2 + g_{44}(d\xi^4)^2 && \text{(II.268)} \\ g_{ij} &= 0 \quad \text{für} \quad i \neq j && \text{(II.269)} \\ \text{bzw.} \quad \underline{b}_i \cdot \underline{b}_j &= 0 && \text{(II.270)} \\ \text{bzw.} \quad \underline{b}_i &\perp \underline{b}_j && \text{(II.271)} \end{aligned}$$

- orthogonale Koordinaten sind nicht immer einführbar, denn:
  KS' sei beliebiges nichtorthogonales System
  KS sei das zu erzeugende orthogonale System

$$\begin{aligned} \xi^k &= \xi^k(\xi') \\ \text{Transformation} \quad \xi' &\rightarrow \xi \\ k \neq l: \quad g_{i'j'} A^{i'}_k A^{j'}_l &= g_{kl} = 0 \end{aligned}$$

  $\hat{=}$ 6 part. Dgln für 4 Funktionen $\xi^k(\xi')$ bzw. $\xi^{i'}(\xi)$

- orthogonale Koord. in 3-dim. Raum

$$a \neq b: \quad g_{c'd'} A^{c'}_a A^{d'}_b = g_{ab} = 0$$

  3 part. Dgln für 3 Funktionen $\xi^a(\xi')$,
  i.a. möglich auf eine bestimmte Weise

- orthogonale Koordinaten im 2-dim Raum

$$g_{ab} = 0; \quad a, b = 1, 2$$

  1 Bedingung für 2 Funktionen $\xi^a(\xi')$; mehr als eine Möglichkeit des Übergangs von beliebigen zu orthogonalen Koordinaten

Zeitorthogonale Koordinaten

ξ^4 nennen wir „Zeit“ , z.B. $\xi^4 = ct$

- es gilt

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ab} d\xi^c d\xi^b + g_{44}(d\xi^4)^2, \\ g_{a4} &= 0 \\ \Rightarrow \quad g^{a4} &= 0 \quad \text{(ÜA)} \\ \text{also} \quad \underline{b}_a \cdot \underline{b}_4 &= 0 \ , \\ \underline{b}_a &\perp \underline{b}_4 \end{aligned}$$

- immer einführbar, denn $g_{a4} = 0$ sind 3 Bedingungsgleichungen für 4 Funktionen $\xi^i(\xi')$; es ist sogar erreichbar

$$ds^2 = g_{ab} d\xi^a d\xi^b \pm (d\xi^4)^2 \quad \text{(Gaußsche Koordinaten)} \tag{II.272}$$

Vorstellung einer Strömung eines Fluides im 3-dim Raum, wobei $\xi^{a'}$ räumliche und $\xi^{4'}$ zeitliche Koordinaten darstellen. Ist es nun möglich, ein Koordinatensystem KS zu finden, dass vollständig mit dem Fluid mit schwimmt, und damit das Fluid in dem zu findenden Koordinatensystem dann ruht?

- Geschwindigkeitsfeld

$$u^{i'}(\xi) = \frac{d\xi^{i'}}{d\lambda} \tag{II.273}$$

  mit λ invarianter Parameter, z. B. s

- KS' beliebig
- KS mitbewegt, d.h. $u^a = 0$, $u^4 \neq 0$
- mitbewegte Koordinaten sind immer einführbar, denn:

$$u^i = A^i_{j'} u^{j'} \quad \text{, da} \quad u^i \propto d\xi^i \tag{II.274}$$

$$u^a = 0 \ : \ 0 = \frac{\partial \xi^a}{\partial \xi^{j'}} u^{j'} \tag{II.275}$$

$$\hat{=} \ 3 \quad \text{entkoppelten Dgln. für} \quad \xi^a(\xi') \tag{II.276}$$

$$\Rightarrow \xi^a(\xi') \quad \text{bestimmbar} \tag{II.277}$$

- u^4 kann nicht zu 0 transformiert werden, denn dann entstünde homogenes System

$$0 = \frac{\partial \xi^i}{\partial \xi^{j'}} u^{j'} \tag{II.278}$$

  und die Jacobi- Determinante verschwindet; es wird jedoch gefordert

$$\det\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial \xi^{j'}}\right) = \det A^i_{j'} \neq 0 \tag{II.279}$$

Lokale Minkowski - Koordinaten

- ein Koordinatensystem mit in jedem Ereignis orthogonalen Koordinatenlinien lässt sich im 4-dim. Riemannschen Raum i.a. nicht einführen (s.o.)
- in einem beliebig vorgegebenen Punkt ξ_0 sind orthogonale Koordinaten aber sehr wohl möglich; anschaulich klar; mathematisch klar, da die konstante Metrik $g_{i'k'}(\xi'_0)$ immer auf Hauptachsen transformiert werden kann, also

$$ds^2 = g_{1'1'}(\xi'_0)(d\xi^{1'})^2 + ... + g_{4'4'}(\xi'_0)(d\xi^{4'})^2 \tag{II.280}$$

sowie Koordinaten- Streckung

$$\xi^1 = \sqrt{|g_{1'1'}|}\,\xi^{1'} \quad \text{, usw , also} \tag{II.281}$$
$$ds^2 = \pm(d\xi^1)^2 \pm (d\xi^2)^2 \pm (d\xi^3)^2 \pm (d\xi^4)^2 \tag{II.282}$$

- aus mathematischer Sicht lässt sich über die Vorzeichen keine weitere Aussage machen; aus physikalischer Sicht fordern wir den Anschluss an den Minkowski-Raum (3+,1-) , also z.B.

$$ds^2 = (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 + (d\xi^3)^2 - (d\xi^4)^2 \tag{II.283}$$
$$ds^2 = \eta_{ij} d\xi^i d\xi^j \tag{II.284}$$

- Bemerkung: In physikalisch relevanten Räumen kann es singuläre Ereignisse geben, in denen

$$ds^2 = \eta_{ij} dx^i dx^j \tag{II.285}$$

  nicht möglich ist, z.B. im Innern Schwarzer Löcher

- im Ereignis ξ_0 ist damit ein Minkowski-System eingeführt; ein solches Minkowski-System kann sogar noch auf die (differentielle) Umgebung von ξ_0 ausgedehnt werden

- Beispiel im 2-dim Raum

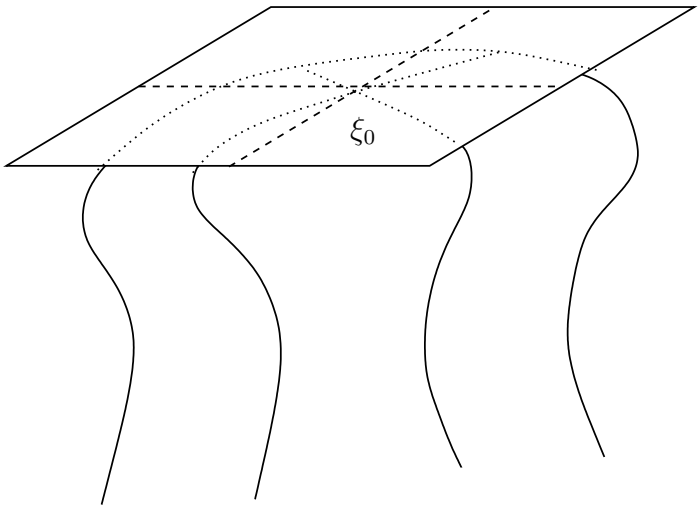


Abbildung II.12: Tangentialfläche

Abweichungen zwischen Fläche und Tangentialebene in Umgebung von ξ_0 von 2.Ordnung

- 4- dim. Raum : Projektion der Koordinaten des Tangential-Minkowski-Raumes auf den

Riemannschen Raum bei ξ_0

$$\Rightarrow \quad g_{mn}(\xi) = \eta_{mn} + \frac{1}{2} d_{mnjk}(\xi^i - \xi_0^i)(\xi^k - \xi_0^k) \tag{II.286}$$

$$\text{für} \quad \xi^k \in U(\xi_0^k)$$

$$\text{oder mit} \quad x^i = \xi^i - \xi_0^i$$

$$g_{mn}(x) = \eta_{mn} + \frac{1}{2} d_{mnik}\, x^i x^k \tag{II.287}$$

- Tangential-Minkowski-Raum wird lokal ebenes System genannt
- Bedingung

$$g_{mn|p}(\xi_0) = 0 \tag{II.288}$$

ist als Definitions- Gleichung für die lokalen Minkowski-Koordinaten aufzufassen

- damit verschwinden im lokalen Minkowski-System auch alle Christoffel-Symbole:

$$\Gamma^i_{mn}(\xi_0) = 0 \ , \tag{II.289}$$

jedoch nicht die Ableitungen

$$\Gamma^i_{mn|p}(\xi_0) \neq 0 \quad \text{(i.a.)} \tag{II.290}$$

- wg. $\Gamma^i_{mn} = 0$ gehen Geodäten-Gleichungen allg.

$$\frac{d^2\xi^i}{d\lambda^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{d\xi^k}{d\lambda} \frac{d\xi^l}{d\lambda} = 0 \tag{II.291}$$

(λ affiner Parameter)

$$\text{in} \quad \frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} = 0 \tag{II.292}$$

über; gilt natürlich nur lokal; d.h. Koordinatenlinien sind Geodäten, z.B. x^1 variabel; x^2, x^3, x^4 je konstant
$\Rightarrow$ lokales Minkowski-System wird auch lokal geodätisches System genannt.

- wie gut die Ersetzung des gekrümmten durch den Tangentialraum ist, hängt von der Grösse der Koeffizienten d_{mnik} ab; als Maß für Krümmung des Raumes zu vermuten
- lokal geodätische Systeme sind genau die Systeme der klassischen Physik!

Interpretation von Koordinatensystemen

- Koordinaten sind Namen für Ereignisse in der Welt
- Koordinaten haben mit physikalischen Eigenschaften zunächst nichts zu tun

- Auswahl spezieller Koordinaten durch reine Zweckmäßigkeit, manche sind leichter interpretierbar
- alle Koordinatensysteme sind gleichwertig
- nach Einführung eines Koordinatensystems lässt sich die Metrik des Raumes ausmessen: Längen, Winkel, ...
- als physikalische Messgrößen eignen sich nur solche Größen, die unabhängig von Koordinatesystem sind; Messgrößen lassen sich invariant schreiben
- Inertialsysteme sind lokal immer einfi¿$\frac{1}{2}$hrbar; physikalisch sind sie letzlich nicht ausgezeichnet, da sie global nicht existieren
- Historische Bemerkung: Streit zw. Ptolemäus und Kopernikus;
  physikalisch gleichwertig und „richtig“ , heliozentrisches System ist zweckmäßiger und es ist in größeren Umfeld näherungsweise inertial; heliozentr. System ist unbestritt. philosoph. Fortschr.

9.1 Zusammenfassung

9.1.1 Spezielle Koordinatensysteme

Orthogonale Koordinaten

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{11}(d\xi^1)^2 + g_{22}(d\xi^2)^2 + g_{33}(d\xi^3)^2 + g_{44}(d\xi^4)^2 \\ g_{ik} &= \underline{b}_i\underline{b}_k = 0, \\ \underline{b}_i &\perp \underline{b}_k \quad \text{für} \quad i \neq k \end{aligned}$$

4 - dim. RR : nicht immer einführbar
3 - dim. RR : eindeutig einführbar
2 - dim. RR : mehrdeutig einführbar

Zeitorthogonale Koordinaten :

$$\begin{aligned} \xi^4 &= ct \\ ds^2 &= g_{ab}d\xi^a d\xi^b + g_{44}dct^2 \\ g_{a4} &= \underline{b}_a\underline{b}_4 = 0, \\ \underline{b}_a &\perp \underline{b}_4 \end{aligned}$$

immer einführbar
z.B. Gaußsche Koordinaten:

$$\begin{aligned} g_{44} &= \pm 1 \\ ds^2 &= g_{ab}d\xi^a d\xi^b \pm dct^2 \end{aligned}$$

Mitbewegte Koordinaten

$$\begin{aligned} u^i &= \frac{d\xi^i}{d\lambda}, \\ u^a &\stackrel{!}{=} 0 \quad \text{, immer einführbar} \end{aligned}$$

Lokale Minkowski - Koordinaten (Lokale IS)

$$\begin{aligned} \xi \in U(\xi_0) \ : \quad ds^2 &= g_{ik}(\xi_0)d\xi^i d\xi^k \\ \text{mathematisch:} \qquad &= \pm(d\xi^{1'})^2 \pm (d\xi^{2'})^2 \pm (d\xi^{3'})^2 \pm (d\xi^{4'})^2 \\ \text{physikalisch:} \qquad &= (d\xi^{1'})^2 + (d\xi^{2'})^2 + (d\xi^{3'})^2 - (d\xi^{4'})^2 \end{aligned}$$

10 Krümmungstensor

- bisher stand Krümmung der Koordinaten im Vordergrund, Krümmung des Raumes nur am Rande, Standardbeispiel Kugeloberfläche im 2 dim. Raum

- krummlinige Koordinaten sind natürlich auch im flachen Raum möglich, z.B. ebene Polarkoordinaten

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 \tag{II.293}$$

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix} \quad a,b = 1,2 \tag{II.294}$$

- im flachen Raum existiert eine Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} \xi &\Rightarrow x, \\ x^{i'} &= x^{i'}(\xi^j) \\ \text{bzw.} \quad \xi^i &= \xi^i(x^{j'}) \end{aligned}$$

  die die krummlinigen Koordinaten ξ in kartesischen Koordinaten bzw. Minkowski-Koordinaten x überführt

- die Koordinatentransformation findet man auf folgende Weise, es gilt

$$\eta_{i'j'} = A^k_{i'} A^l_{j'} g_{kl} = \frac{\partial \xi^k}{\partial x^{i'}} \cdot \frac{\partial \xi^l}{\partial x^{j'}} g_{kl}(\xi) \tag{II.295}$$

$$\text{bzw.} \quad g_{ij}(\xi) = A^{k'}_i A^{l'}_j \eta_{k'l'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial x^{l'}}{\partial \xi^j} \eta_{k'l'} \tag{II.296}$$

- z.B. die untere Gleichung ist aufzufassen als System von Dgl. für die gesuchten Funktionen $x^{i'}(\xi^j)$; gesucht sind 4 Funktionen $x^{i'}(\xi^j)$ bei 10 Dgln. , d.h. $\exists$ nur Lösungen unter bestimmten Bedingungen, eben wenn $g_{ij}(\xi)$ einen flachen und nicht wirklich gekrümmten Raum beschreibt

- technisch leicht lösbar ist das Dgl-System i.a. nicht, so dass dies als Bewertungskriterium für die Raum-Krümmung entfällt

- 1. Beispiel: Ebene Polarkoordinaten $\Rightarrow$ ebene kartes. Koordinaten

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 = dx^2 + dy^2 \tag{II.297}$$
$$(\xi^1, \xi^2) = (\rho, \varphi) \quad : KS \tag{II.298}$$
$$(x^{1'}, x^{2'}) = (x, y) \quad : KS' \tag{II.299}$$
$$g_{ab}(\rho, \varphi) = \frac{\partial x^{c'}}{\partial \xi^a}\frac{\partial x^{d'}}{\partial \xi^b}\delta_{c'd'} = \frac{\partial x}{\partial \xi^a}\frac{\partial x}{\partial \xi^b} + \frac{\partial y}{\partial \xi^a}\frac{\partial y}{\partial \xi^b} \tag{II.300}$$

$$11 : 1 = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 \tag{II.301}$$
$$22 : \rho^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 \tag{II.302}$$
$$12 : 0 = \frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \rho}\frac{\partial y}{\partial \varphi} \tag{II.303}$$

$$\text{Lösung:} \quad x = \rho\cos\varphi \tag{II.304}$$
$$y = \rho\sin\varphi \tag{II.305}$$

- 2. Beispiel: Kugeloberfläche $\xrightarrow{?}$ ebenen kartesischen Koordinaten

$$ds^2 = R_0^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\varphi^2) \quad , \quad R_0 = \text{const.} \tag{II.306}$$
$$(\xi^1, \xi^2) = (\Theta, \varphi) \quad , \tag{II.307}$$
$$(x^1, x^2) = (x, y) \tag{II.308}$$
$$11 : R_0^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \Theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \Theta}\right)^2 \tag{II.309}$$
$$22 : R_0^2\sin^2\Theta = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 \tag{II.310}$$
$$12 : 0 = \frac{\partial x}{\partial \Theta}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \Theta}\frac{\partial y}{\partial \varphi} \tag{II.311}$$

keine globale Lösung, nur lokale Lösungen z.B. für $|\Theta| << 1$, d.h. $\sin\Theta \approx \Theta$, dann Struktur des Dgl. - Systems genau wie im 1. Beispiel :
R_0 wegnormieren
$\Theta \leftrightarrow \rho$
$\varphi \leftrightarrow \varphi$

Beispiele verifizieren noch einmal, dass

- g_{ik} hängen ab von der Struktur des Riemannschen Raumes
- g_{ik} hängen ab von Koordinaten
- g_{ik} ist es nicht leicht anzusehen, ob der Raum flach oder gekrümmt ist

Konstruktion des Krümmungstensors

- Raum ist flach, wenn Krümmungstensor verschwindet (wird unten gezeigt)
- Krümmung hängt wesentlich mit Nichtvertauschbarkeit der zweiten kovarianten Ableitungen eines Vektors zusammen
- vgl. Formel Abschnitt (II.139)

$$v_{i||k||p} - v_{i||p||k} \quad = \quad -R^{m}_{ikp} v_m \tag{II.312}$$

mit
Def.: Krümmungstensor R^{m}_{ikp}

$$R^{m}_{ikp} \quad := \quad \Gamma^{m}_{ik|p} - \Gamma^{m}_{ip|k} + \Gamma^{r}_{ik}\Gamma^{m}_{rp} - \Gamma^{r}_{ip}\Gamma^{m}_{rk} \tag{II.313}$$

Kontraktion des Krümmungstensors

Def.: Ricci - Tensor R_{ip}

$$R_{ip} \quad := \quad R^{m}_{imp} \; = \; g^{km} R_{mikp} \tag{II.314}$$

Def.: Krümmungsskalar R

$$R \quad := \quad R^{i}_{\ i} \; = \; g^{ip} R_{ip} \tag{II.315}$$

Es gilt

$$R_{ip} \quad = \quad R_{pi} \tag{II.316}$$

Darstellung mit 2. Ableitungen der Metrik

$$R_{mikp} \quad = \quad g_{ms} R^{s}_{ikp} \tag{II.317}$$

$$R_{mikp} \quad = \quad g_{ms}(\Gamma^{s}_{ik|p} - \Gamma^{s}_{ip|k} + \Gamma^{r}_{ik}\Gamma^{s}_{rp} - \Gamma^{r}_{ip}\Gamma^{s}_{rk}) \tag{II.318}$$

Zwischenrechnung

$$g_{mn}\Gamma^{n}_{ps} + g_{sn}\Gamma^{n}_{pm} \quad = \quad g_{ms|p} \mathrel{\hat{=}} g_{ms||p} \; = \; 0 \tag{II.319}$$

zurück zu R_{mikp}

1.Term

$$\begin{aligned} g_{ms}\Gamma^{s}_{ik|p} \quad &= \quad (g_{ms}\Gamma^{s}_{ik})_{|p} - g_{ms|p}\Gamma^{s}_{ik} \\ &= \quad \frac{1}{2}(g_{mi|k} + g_{mk|i} - g_{ik|m})_{|p} - (g_{mn}\Gamma^{n}_{ps} + g_{sn}\Gamma^{n}_{pm})\Gamma^{s}_{ip} \end{aligned} \tag{II.320}$$

2.Term p↔k

$$g_{ms}\Gamma^s_{ip|k} = \frac{1}{2}(g_{mi|p} + g_{mp|i} - g_{ip|m})_{|k} - (g_{mn}\Gamma^n_{ks} + g_{sn}\Gamma^n_{km})\Gamma^s_{ip} \tag{II.321}$$

Differenz 1. - 2. Term

$$\begin{aligned} g_{ms}(\Gamma^s_{ik|p} - \Gamma^s_{ip|k}) &= \frac{1}{2}(g_{mk|i|p} - g_{ik|m|p} - g_{mp|i|k} + g_{ip|m|k}) \\ &\quad - g_{mn}\Gamma^n_{ps}\Gamma^s_{ik} - g_{sn}\Gamma^n_{pm}\Gamma^s_{ik} \\ &\quad + \underbrace{g_{mn}\Gamma^n_{ks}\Gamma^s_{ip}} \\ &\quad \text{fallen weg gegen 3. und 4. Term in } R_{mikp} \\ &\quad + \underbrace{g_{sn}\Gamma^n_{km}\Gamma^s_{ip}} \\ &\quad \text{bleiben erhalten} \end{aligned} \tag{II.322}$$

3.Term

$$g_{ms}\Gamma^r_{ik}\Gamma^s_{rp} = g_{mn}\Gamma^s_{ik}\Gamma^n_{sp}\ (s \to n, r \to n) \tag{II.323}$$

4.Term

$$g_{ms}\Gamma^r_{ip}\Gamma^s_{rk} = g_{mn}\Gamma^s_{ip}\Gamma^n_{sk} \tag{II.324}$$

- Krümmungstensor mit 2.Ableitungen der Metrik folgt zu

$$\begin{aligned} R_{mikp} &= \frac{1}{2}(g_{mk|i|p} + g_{ip|m|k} - g_{mp|i|k} - g_{ik|m|p}) \\ &\quad + g_{sn}(\Gamma^s_{ip}\Gamma^n_{mk} - \Gamma^s_{ik}\Gamma^n_{pm}) \end{aligned} \tag{II.325}$$

Symmetrie des Krümmungstensors u. Ricci-Tensors

- aus obiger Relation für R_{mikp} folgt

$$R_{mikp} = R_{kpmi} \tag{II.326}$$

$$R_{mikp} = -R_{imkp} = -R_{mipk} = R_{impk} \tag{II.327}$$

$$R_{mikp} + R_{mpik} + R_{mkpi} = 0 =: R_{m<ikp>} \tag{II.328}$$

$$R_{mikp} = \frac{1}{2}(\cancel{g_{mk|i|p}}^{\,1} + \cancel{g_{ip|m|k}}^{\,2} - \cancel{g_{mp|i|k}}^{\,3} \tag{II.329}$$

$$- \cancel{g_{ik|m|p}}^{\,4}) + g_{sn}(\cancel{\Gamma^s_{ip}\Gamma^n_{mk}}^{\,\mathrm{a}} - \cancel{\Gamma^s_{ik}\Gamma^n_{mp}}^{\,\mathrm{b}}) \tag{II.330}$$

$$R_{mpik} = \frac{1}{2}(\cancel{g_{mi|p|k}}^{\,5} + \cancel{g_{pk|m|i}}^{\,6} - \cancel{g_{mk|p|i}}^{\,1} - \cancel{g_{pi|m|k}}^{\,2}) \tag{II.331}$$

$$+ g_{sn}(\cancel{\Gamma^s_{pk}\Gamma^n_{mi}}^{\,\mathrm{c}} - \cancel{\Gamma^s_{pi}\Gamma^n_{mk}}^{\,\mathrm{a}}) \tag{II.332}$$

$$R_{mkpi} = \frac{1}{2}(\cancel{g_{mp|k|i}}^{\,3} + \cancel{g_{ki|m|p}}^{\,4} - \cancel{g_{mi|k|p}}^{\,5} - \cancel{g_{kp|m|i}}^{\,6}) \tag{II.333}$$

$$+ g_{sn}(\cancel{\Gamma^s_{ki}\Gamma^n_{mp}}^{\,\mathrm{b}} - \cancel{\Gamma^s_{kp}\Gamma^n_{mi}}^{\,\mathrm{c}}) \tag{II.334}$$

$$R^i{}_{ikp} = g^{im}R_{mikp} = 0 \tag{II.335}$$

•

$$R_{ip} = g^{mk} R_{mikp} = g^{mk} R_{kpmi} = R_{pi} \tag{II.336}$$

Anzahl unabhängiger Komponenten von R_{mikp}

(vgl. Fließbach, ca. S.92)

- R_{mikp} im N-dim. Raum:
  N^4 Komponenten, $4^4 = 256$, aber meist 0.
- wg. Antisymmetrie in (mi) und (kp) kann jeder Doppelindex (mi) bzw. (kp) genau

$$M = \frac{N^2 - N}{2} = \frac{N(N-1)}{2} \tag{II.337}$$

  Werte annehmen
- Bzgl. dieser beiden Doppelindizes ist $R_{(...)(...)}$ ein symmetrischer Ausdruck mit

$$\frac{M^2 - M}{2} + M = \frac{M(M+1)}{2} \tag{II.338}$$

  Elementen.
- somit zunächst

$$\frac{M(M+1)}{2} = \frac{\frac{1}{2}N(N-1)[\frac{1}{2}N(N-1)+1]}{2} = \frac{1}{8}\{(N^2-N)(N^2-N+2)\} \tag{II.339}$$

- bzgl. der Einschränkungen durch die „zyklische“ Symmetrie folgende Überlegung; Einarbeiten der bereits benutzten Symmetrien, also Antisymmetrie $m \leftrightarrow i$, $k \leftrightarrow p$ sowie Symmetrie $(mi) \leftrightarrow (kp)$ auf folgende Weise:

$$\begin{aligned} R_{mikp} \;=\; & \frac{1}{8}(R_{mikp} - R_{imkp} - R_{mipk} + R_{impk} \\ & + R_{kpmi} - R_{pkmi} - R_{kpim} + R_{pkim}) \end{aligned} \tag{II.340}$$

  $\rightarrow R_{m<ikp>}$ hat $24 = 4!$ Terme mit jeweils verschiedener Reihenfolge der 4 Indizes. Jede Permutation ergibt ein Minuszeichen der Gesamtsumme
  $\longrightarrow$ Gesamtsumme ist total antisymmetrisch
  $\longrightarrow$ $R_{m<ikp>}$ ist nur nichttriviale zusätzliche Bedingung, wenn alle 4 Indizes verschieden sind; es gibt

$$\left(\begin{array}{c} N \\ 4 \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{N!}{(N-4)!4!} & N \geq 4 \\ 0 & N < 4 \end{array} \right. \tag{II.341}$$

  Möglichkeiten, vier verschiedene Indexwerte aus N auszuwählen;

- Anzahl C_N der unabhängigen Komponenten

$$\begin{aligned} C_N &= \frac{1}{8}(N^2-N)(N^2-N+2) - \left(\begin{array}{c} N \\ 4 \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{8}(N^2-N)(N^2-N+2) - \frac{N(N-1)(N-2)(N-2)}{24} \\ &= \frac{3(N^4-2N^3+3N^2-2N)-(N^4-6N^3+11N^2-6N)}{24} \\ &= \frac{2N^4-2N^2}{24} \\ C_N &= \frac{1}{12}N^2(N^2-1) \end{aligned} \tag{II.342}$$

-

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= 1 \\ C_3 &= 6 \\ C_4 &= 20 \end{aligned}$$

- unabhängige Komponenten des Ricci-Tensors

$$\begin{aligned} R_{ip} &= R_{pi} \\ &\longrightarrow \quad 10 \text{ Komponenten bei } \quad N=4 \end{aligned} \tag{II.343}$$

Beispiele

- 1-dim Raum:
  Krümmungstensor verschwindet immer, $C_1 = 0$

$$\begin{aligned} \xi &= (\xi^1) \\ ds^2 &= g_{11}(d\xi^1)^2 \end{aligned}$$

  Weglänge s kann als Koordinate $\xi^{1'}$ gewählt werden,

$$\begin{aligned} ds &= \pm\sqrt{|g_{11}(\xi^1)|}d\xi^1 \\ ds^2 &= \pm(d\xi^{i'})^2 \\ \longrightarrow g_{1'1'} &= \pm 1, \end{aligned}$$

  äußere Krümmung der Kurve in einem höherdimensionalen Raum spielt keine Rolle; wichtig ist nur die innere Krümmung; nur diese beeinflußt Längen- und Winkelmessung, also die Metrik.

- 2- dim. Raum :
  $C_2 = 1$,
  nichtverschwindend nur $R_{1212} = -R_{2112} = -R_{1221} = R_{2121}$,
  diese eine Komponente lässt sich durch den Krümmungsskalar R ausdrücken:

  Ricci- Tensor

$$
\begin{aligned}
R_{ip} &= R^m_{imp} = g^{ms} R_{simp} && \text{(II.344)}\\
R_{ip} &= g^{11}R_{1i1p} + g^{12}R_{1i2p} + g^{21}R_{2i1p} + g^{22}R_{2i2p} && \text{(II.345)}\\
R_{11} &= g^{22}R_{2121} = g^{22}R_{1212} && \text{(II.346)}\\
R_{12} &= g^{21}R_{2112} = -g^{12}R_{1212} && \text{(II.347)}\\
R_{21} &= g^{12}R_{1221} = R_{12} = -g^{12}R_{1212} && \text{(II.348)}\\
R_{22} &= g^{11}R_{1212} = g^{11}R_{1212} && \text{(II.349)}
\end{aligned}
$$

  Krümmungsskalar

$$
\begin{aligned}
R &= R^i{}_i = g^{ij}R_{ji} && \text{(II.350)}\\
R &= (g^{11}g^{22} - g^{12}g^{12} - g^{12}g^{12} + g^{22}g^{11})R_{1212} && \text{(II.351)}\\
R &= 2\det(g^{ik})R_{1212} && \text{(II.352)}\\
R &= 2\frac{R_{1212}}{g} && \text{(II.353)}
\end{aligned}
$$

Beispiel: Kugeloberfläche

$$
\begin{aligned}
g_{ik} &= \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2\sin^2\vartheta \end{pmatrix} && \text{(II.354)}\\
R_{1212} &= -a^2\sin^2\vartheta && \text{(II.355)}\\
R &= -\frac{2}{a^2} && \text{(II.356)}
\end{aligned}
$$

vgl. Gaußsche Krümmung

$$
\kappa = \frac{1}{\rho_1\rho_2} = -\frac{R}{2} = \frac{1}{a^2} \qquad \text{(II.357)}
$$

Verifikation der Krümmungseigenschaft von R^m_{ikp}

1.Richtung : Wenn der Raum flach ist, dann $R^m_{ikp} = 0$:

- im flachen Raum sind kartesische oder Minkowski-Koordinaten möglich

$$
\begin{aligned}
\longrightarrow \Gamma^i_{kl} &= 0 && \text{(II.358)}\\
\longrightarrow R^m_{ikp} &= 0 && \text{(II.359)}
\end{aligned}
$$

- da R^m_{ikp} ein Tensor ist, verschwindet er in jedem Koordinatensystem des zugrunde liegenden Raumes, wenn er im kartesischen bzw. Minkowski-Koordinatensystem verschwindet.

2.Richtung: Wenn $R^m_{ikp} = 0$, dann ist Raum flach:

- andere Formulierung: Wenn $R^m_{ikp} = 0$, dann ist immer ein globales kartesisches oder Minkowski-System einführbar

- jetzt soll gezeigt werden, dass ein verschwindender Krümmungstensor gerade die Integrabilitätsbedingung für das Auffinden der Koordinatentransformation von krummlinigen zu kartesischen bzw. minkowskischen Koordinaten darstellt

$$\xi \;\rightarrow\; x' \;;\; x^{i'} \;=\; x^{i'}(\xi^k) \quad \text{bzw.} \tag{II.360}$$

$$dx^{i'} \;=\; \frac{\partial x^{i'}}{\partial \xi^k} d\xi^k \;=\; A^{i'}_k d\xi^k \tag{II.361}$$

- 2 Schritte :
(1) $A^{i'}_k$, (2) $x^{i'}$

- Berechnung der Transformationskoeffizienten $A^{i'}_k$ aus der Forderung, dass Christoffel-Symbole im flachen Raum verschwinden

- zunächst: allg. Transformationsverhalten der Christoffel-Symbole, dazu Basisvektordarstellung am schnellsten

$$\Gamma^i_{kp} \;=\; \underline{b}^i \underline{b}_{k|p} \quad (\text{ vgl. (II.113) oder (II.141) }) \tag{II.362}$$

$$\underline{b}^i \;=\; A^i_{i'} \underline{b}^{i'} \tag{II.363}$$

$$\underline{b}_k \;=\; A^{k'}_k \underline{b}_{k'} \tag{II.364}$$

$$\underline{b}_{k|p} \;=\; (A^{k'}_k \underline{b}_{k'})_{|p} \;=\; A^{k'}_{k|p} \underline{b}_{k'} + A^{k'}_k \underline{b}_{k'|p} \tag{II.365}$$

$$\underline{b}_{k'|p} \;=\; A^{p'}_{k|p} \underline{b}_{k'} + A^{k'}_k A^{p'}_p \underline{b}_{k'|p'} \tag{II.366}$$

$$\Gamma^i_{kp} \;=\; A^i_{i'} A^{k'}_k A^{p'}_p \underline{b}^{i'} \underline{b}_{k'|p'} + A^{i'}_i A^{k'}_{k|p} \underline{b}^{i'} \underline{b}_{k'} \tag{II.367}$$

$$\Gamma^i_{kp} \;=\; A^i_{i'} A^{k'}_k A^{p'}_p \Gamma^{i'}_{k'p'} + A^i_{i'} A^{i'}_{k|p} \tag{II.368}$$

- flacher Raum : $\Gamma^{i'}_{k'p'} = 0$

$$\longrightarrow \quad \Gamma^i_{kp} \;=\; A^i_{i'} A^{i'}_{k|p} \quad \text{bzw. nach Multiplikation mit} \quad A^{j'}_i \tag{II.369}$$

$$A^{j'}_{k|p} \;=\; \Gamma^i_{kp} A^{j'}_i \tag{II.370}$$

ist Dgl.-System für die $A^{j'}_k$; p= 1,...,4 Dgl. pro $A^{j'}_k$ $\rightarrow$ überbestimmt, Gleichungen aber nicht unabhängig voneinander.

- da 2.partielle Ableitungen vertauschbar, also

$$A^{j'}_{k|p|r} = A^{j'}_{k|r|p} \tag{II.371}$$

dann muss gelten

$$\left(\Gamma^i_{kp}A^{j'}_i\right)_{|r} - \left(\Gamma^i_{kr}A^{j'}_i\right)_{|p} = 0 \tag{II.372}$$

$$\Gamma^i_{kp|r}A^{j'}_i + \Gamma^i_{kp}A^{j'}_{i|r} - \Gamma^i_{kr|p}A^{j'}_i - \Gamma^i_{kr}A^{j'}_{i|p} = 0 \tag{II.373}$$

$$\left(\Gamma^i_{kp|r} - \Gamma^i_{kr|p}\right)A^{j'}_i + \Gamma^i_{kp}\Gamma^n_{ir}A^{j'}_n - \Gamma^i_{kr}\Gamma^n_{ip}A^{j'}_n = 0 \tag{II.374}$$

$$\left(\Gamma^m_{kp|r} - \Gamma^m_{kr|p} + \Gamma^i_{kp}\Gamma^m_{ir} - \Gamma^i_{kr}\Gamma^m_{ip}\right)A^{j'}_m = 0 \tag{II.375}$$

$$R^m{}_{kpr}A^{j'}_m = 0 \quad | \quad A^n_{j'} \tag{II.376}$$

$$R^n_{kpr} = 0 \tag{II.377}$$

$$\longrightarrow \quad R^n{}_{kpr} = 0 \quad \text{ist Integrabilitätsbedingung,} \tag{II.378}$$

1. um $A^{i'}_k$ zu finden
2. um aus den $A^{i'}_k$ die $x^{i'}$ zu finden.

$\longrightarrow$ Krümmungseigenschaft von $R^n{}_{kpr}$ verifiziert!

Übungsaufgabe

Berechnung der Koordinaten-Transformation für den Übergang von
ebenen Polarkoord. $\rightarrow$ ebenen kartes. Koord.

$$KS : (\xi^1, \xi^2) = (\rho, \varphi) \qquad KS' : (x^{1'}, x^{2'}) = (x, y)$$
$$\text{nach} \quad dx^{i'} = A^{i'}_k d\xi^k$$
$$\text{und} \quad A^{j'}_{k|p} = \Gamma^i_{kp}A^{j'}_i$$

Bereitstellung der Γ im KS

$$\begin{array}{lll} \Gamma^1_{11} = 0 & \Gamma^1_{12} = 0 & \Gamma^1_{22} = -\rho \\ \Gamma^2_{11} = 0 & \Gamma^2_{12} = \frac{1}{\rho} & \Gamma^2_{22} = 0 \end{array}$$

$A^{j'}_k$ - Gleichungen

1. $A^{1'}_{1|1} = \Gamma^1_{11}A^{1'}_1 + \Gamma^2_{11}A^{1'}_2 = 0A^{1'}_1 + 0A^{1'}_2$
2. $A^{1'}_{1|2} = \Gamma^1_{12}A^{1'}_1 + \Gamma^2_{12}A^{1'}_2 = 0A^{1'}_1 + \frac{1}{\rho}A^{1'}_2$

3. $A^{1'}_{2|1} = \Gamma^1_{21} A^{1'}_1 + \Gamma^2_{21} A^{1'}_2 = 0 A^{1'}_1 + \frac{1}{\rho} A^{1'}_2$

4. $A^{1'}_{2|2} = \Gamma^1_{22} A^{1'}_1 + \Gamma^2_{22} A^{1'}_2 = -\rho A^{1'}_1 + 0 A^{1'}_2$

5. $A^{2'}_{1|1} = \Gamma^1_{11} A^{2'}_1 + \Gamma^2_{11} A^{2'}_2 = 0 A^{2'}_1 + 0 A^{2'}_2$

6. $A^{2'}_{1|2} = \Gamma^1_{12} A^{2'}_1 + \Gamma^2_{12} A^{2'}_2 = 0 A^{2'}_1 + \frac{1}{\rho} A^{2'}_2$

7. $A^{2'}_{2|1} = \Gamma^1_{21} A^{2'}_1 + \Gamma^2_{21} A^{2'}_2 = 0 A^{2'}_1 + \frac{1}{\rho} A^{2'}_2$

8. $A^{2'}_{2|2} = \Gamma^1_{22} A^{2'}_1 + \Gamma^2_{22} A^{2'}_2 = -\rho A^{2'}_1 + 0 A^{2'}_2$

1. $A^{1'}_1 = \Phi(\varphi)$

2. $A^{1'}_2 = \rho \Phi_{|2}$

3. $A^{1'}_2 = \rho A^{1'}_{2|1} = \rho \Phi_{|2}$

4. $A^{1'}_1 = -\frac{1}{\rho} A^{1'}_{2|2} = -\Phi_{|2|2} = \Phi$

$$\begin{aligned} \Phi &= \sin\varphi \qquad \text{(z.B.)} \\ A^{1'}_1 &= \sin\varphi \\ A^{1'}_2 &= \rho\cos\varphi \end{aligned}$$

5. $A^{2'}_1 = \tilde{\Phi}(\varphi)$

6. $A^{2'}_2 = \rho \tilde{\Phi}_{|2}$

7. $A^{2'}_2 = \rho A^{2'}_{2|1} = \rho \tilde{\Phi}_{|2}$

8. $A^{2'}_1 = -\frac{1}{\rho} A^{2'}_{2|2} = -\tilde{\Phi}_{|2|2} = \tilde{\Phi}$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad \tilde{\Phi} &= \cos\varphi \\ A^{2'}_1 &= \cos\varphi \\ A^{2'}_2 &= -\rho\sin\varphi \end{aligned}$$

$dx^{i'}$ - Gleichungen

1. $dx^{1'} = A_1^{1'} d\xi^1 + A_2^{1'} d\xi^2 = dx = \sin\varphi d\rho + \rho\cos\varphi d\varphi$
2. $dx^{2'} = A_1^{2'} d\xi^1 + A_2^{2'} d\xi^2 = dy = \cos\varphi d\rho - \rho\sin\varphi d\varphi$

$$\longrightarrow \begin{array}{rcl} x & = & \rho\sin\varphi \\ y & = & \rho\cos\varphi \end{array}$$

Übungsaufgabe

Untersuchung der Koordinaten-Transformation für den Übergang von
ϑ, φ - Koord. auf der Kugeloberfläche zu kartesischen Koordinaten

(Es wird nicht klappen, warum?)

$$KS : (\xi^1, \xi^2) = (\vartheta, \varphi) \qquad KS' : (x^{1'}, x^{2'}) = (x, y)$$
$$\text{nach} \quad dx^{i'} = A_k^{i'} d\xi^k$$
$$\text{und} \quad A_{k|p}^{j'} = \Gamma_{kp}^i A_i^{j'}$$

Bereitstellung der Γ in KS

$$\begin{array}{rcl} ds^2 & = & a^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \\ g_{11} & = & a^2 \ , \ g_{22} = a^2\sin^2\vartheta \ , \ g^{11} = \dfrac{1}{a^2} \ , \ g^{22} = \dfrac{1}{a^2\sin^2\vartheta} \\ \Gamma_{bc}^a & = & \dfrac{1}{2} g^{ad}(g_{db|c} + g_{dc|b} - g_{bc|d}) \\ \Gamma_{11}^1 & = & \dfrac{1}{2} g^{11}(g_{11|1}) = 0 \\ \Gamma_{12}^1 & = & \dfrac{1}{2} g^{11}(g_{11|2}) = 0 \\ \Gamma_{22}^1 & = & \dfrac{1}{2} g^{11}(-g_{22|1}) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{a^2} 2a^2\cos\vartheta\sin\vartheta = -\cos\vartheta\sin\vartheta \\ \Gamma_{11}^2 & = & \dfrac{1}{2} g^{22}(-g_{11|2}) = 0 \\ \Gamma_{12}^2 & = & \dfrac{1}{2} g^{22}(-g_{22|1}) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{a^2\sin^2\vartheta} 2a^2\cos\vartheta\sin\vartheta = \dfrac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \\ \Gamma_{22}^2 & = & \dfrac{1}{2} g^{22}(g_{22|2}) = 0 \end{array}$$

$A_k^{j'}$ - Gleichungen $A_{k|p}^{j'} = \Gamma_{kp}^i A_i^{j'}$

1. $A^{1'}_{1|1} = \Gamma^1_{11} A^{1'}_1 + \Gamma^2_{11} A^{1'}_2 = 0 A^{1'}_1 + 0 A^{1'}_2 = 0$

2. $A^{1'}_{1|2} = \Gamma^1_{12} A^{1'}_1 + \Gamma^2_{12} A^{1'}_2 = 0 A^{1'}_1 + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} A^{1'}_2 = \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} A^{1'}_2$

3. $A^{1'}_{2|1} = \Gamma^1_{21} A^{1'}_1 + \Gamma^2_{21} A^{1'}_2 = 0 A^{1'}_1 + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} A^{1'}_2 = \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} A^{1'}_2$

4. $A^{1'}_{2|2} = \Gamma^1_{22} A^{1'}_1 + \Gamma^2_{22} A^{1'}_2 = -\sin\vartheta\cos\vartheta A^{1'}_1 + 0 A^{1'}_2 = -\sin\vartheta\cos\vartheta A^{1'}_1$

5. $A^{2'}_{1|1} = \Gamma^1_{11} A^{2'}_1 + \Gamma^2_{11} A^{2'}_2 = 0 A^{2'}_1 + 0 A^{2'}_2 = 0$

6. $A^{2'}_{1|2} = \Gamma^1_{12} A^{2'}_1 + \Gamma^2_{12} A^{2'}_2 = 0 A^{2'}_1 + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} A^{2'}_2 = \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} A^{2'}_2$

7. $A^{2'}_{2|1} = \Gamma^1_{21} A^{2'}_1 + \Gamma^2_{21} A^{2'}_2 = 0 A^{2'}_1 + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} A^{2'}_2 = \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} A^{2'}_2$

8. $A^{2'}_{2|2} = \Gamma^1_{22} A^{2'}_1 + \Gamma^2_{22} A^{2'}_2 = -\sin\vartheta\cos\vartheta A^{2'}_1 + 0 A^{2'}_2 = -\sin\vartheta\cos\vartheta A^{2'}_1$

1. $A^{1'}_1 = \Phi(\varphi)$
2. $A^{1'}_2 = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\ A^{1'}_{1|2} = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\ \Phi_{|2}$
3. $A^{1'}_2 = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\ A^{1'}_{2|1} = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\ \frac{1}{\cos^2\vartheta}\ \Phi_{|2}$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad \Phi_{|2} &= 0 \qquad \text{wegen } 2.-3. \\ \Phi &= const \\ A^{1'}_2 &= 0 \end{aligned}$$

4. $A^{1'}_{2|2} = -\sin\vartheta\cos\vartheta\ A^{1'}_1 = 0$

$$\begin{aligned} A^{1'}_1 &= 0 \\ \Phi &= 0 \end{aligned}$$

5. $A^{2'}_1 = \tilde{\Phi}(\varphi)$
6. $A^{2'}_2 = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\ A^{2'}_{1|2} = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\ \tilde{\Phi}_{|2}$
7. $A^{2'}_2 = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\ A^{2'}_{2|1} = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\ \frac{1}{\cos^2\vartheta}\ \tilde{\Phi}_{|2}$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad \tilde{\Phi}_{|2} &= 0 \\ \rightarrow \quad \tilde{\Phi} &= const \\ A^{2'}_2 &= 0 \end{aligned}$$

8. $A^{2'}_{2|2} = -\sin\vartheta\cos\vartheta\ A^{2'}_1 = 0$

$$\begin{aligned} A^{2'}_1 &= 0 \\ \tilde{\Phi} &= 0 \end{aligned}$$

Somit sind alle $A^{i'}_i = 0$!

11 Bianchi - Identitäten

Vorbetrachtungen: Darstellung von R_{mikp} mit den zweiten Ableitungen von g_{ik} ; vgl. Gleichung (II.326)

$$\frac{1}{2}\left\{g_{mk|i|p} + g_{ip|m|k} - g_{mp|i|k} - g_{ik|m|p}\right\} + g_{sn}\left\{\Gamma^s_{ip}\Gamma^n_{mk} - \Gamma^s_{ik}\Gamma^n_{pm}\right\} = R_{mikp} \qquad \text{(II.379)}$$

- bisherige Vorstellung: Metrik des Raumes ist gegeben, Krümmungstensor ist daraus zu berechnen
- inverse Herangehensweise: Krümmungstensor einschließlich aller Symmetrien sei durch Raumzeit-Funktionen vorgegeben und die Metrik ist daraus zu bestimmen, d.h. Gleichung (II.379) ist bei vorgegebener rechter Seite als Dgl.-System für die g_{mk} aufzufassen
- wegen $C_4 = 20$ handelt es sich um 20 Gleichungen für die 10 Funktionen g_{mk}
- Problem hat i.a. keine Lösung bzw. eine Lösung existiert nur unter gewissen Integrabilitätsbedingungen
- Integrabilitätsbedingungen basieren im Kern auf folgender Idee: da die dritten partiellen Ableitungen von g_{mn} vertauschbar sind, müssen Beziehungen zwischen den Ableitungen der Komponenten des Krümmungstensors bestehen; vgl. dazu den Schwarzschen Satz als Integrabilitätsbedingungen für die totale Differentialgleichung

Überlegungen, wann g_{ik} (eindeutig) berechnet werden kann.

- Anwendung des Schwarzschen Satzes auf die dritten Ableitungen von g_{ik} ; wenn g_{ik} gegeben wären, ist natürlich klar, dass der Schwarzsche Satz gilt und die dritten partiellen Ableitungen vertauscht werden können; g_{ik} ist aber nicht vorgegeben, sondern wird erst gesucht; vorgegeben ist (II.379) als Vorschrift zur unabhängigen Berechnung der zweiten Ableitungen der g_{ik} (R_{mikp} als gegeben betrachtet)
- Einführung der ersten Ableitungen von g_{ik} als

$$h_{ikr} \quad := \quad g_{ik|r} \qquad \text{(II.380)}$$

$$dg_{ik} \quad = \quad g_{ik|r}d\xi^r \quad = \quad h_{ikr}d\xi^r \qquad \text{(II.381)}$$

- Gleichung (II.379) ist dann eine Vorschrift zur Berechnung von

$$h_{ikr|s} \qquad \text{(II.382)}$$

- für jeden festen Satz jkr sind das 4 Gleichungen, aus denen h_{ikr} nur bestimmbar ist, falls

$$dh_{ikr} = h_{ikr|s}d\xi^s \qquad \text{(II.383)}$$

ein vollständiges Differential ist; ein vollständiges Differential ist das aber nur, wenn

$$h_{ikr|s|t} = h_{ikr|t|s} \tag{II.384}$$

gilt, wobei man sich für $h_{ikr|s|t}$ etc. die Darstellung mit den Komponenten des Krümmungstensors eingesetzt denken muss

- wenn (II.384) erfüllt ist, kann dh_{ikr} zu h_{ikr} abintegriert werden
- wenn h_{ikr} nun gefunden ist, wird als nächster Schritt versucht dg_{ik} abzuintegrieren; das ist aber wiederum nur möglich, wenn

$$h_{ikr|s} = h_{iks|r} \tag{II.385}$$

gilt, denn dann ist dg_{ik} tatsächlich ein vollständiges Differential.

- (II.384) und (II.385) ist somit die Forderung der Vertauschbarkeit der 3.partiellen Ableitungen von g_{ik}, wobei man sich wiederum für die 3.partielle Ableitungen von g_{ik} die Darstellung mit den Komponenten des Krümmungstensors eingesetzt denken muss;
- somit ergeben sich als Integrabilitätsbedingungen zusätzliche Forderungen an den Krümmungstensor; dies sind gerade die **Bianchi-Identitäten**

$$R_{mi<kp||q>} := R_{mikp||q} + R_{miqk||p} + R_{mipq||k} = 0 \tag{II.386}$$

Beweis :

1. R_{mikp} mittels Christoffel-Symbolen darstellen und kovariant ableiten
(Erinnerung $g_{mn||q} = 0$)

$$R_{mikp||q} = g_{ms}(\Gamma^s_{ik|p} - \Gamma^s_{ip|k} + \Gamma^r_{ik}\Gamma^s_{rp} - \Gamma^r_{ip}\Gamma^s_{rk})_{||q} \tag{II.387}$$

2. Herausgreifen eines beliebigen Ereignisses ξ_0 im Riemannschen Raum und Wahl lokal geodätischer Koordinaten in $U(\xi_0)$

$$\longrightarrow \quad \Gamma^s_{ik}(\xi_0) = 0, \tag{II.388}$$

$$\Gamma^s_{ik|p}(\xi_0) \neq 0, \tag{II.389}$$

$$(\ )_{||q} = (\ )_{|q} \tag{II.390}$$

$$\longrightarrow \quad R_{mikp||q} = g_{ms}(\Gamma^s_{ik|p|q} - \Gamma^s_{ip|k|q}) \tag{II.391}$$

analog

$$\begin{aligned} &k \to q\ , \quad p \to k \quad , q \to p \\ &R_{miqk||p} \quad = \quad g_{ms}(\Gamma^s_{iq|k|p} - \Gamma^s_{ik|q|p}) \end{aligned} \tag{II.392}$$

weitere Permutationen

$$\begin{aligned} &q \to p\ , \quad k \to q \quad , \ p \to k \\ &R_{mipq||k} \quad = \quad g_{ms}(\Gamma^s_{ip|q|k} - \Gamma^s_{iq|p|k}) \end{aligned} \tag{II.393}$$

3. Summation

$$R_{mi<kq||p>} = 0, \tag{II.394}$$

Beweis in lokal geodätischen Koordinaten erbracht

4. Beliebige Koordinaten

$$R_{mi<kp||q>} = 0 \tag{II.395}$$

ist Tensorgleichung und damit invariant bei Koordinatentransformationen, Gültigkeit in beliebigen Koordinatensystemen
q.e.d.

Folgerung für den Ricci-Tensor

(wg. $g^{ip}{}_{||q} = 0$ darf g^{ip} unter die Ableitung gezogen werden)

$$\begin{aligned}
g^{ip}g^{mq}R_{mi<kp||q>} &= 0 && \text{(II.396)}\\
\longrightarrow \quad g^{ip}g^{mq}R_{mikp||q} + g^{ip}g^{mq}R_{miqk||p} + g^{ip}g^{mq}R_{mipq||k} &= \\
g^{mq}g^{ip}R_{mipk||q} + g^{ip}R_{ik||p} - g^{ip}g^{mq}R_{impq||k} &= \\
g^{mq}R_{mk||q} + g^{mq}R_{mk||q} - g^{mq}R_{mq||k} &= 0 && \text{(II.397)}\\
R^{q}{}_{k||q} - \frac{1}{2}R_{||k} &= 0 \quad | \; g^{ik} && \text{(II.398)}\\
R^{qi}{}_{||q} - \frac{1}{2}g^{ik}R_{||k} &= 0 && \text{(II.399)}\\
(R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R)_{||k} &= 0 && \text{(II.400)}
\end{aligned}$$

Relation wird im weiteren noch wichtige Rolle spielen!

Test: 2-dim. Räume

Welche Koordinaten beschreiben die Ebene?

$$\begin{aligned}
ds^2 &= dx^2 + dy^2\\
ds^2 &= d\vartheta^2 + d\varphi^2\\
ds^2 &= d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\\
ds^2 &= (d\xi^1)^2 + \sin^2\xi^1(d\xi^2)^2\\
ds^2 &= (d\xi^1)^2 + (\xi^1)^2(d\xi^2)^2\\
ds^2 &= dx^2 - x\sin y dx dy + x^2\left(\frac{5}{4} + \cos y\right)dy^2
\end{aligned}$$

ÜA selbständig.

Zusammenfassung

Krümmungstensor

Krümmungstensor

$$\begin{aligned} R^{m}_{\ ikp} &= \Gamma^{m}_{ik|p} - \Gamma^{m}_{ip|k} + \Gamma^{r}_{ik}\Gamma^{m}_{rp} - \Gamma^{r}_{ip}\Gamma^{m}_{rk} \\ R_{mikp} &= \frac{1}{2}(g_{mk|i|p} + g_{ip|m|k} - g_{mp|i|k} - g_{ik|m|p}) + g_{sn}(\Gamma^{s}_{ip}\Gamma^{n}_{mk} - \Gamma^{s}_{ik}\Gamma^{n}_{pm}) \end{aligned}$$

Symmetrien

$$\begin{aligned} R_{mikp} &= R_{kpmi} = -R_{imkp} = -R_{mipk} = R_{impk} \\ R_{m<ikp>} &= 0 \end{aligned}$$

Unabhängige Komponenten : $C_4 = 20$

Ricci-Tensor

$$\begin{aligned} R_{ip} &= R^{m}_{\ imp} = g^{mk}R_{mikp} \\ R_{ip} &= R_{pi} \qquad \text{(10 unabhängige Komp.)} \end{aligned}$$

Krümmungsskalar

$$R = R^{i}_{\ i} = g^{ip}R_{ip}$$

$R_{mikp} = 0 \ \leftrightarrow$ Raum flach

Zusammenfassung

Bianchi - Identitäten

Darstellung des Krümmungstensors mit 2. Ableitungen des metrischen Tensors

$$\frac{1}{2}\left\{g_{mk|i|p} + g_{ip|m|k} - g_{ik|m|p} - g_{mp|i|k}\right\} + g_{sn}\left\{\Gamma^s_{ip}\Gamma^n_{mk} - \Gamma^s_{ik}\Gamma^n_{pm}\right\} = R_{mikp}$$

Vorgabe von $R_{mikp} \longrightarrow$ 20 Dgln. für 10 g_{ik}

Integrabilitätsbedingung = Bianchi - Ident. (Vertauschbarkeit der 3. part. Ableit. d. g_{ik})

$$R_{mi<kp||q>} := R_{mikp||q} + R_{miqk||p} + R_{mipq||k} = 0$$

Konsequenz für Ricci - Tensor

$$(R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R)_{||k} = 0$$

12 Einbettung gekrümmter Räume in flache Räume höherer Dimension

- 2-dim. gekrümmte Fläche kann in 3-dim. Euklidischen Raum eingebettet werden, klar aus Erfahrung
- Frage: Flache Räume welcher Dimension sind notwendig, um einen gekrümmten 3-dim. oder 4-dim. Raum einzubetten?
- n sei Dimension des gekrümmten Raumes, N sei Dimension des höherdim. flachen Raumes, $\underline{b}_i$, i=1,. . .,n sind die Basisvektoren des n-dim. Raumes in einem Ereignis, also $\underline{b}_i(\xi)$
- $\underline{e}_\alpha, \alpha = 1, \ldots, N$ sind die Basisvektoren des N-dim. Raumes; in jedem Ereignis gleich; ONB o.B.d.A.
- Basisvektoren $\underline{b}_i$ sind Vektoren des N-dim. Raumes, d.h.

$$\underline{b}_i = a_i{}^\alpha \underline{e}_\alpha \tag{II.401}$$
$$\underline{b}_i(\xi) = a_i{}^\alpha(\xi)\underline{e}_\alpha \tag{II.402}$$

  mit den entsprechenden Koeffizienten $a_i{}^\alpha$ der Zerlegung; $a_i{}^\alpha = a_i{}^\alpha(\xi)$
- Koordinaten des n-dim. Raumes sind ξ^i
- Koordinaten des N-dim. Raumes sind x^α
- n-dim. gekr. Raum ist Hyperfläche im N-dim. flachen Raum
- Gesucht sind die Flachraumkoordinaten x^α bei vorgegebenen Koordinaten ξ^i des gekrümmten Raumes, also

$$x^\alpha = x^\alpha(\xi^i). \tag{II.403}$$

z.B.: Kugeloberfl.

$$\xi^1 = \vartheta, \tag{II.404}$$
$$\xi^2 = \varphi \quad \text{im 3-dim. kart.Raum} \quad x^1, x^2, x^3 \tag{II.405}$$
$$x^1 = R_0 \sin\vartheta \sin\varphi \tag{II.406}$$
$$x^2 = R_0 \sin\vartheta \cos\varphi \tag{II.407}$$
$$x^3 = R_0 \cos\vartheta \tag{II.408}$$

- Für den Vektor des Bogendifferentials $d\underline{r}$ gilt ($\underline{r}$ in der Hyperfläche)

$$d\underline{r} = \underline{b}_i d\xi^i \tag{II.409}$$
$$|d\underline{r}| = ds \tag{II.410}$$
$$\text{bzw. } d\underline{r} = a_i{}^\alpha \underline{e}_\alpha d\xi^i$$

- Andererseits ist aber auch

$$d\underline{r} = \underline{e}_\alpha dx^\alpha \tag{II.411}$$

- Folglich

$$dx^\alpha = a_i{}^\alpha d\xi^i \tag{II.412}$$

Diese Gleichungen sind Dgl. für die $x^\alpha(\xi^i)$

- Bedingung für die Lösbarkeit:
dx^α muss vollständiges Differential sein (Wegabhängigkeit ist nicht sinnvoll) :

$$a_i{}^\alpha{}_{|j} = a_j{}^\alpha{}_{|i} \tag{II.413}$$

Dann ist

$$a_i{}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^i} \tag{II.414}$$

und es existieren N Funktionen der Struktur $x^\alpha = x^\alpha(\xi^i)$, die die Einbettung global beschreiben.

- N= ?
Wegen

$$g_{\alpha\beta} \;=\; \underline{e}_\alpha \cdot \underline{e}_\beta \;=\; \delta_{\alpha\beta} \tag{II.415}$$

und

$$g_{ij} \;=\; \underline{b}_i \cdot \underline{b}_j \tag{II.416}$$

folgt

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^j} g_{\alpha\beta} \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^j} \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{II.417}$$

Wegen der Symmetrie handelt es sich um

$$\frac{n^2-n}{2} + n \;=\; \frac{n(n+1)}{2} \tag{II.418}$$

part. Dgl. für $x^\alpha(\xi^i)$ bei vorgegebenen g_{ij}

$$\begin{aligned} &\longrightarrow \quad N \;=\; \frac{n(n+1)}{2} \\ n=2 \;&:\; N=3 \\ n=3 \;&:\; N=6 \\ n=4 \;&:\; N=10 \end{aligned} \tag{II.419}$$

Kapitel III

Grundgesetze der Physik im Riemannschen Raum

zunächst wird davon ausgegangen, dass Riemannscher Raum vorgegeben ist, d.h. eine i.a. gekrümmte Raum-Zeit liegt vor

Übertragung bekannter Gesetze der Mechanik, Elektrodynamik, Hydrodynamik aus der Formulierung im flachen Raum (3.- dim. Euklidischer Raum, Minkowski-Raum) in die Formulierung im gekrümmten Raum (Riemannschen Raum)

Zustandekommen der Krümmung wird zum Ende des Kapitels in III.5 betrachtet

- Vorwegnahme: Quellen der Krümmung sind die Massen im Raum
- Krümmung ist Ausdruck von Gravitation

Nebeneffekt: Formulierung der Grundgesetze der Physik im flachen Raum (Spezialfall verschwindender Krümmung) in beliebigen krummlinigen Koordinatensystemen

1 Kovarianzprinzip

Kovarianzprinzip ist eine Folgerung aus dem Äquivalenzprinzip

Erinnerung Äquivalenzprinzip (stark) :

- im Lokalen IS laufen alle Vorgänge so ab, als sei kein Gravitationsfeld vorhanden
- Lokales IS := lokales Minkowski-System := lokal geodätisches System
- kein Gravitationsfeld = keine Krümmung

Existenz der Lokalen IS ist in (fast) jedem Punkt des Riemannschen Raumes bewiesen im Abschnitt II.9

Aufschreiben der bekannten Gesetze der SRT im Lokalen IS

- physikalische Größen und Zusammenhänge sind zunächst als Lorentz-Tensoren formuliert

- z.B. Vektor der Vierertromdichte

$$\underline{J} = J^i \underline{b}_i \tag{III.1}$$

  wobei hier $\underline{b}_i$ die Basis des Minkowski - Raumes ist

- oder Levi - Civita - Symbol

$$\Delta^{ijkl} \tag{III.2}$$

- oder kontravariante Differentiale

$$dv^i \tag{III.3}$$

- etc.

Umschreiben der Größen und Zusammenhänge in Riemann-Tensoren

- Umschrift erfolgt so, dass die Größen und Zusammenhänge Tensoren in beliebigen Koordinatensystemen sind und im Spezialfall des Minkowski-Systems in die bekannten Lorentz-Tensoren zurückfallen

- z.B. Vektor der Vierertromdichte
  Lokales IS → KS'

$$\underline{J} = J^i \underline{b}_i = J^{k'} \underline{b}_{k'}, \tag{III.4}$$

  wobei hier $\underline{b}_{k'}$ die Basis in einem beliebigen Koordinatensystem ist, also

$$J^{k'} = A^{k'}_{\ i} J^i \tag{III.5}$$

  mit

$$A^{k'}_{\ i} = \frac{\partial \xi^{k'}}{\partial x^i} \tag{III.6}$$

- oder

$$\Delta^{ijkl} \longrightarrow \epsilon^{i'j'k'l'} \tag{III.7}$$

- oder

$$dv^i \longrightarrow Dv^i \tag{III.8}$$

- etc.

Gültigkeit der Gesetze auch in beliebigen Koordinatensystemen gesichert, denn alle Koordinatensysteme sind gleichberechtigt, solange Gesetze als Tensorgesetze formuliert sind;

das gilt auch, wenn die gekrümmten Koordinaten einen gekrümmten Raum beschreiben, d.h. also - wie wir später sehen werden - unter dem Einfluss von Gravitation

Zfg.: Erhebung dieses Vorgehens zum Prinzip

- Kovarianzprinzip = Ausgehen von Gesetzen der SRT ($\hat{=}$ Gesetze ohne Gravitation) und Umschreiben auf Riemann- Tensoren
  $\longrightarrow$ Gesetze der ART ($\hat{=}$ Gesetze mit Gravitation)

2 Punktmechanik

Bewegungsgleichung für ein Teilchen der Ruhemasse m_0 im Lokalen IS:

$$m_0 \frac{du^i}{d\tau} = K^i \tag{III.9}$$

$$\text{mit} \quad u^i = \frac{dx^i}{d\tau} \quad \text{Geschwindigkeit} \tag{III.10}$$

$$K^i \quad \text{Kraft auf das Teilchen, z.B. elektromagnetische Kraft, aber natürlich keine Gravitation (IS!)} \tag{III.11}$$

diese Gleichung ist zwar kovariant bei Lorentz-Transformationen, aber nicht bei allg. Koordinaten-Transformationen

- anders ausgedrückt :
  u^i bzw dx^i , K^i sind Lorentz-Tensoren, aber keine Riemann-Tensoren

Umschreiben auf Riemann-Tensoren

$$m_0 \frac{Du^i}{d\tau} = K^i \tag{III.12}$$

$$m_0 \left(\frac{du^i}{d\tau} + \Gamma^i_{kl} u^k u^l \right) = K^i \tag{III.13}$$

oder

$$m_0 \frac{du^i}{d\tau} = K^i - m_0 \Gamma^i_{kl} u^k u^l \tag{III.14}$$

Interpretation der $-\Gamma^i_{kl} u^k u^l$

- nach Transformation von IS $\rightarrow$ KS enthalten sie Gravitationskräfte, falls der Raum gekrümmt ist, und/oder Trägheitskräfte, je nachdem ob beschleunigte Koordinaten auftreten

Nebenbedingung für die Geschwindigkeit

- zunächst im IS :

$$ds^2 = \eta_{ik}dx^i dx^k = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 \tag{III.15}$$

$$\frac{ds^2}{d\tau^2} = \eta_{ik}u^i u^k \tag{III.16}$$

da

$$\tau \stackrel{!}{=} t \tag{III.17}$$

für ruhende Uhren, also für

$$dx = dy = dz = 0 \quad (\hat{=}\text{Definition der Eigenzeit } \tau) \tag{III.18}$$

folgt

$$\eta_{ik}u^i u^k = u^i u_i = -c^2 \tag{III.19}$$

- $u^i u_i = -c^2$ bereits invariant (kovariant) , gilt also auch in KS:

$$-c^2 = u^i u_i = g_{ik}u^i u^k = g_{ik}\frac{d\xi^i}{d\tau}\frac{d\xi^k}{d\tau} \tag{III.20}$$

- Nebenbedingung ist nicht unabhängig von

$$m_0\frac{Du^i}{d\tau} = K^i \tag{III.21}$$

denn

$$m_0\frac{Du^i}{d\tau}u_i + m_0u^i\frac{Du_i}{d\tau} = m_0\frac{D(u^iu_i)}{d\tau} \tag{III.22}$$

$$= K^iu_i + u^iK_i = 2K^iu_i \tag{III.23}$$

wegen

$$u^iu_i = -c^2 \tag{III.24}$$

folgt

$$D(u^iu_i) = 0 \tag{III.25}$$

$$\longrightarrow K^iu_i = 0 \tag{III.26}$$

$$\text{oder „}K^i \perp u_i\text{ „} \tag{III.27}$$

3 Elektrodynamik

Feldgleichungen im Lokalen IS:

$$B_{<mn|k>} = 0, \tag{III.28}$$
$$H^{mn}{}_{|n} = J^m \tag{III.29}$$

mit

B_{mn} elm. Feldstärketensor
H^{mn} elm. Erregungstensor
J^m Viererstromdichte

Umschreiben auf Riemann-Tensoren

$$B_{<mn||k>} = 0, \tag{III.30}$$
$$H^{mn}{}_{||n} = J^m, \tag{III.31}$$
$$\tag{III.32}$$

damit Gültigkeit in beliebigen Koordinatensystem

andere Form der Gleichungen

$$B_{mn||k} = B_{mn|k} - \Gamma^l_{mk}B_{ln} - \Gamma^l_{nk}B_{ml} \tag{III.33}$$
$$B_{km||n} = B_{km|n} - \Gamma^l_{kn}B_{lm} - \Gamma^l_{mn}B_{kl} \tag{III.34}$$
$$B_{nk||m} = B_{nk|m} - \Gamma^l_{nm}B_{lk} - \Gamma^l_{km}B_{nl} \tag{III.35}$$
$$\longrightarrow \quad B_{<mn||k>} = B_{<nk|m>} = 0 \tag{III.36}$$

$$H^{mn}{}_{||n} = H^{mn}{}_{|n} + \Gamma^n_{ln}H^{ml} + \cancelto{(=0)}{\Gamma^m_{ln}H^{ln}} \tag{III.37}$$
$$\Gamma^n_{ln} = \frac{\sqrt{-g}_{|l}}{\sqrt{-g}} \quad \text{(vgl. (II.262))} \tag{III.38}$$
$$\longrightarrow \quad H^{mn}{}_{||n} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}H^{mn}\right)_{|n} \tag{III.39}$$

Bewegungsgleichung eines Teilchens der Masse m_0 und der Ladung q im elm. Feld :

$$m_0\frac{Du^i}{d\tau} = qB^{ik}u_k \tag{III.40}$$
$$\longrightarrow \quad m_0\frac{du^i}{d\tau} = -m_0\Gamma^i_{mn}u^m u^n + qB^{ik}u_k \tag{III.41}$$

- elm. Kräfte $\propto B^{ik}$
- Gravitations- und Trägheitskräfte $\propto \Gamma^i_{mn}$
- B^{ik} sind aus Ableitungen der elm. Potentiale A^i erzeugt
- Γ^i_{mn} sind aus Ableitungen der g_{mn} erzeugt; g_{mn} spielen die Rolle von Gravitationspotentialen

4 Hydrodynamik

Feldgleichungen im Lokalen IS:

$$T^{ik}{}_{|k} = k^i \tag{III.42}$$

mit dem Energie-Impuls-Tensor einer idealen Flüssigkeit

$$T^{ik} = (\rho_0 + \frac{1}{c^2} P_0) u^i u^k + \eta^{ik} P_0 \tag{III.43}$$

wobei

ρ_0 Massendichte
(auch Ruhemassendichte, da im Ruhesystem des Volumenelementes betrachtet)
P_0 Druck
(auch Eigendruck, da im Ruhesystem des jeweiligen Volumenelementes betrachtet)
k^i äußere Kraftdichte

Zunächst wird der nichtrelativistische Grenzfall verifiziert

- Dichte - Terme $(\rho_0 u^i u^k)_{|k}$

$$u^i = \frac{d\xi^i}{d\tau} = \frac{d\xi^i}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} v^a \\ c \end{pmatrix} \tag{III.44}$$

$$\text{i=4}: \quad (\rho_0 u^4 u^k)_{|k} = (\frac{\rho_0}{(1-\frac{v^2}{c^2})} c)_{|t} + (\frac{\rho_0}{(1-\frac{v^2}{c^2})} c v^a)_{|a} \tag{III.45}$$

$$\xrightarrow{v \ll c} \quad c\,(\rho_{0|t} + (\rho_0 v^a)_{|a}) \tag{III.46}$$

(Term der Kontinuitätsgleichung)

$$\text{i=a}: \quad (\rho_0 u^a u^k)_{|k} = \left(\frac{\rho_0}{1-\frac{v^2}{c^2}} v^a\right)_{|t} + \left(\frac{\rho_0}{1-\frac{v^2}{c^2}} v^a v^b\right)_{|b} \tag{III.47}$$

$$\xrightarrow{v \ll c} \quad (\rho_0 v^a)_{|t} + (\rho_0 v^a v^b)_{|b} \tag{III.48}$$

(Term der Euler-Gleichung in konservativer Form)

einführbar wäre eine „ dynamische Massendichte „

$$\rho = \frac{\rho_0}{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{III.49}$$

- Druck - Terme $\left\{P_0\left(\eta^{ik}+\frac{u^iu^k}{c^2}\right)\right\}_{|k} =: P^{ik}{}_{|k}$

$$u^i = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} v^a \\ c \end{pmatrix} \tag{III.50}$$

$$\xrightarrow{v\ll c} \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \tag{III.51}$$

$$\Rightarrow \quad P^{ik} \rightarrow \begin{pmatrix} P_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P_0\delta^{ab} \tag{III.52}$$

$$\text{i} = \text{a}: \quad P^{ak}{}_{|k} = \delta^{ab}P_{0|b} \tag{III.53}$$

$$\text{i} = 4: \quad P^{4k}{}_{|k} = 0 \tag{III.54}$$

- Gesamt-Gleichungen (speziell für $k^i = 0$)

$$(\rho_0 u^4u^k)_{|k} + \left\{P_0\left(\eta^{4k}+\frac{u^4u^k}{c^2}\right)\right\}_{|k} \rightarrow c\left(\rho_{0|t} + (\rho_0 v^a)_{|a}\right) = 0 \tag{III.55}$$

$$(\rho_0 u^au^k)_{|k} + \left\{P_0\left(\eta^{ak}+\frac{u^au^k}{c^2}\right)\right\}_{|k} \rightarrow (\rho_0 v^a)_{|t} + \left(\rho_0 v^av^b)_{|b}\right) + P_0{}^{|a} = 0$$

- Damit ist gezeigt, dass der Energie-Impuls-Tensor (III.43) im Grenzfall die Kontinuitäts- und Euler-Gleichung korrekt beschreibt. Allerdings sind andere Energie-Impuls-Tensoren konstruierbar, die im nichtrelativistischen Grenzfall die gleichen Kontinuitäts- und Euler-Gleichungen ergeben; es könnten an (III.43) etwa weitere Terme proportional u/c und Potenzen davon angefügt werden, die im Grenzfall wieder verschwinden. In der folgenden ergänzenden Überlegung wird gezeigt, dass die Form (III.43) durchaus eindeutig ist, wenn von vertrauten Bedingungen im Ruhsystem ausgegangen wird.

- Ergänzung: Übergang zwischen dem Ruhsystem des jeweiligen Volumenelementes und dem System (=Lokales IS), in dem sich das Volumenelement bei x mit $u^i(x)$ bewegt.

  (a) Druck:

  Ruhsystem :

$$P^{r's'} = \begin{pmatrix} P_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{III.56}$$

  Lokales IS :

$$P^{ik} = L^i_{r'}L^k_{s'}P^{r's'}, \tag{III.57}$$

  in der Lorentz-Transformation sind Geschwindigkeiten beliebiger Richtungen zuzulassen, also

$$L^i_{r'}(-v) = \begin{pmatrix} \delta^{ab} + \beta \frac{u^a}{c}\frac{u^b}{c} & \frac{u^a}{c} \\ \frac{u^b}{c} & \frac{u^4}{c} \end{pmatrix} \quad \text{(vgl. Einschub unten)} \tag{III.58}$$

Umschrift

$$P^{r's'} = P_0 \eta^{r's'} + P_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{III.59}$$

$$L^i_{r'} L^f_{s'} \eta^{r's'} = \eta^{ik} \tag{III.60}$$

$$L^i_{r'} L^k_{s'} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^{ab} + \beta \frac{u^a}{c}\frac{u^b}{c} & \frac{u^a}{c} \\ \frac{u^b}{c} & \frac{u^4}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta^{ab} + \beta \frac{u^a}{c}\frac{u^b}{c} & \frac{u^a}{c} \\ \frac{u^b}{c} & \frac{u^4}{c} \end{pmatrix} \tag{III.61}$$

$$L^i_{r'} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(L^k_{s'}\right)^T = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{u^a}{c} \\ 0 & \frac{u^4}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^{ab} + \beta \frac{u^a}{c}\frac{u^b}{c} & \frac{u^a}{c} \\ \frac{u^b}{c} & \frac{u^4}{c} \end{pmatrix} \tag{III.62}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{u^a}{c}\frac{u^b}{c} & \frac{u^a}{c}\frac{u^4}{c} \\ \frac{u^b}{c}\frac{u^4}{c} & \frac{u^4}{c}\frac{u^4}{c} \end{pmatrix} \tag{III.63}$$

$$\longrightarrow \quad P^{ik} = P_0 \eta^{ik} + P_0 \begin{pmatrix} \frac{u^a}{c}\frac{u^b}{c} & \frac{u^a}{c}\frac{u^4}{c} \\ \frac{u^b}{c}\frac{u^4}{c} & \frac{u^4}{c}\frac{u^4}{c} \end{pmatrix} \tag{III.64}$$

$$P^{ik} = P_0 \left(\eta^{ik} + \frac{u^i}{c}\frac{u^k}{c} \right) \tag{III.65}$$

(b) Dichte

Ruhsystem :

$$T^{r's'}\Big|_{P_0=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_0 c^2 \end{pmatrix} \tag{III.66}$$

Lokales IS :

$$T^{ik}\Big|_{P_0=0} = L^i_{r'} L^k_{s'} T^{r's'}\Big|_{P_0=0} \tag{III.67}$$

$$L^i_{r'} L^k_{s'} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{s.o.}{=} \begin{pmatrix} \frac{u^a}{c}\frac{u^b}{c} & \frac{u^a}{c}\frac{u^4}{c} \\ \frac{u^b}{c}\frac{u^4}{c} & \frac{u^4}{c}\frac{u^4}{c} \end{pmatrix} \tag{III.68}$$

$$\longrightarrow T^{ik}\Big|_{P_0=0} = \rho_0 u^i u^k \tag{III.69}$$

(c) Druck und Dichte

$$T^{ik} = T^{ik}\Big|_{P_0=0} + P^{ik} = \left(\rho_0 + \frac{P_0}{c^2}\right) u^i u^k + \eta^{ik} P_0 \tag{III.70}$$

Einschub

Lorentz-Transformation bei beliebigem $\underline{v}$

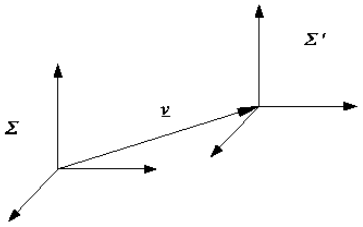


Abbildung III.1: Lorentz-Transformation

- keine Verdrehung der Systeme, aber Bewegung in beliebige Richtung
- Zerlegung

$$\underline{x} = \underline{x}_{||} + \underline{x}_{\perp} = \frac{(\underline{x}\underline{v})\underline{v}}{v^2} + \left(\underline{x} - \frac{(\underline{x}\underline{v})\underline{v}}{v^2}\right)$$

- bekannt ist

$$\begin{aligned}
\underline{x}'_{||} &= \frac{\underline{x}_{||} - \underline{v}t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\
\underline{x}'_{\perp} &= \underline{x}_{\perp} \\
t' &= \frac{t - \frac{\underline{x}_{||}\underline{v}}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t - \frac{\underline{x}\underline{v}}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}
\end{aligned}$$

- somit

$$\begin{aligned}
\underline{x}' &= \underline{x}'_{||} + \underline{x}'_{\perp} = \frac{\underline{x}_{||} - \underline{v}t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \underline{x}_{\perp} = \underline{x} - \underline{x}_{||} + \frac{\underline{x}_{||} - \underline{v}t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\
\underline{x}' &= \underline{x} + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)\frac{\underline{v}(\underline{v}\underline{x})}{v^2} - \frac{\underline{v}t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}
\end{aligned}$$

- in Komponentenschreibweise

$$\begin{aligned} x^{a'} &= x^a + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \frac{v^a v_b}{v^2} x^b - \frac{v^a}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} x^4 \\ x^{4'} &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} x^4 - \frac{v_b}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} x^b \end{aligned}$$

- Ablesen der Lorentz-Transformation

$$L^{i'}{}_j = \begin{pmatrix} \delta^a_b + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \frac{v^a v_b}{v^2} & -\frac{v^a}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ -\frac{v_b}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix}$$

- L's mit Vierer-Geschwindigkeit ausdrücken

$$\begin{aligned} u^i &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} v^a \\ c \end{pmatrix} \\ L^{i'}{}_j &= \begin{pmatrix} \delta^a_b + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{c^2}{v^2} \frac{u^a}{c} \frac{u_b}{c} & -\frac{u^a}{c} \\ -\frac{u_b}{c} & \frac{u^4}{c} \end{pmatrix} \\ L^{i'}{}_j &= \begin{pmatrix} \delta^a_b + \beta \frac{u^a}{c} \frac{u_b}{c} & -\frac{u^a}{c} \\ -\frac{u_b}{c} & \frac{u^4}{c} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \beta &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{c^2}{v^2} \\ &= \frac{1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{c^2}{v^2} \\ &= \left\{ \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right\} \frac{c^2}{v^2} \end{aligned}$$

Einschub - Ende.

- Umschreiben von

$$T^{ik}{}_{|k} = \left\{ \left(\rho_0 + \frac{1}{c^2} P_0 \right) u^i u^k + \eta^{ik} P_0 \right\}_{|k} = k^i$$

auf Riemann-Tensoren:

$$T^{ik}{}_{||k} = \left\{ \left(\rho_0 + \frac{1}{c^2} P_0 \right) u^i u^k + g^{ik} P_0 \right\}_{||k} = k^i,$$

damit Gültigkeit in einem beliebigen Koordinatensystem

obige 4 Bewegungsgleichungen müssen in jedem konkreten Anwendungsfall durch eine Zustandsgleichung ergänzt werden

- 4 Gleichungen bei 5 Unbekannten:
  ρ_0, P_0, u^i (nur 3 u^i sind unabhängig, $u^i u^k g_{ik} = -c^2$)
- exemplarische Zustandsgleichungen
  1. $P_0 = 0 \mathrel{\hat{=}}$ inkohärente Materie
  2. $P_0 = \frac{1}{3} u_{em} = \frac{1}{3}\rho_0 c^2 \mathrel{\hat{=}}$ Photonengas, u_{em} elm. Energiedichte, ρ_0 korrespondierende Massendichte

Zusammenfassung

Kovarianzprinzip

Übersetzung bekannter Gesetze der SRT in die entsprechenden verallg. Gesetze der ART

Schaffung der Bedingungen der SRT (= Inertialsyst.) im Riemannschen Raum (nur lokal möglich) :

Lokal geodäisches System $\hat{=}$ SRT	Beliebiges System $\hat{=}$ ART
Punktmechanik	
$m_0 \frac{du^i}{d\tau} = K^i$	$m_0 \frac{Du^i}{d\tau} = K^i$
Elektrodynamik	
$B_{<mn\|k>} = 0$ $H^{mn}_{\quad\|n} = J^m$	$B_{<mn\|\|k>} = 0$ $H^{mn}_{\quad\|\|n} = J^m$
Hydrodynamik	
$T^{ik}_{\quad\|k} = k^i$ $T^{ik} = \left(\rho_0 + \frac{1}{c^2} P_0\right) u^i u^k + \eta^{ik} P_0$	$T^{ik}_{\quad\|\|k} = k^i$ $T^{ik} = \left(\rho_0 + \frac{1}{c^2} P_0\right) u^i u^k + g^{ik} P_0$

5 Einsteinsche Feldgleichungen

keine Ableitung mit dem Kovarianzprinzip möglich, da

- $\nexists$ Feldgleichung in der SRT, die kovariant verallgemeinert werden könnte
- klar, da jetzt nach Gleichungen gefragt wird, die den Zusammenhang der Krümmung des Raumes mit den Massen herstellen (und in der SRT gibt es keine Krümmung)

Aufstellung der Feldgleichungen nach den Kriterien

- Riemann-Tensoren (Forminvarianz bei Koord. - Trafo)
- Einfachheit
- Newtonscher Grenzfall

5.1 Newtonsche Gravitationstheorie

Gravitationsgesetz

$$m_\nu \frac{d^2 \underline{r}_\nu}{dt^2} = -\gamma \sum_{\mu \neq \nu} \frac{m_\nu m_\mu}{\left|\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu\right|^2} \frac{\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu}{\left|\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu\right|} \tag{III.71}$$

Besser geeignet für Verallgemeinerungen ist:

- skalares Gravitationspotential

$$\Phi(\underline{r}) = -\gamma \sum_\mu \frac{m_\mu}{\left|\underline{r} - \underline{r}_\mu\right|} = -\gamma \int d^3 r' \frac{\rho(\underline{r}')}{\left|\underline{r} - \underline{r}'\right|} \tag{III.72}$$

- Umbezeichnung

$$\begin{aligned} r_\nu \to r(t) \quad &, \quad m_\nu \to m \\ \Rightarrow \quad m\frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} \quad &= \quad -m \partial_{\underline{r}} \Phi \end{aligned} \tag{III.73}$$

  denn:

$$\partial_{\underline{r}} \frac{1}{|\ |} \quad = \quad -\frac{1}{|\ |^2} \partial_{\underline{r}} \ = \ -\frac{1}{\left|\underline{r} - \underline{r}'\right|^2} \cdot \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{\left|\underline{r} - \underline{r}'\right|} \tag{III.74}$$

- $\Phi(\underline{r})$ ist Lösung der Feldgleichung

$$\Delta \Phi(\underline{r}) = 4\pi\gamma\rho(\underline{r}) \tag{III.75}$$

5.2 „Ableitung“ der Feldgleichungen

Forderungen an die aufzustellenden Gleichungen

1. Tensorgleichungen, d.h. Unabhängigkeit des Gesetzes von subjektiven Koordinatensystemen
2. Newtonsche Gravitationstheorie soll als Grenzfall enthalten sein
3. Grundgröße der Newtonschen Gravitationstheorie ist das Gravitationspotential Φ ; dann ist gegenüberzustellen die Grundgröße des Riemannschen Raum, also der metrische Fundamentaltensor g_{mn}
4. part. Dgl. max 2. Ordnung in den Unbekannten g_{mn} ; möglichst linear in den höchsten Ableitungen in Gegenüberstellung zu $\Delta\Phi \propto \rho$
5. Ursache (Quelle) des Gravitationsfeldes soll eine Verallgemeinerung der Dichte ρ der schweren Masse sein, eventuell der Energie-Impuls-Tensor T^{mn}

Zwischenüberlegungen

- Hydrodynamik im kräftefreien Fall :

$$T^{mn}{}_{||n} = 0 \quad , \quad T^{mn} = T^{nm} \tag{III.76}$$

- Elektrodynamik im kräftefreien Fall :

$$T^{mn}{}_{||n} = 0 \quad , \quad T^{mn} = T^{nm} \tag{III.77}$$

Ansatz

$$G_{mn} \;=\; -\kappa T_{mn} \text{ , } \kappa \text{ Konstante} \tag{III.78}$$

- wegen

$$T^{mn}{}_{||n} \;=\; 0 \tag{III.79}$$

und

$$T_{mn} \;=\; T_{nm} \tag{III.80}$$

muss

$$G^{mn}{}_{||n} \;=\; 0, \tag{III.81}$$
$$G_{mn} \;=\; G_{nm} \tag{III.82}$$

gelten

- Erinnerung an Bianchi-Identitäten mit Folgerung

$$\left(R^{mn} - \frac{1}{2}g^{mn}R\right)_{||n} = 0 \tag{III.83}$$

- weiterer Baustein für G_{mn} ist g_{mn} selbst
- Ansatz für G^{mn}

$$G^{mn} = R^{mn} - \frac{1}{2}g^{mn}R - \Lambda g^{mn} \tag{III.84}$$

- man kann zeigen, dass es keinen weiteren Tensor gibt, der Forderungen (1) - (5) erfüllt (ohne Beweis)
- Λ kosmologische Konstante,

$$\Lambda \neq 0 \quad \longrightarrow \quad R^{mn} \neq 0 \tag{III.85}$$

  auch bei $T^{mn} = 0$, d.h. völlig materiefreier Raum ist gekrümmt; experimentell schwer nachzuweisen, hier meist

$$\Lambda = 0 \tag{III.86}$$

$$G^{mn} = R^{mn} - \frac{1}{2}g^{mn}R \tag{III.87}$$

$$\tag{III.88}$$

- Λ kann positiv und negativ sein. $\Lambda > 0$ im Zusammenspiel mit der Vorzeichenkonvention in Gleichung (III.84) bedeutet Antigravitation. Dies wird im Anschluss an den folgenden Abschnitt "Newtonscher Grenzfall"gezeigt.

Einsteinsche Feldgleichungen (Einstein : 1905 - 1915)

$$R_{mn} - \frac{1}{2}g_{mn}R = -\kappa T_{mn} \tag{III.89}$$

- Beschreibung der Raumkrümmung (R_{mn}) durch die Materieverteilung (T_{mn})
- 10 part. Dgln für g_{mn}
- Unmöglichkeit T^{mn} vorzugeben, d.h. raum - zeitliche Verteilung der Materie, und g_{mn} auszurechnen, da T^{mn} auch von g^{mn} abhängig
- Raumkrümmung und Bewegung der Materie bilden ein gekoppeltes dynamisches System, das nur simultan gelöst werden kann

Äquivalente Form der Gleichungen, Kontraktion

- Kontraktion

$$R^m_{\ m} - \frac{1}{2} g^m_{\ m} R \ =: \ -R \ = \ -\kappa T^m_{\ m} \ =: \ -\kappa T, \tag{III.90}$$

$$R \ = \ \kappa T \tag{III.91}$$

$$\longrightarrow \quad R_{mn} \ = \ -\kappa (T_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn} T) \tag{III.92}$$

Bezeichnung : Einstein-Tensor G_{mn}

$$G_{mn} = R_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn} R \tag{III.93}$$

5.3 Newtonscher Grenzfall

Festlegung des Grenzfalles

1. Massendichte ρ_0 bzw. Energiedichte $\rho_0 c^2$ ist entscheidender Term im Energie-Impuls-Tensor:

$$\rho_0 c^2 \ \gg \ P_0 \tag{III.94}$$

$$\longrightarrow \quad T^{mn} \ = \ \left(\rho_0 + \frac{P_0}{c^2} \right) u^m u^n + g^{mn} P_0 \tag{III.95}$$

$$\approx \ \rho_0 u^m u^n \tag{III.96}$$

2. Geschwindigkeiten sind klein gegen c :

$$v^a \ \ll \ c$$

$$u^i \ \rightarrow \ (0,0,0,c) \tag{III.97}$$

   (1) und (2)

$$T^{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T^{44} \end{pmatrix}, \quad T^{44} = \rho_0 c^2 \tag{III.98}$$

3. Felder sind langsam veränderlich:

$$(\ )_{|4} \text{ vernachlässigen}$$

4. Metrik weicht nur schwach vom flachen Raum ab

$$g_{mn} \ = \ \eta_{mn} + f_{mn}, \tag{III.99}$$

$$|f_{mn}| \ \ll \ 1, \tag{III.100}$$

   Vernachlässigung von quadratischen Termen in f_{mn}

Verbleibende Gleichung

$$\begin{aligned} R_{44} &= -\kappa(T_{44} - \frac{1}{2}\eta_{44}T) \\ &= -\kappa(\rho_0 c^2 + \frac{1}{2}(-\rho_0 c^2)) \end{aligned} \tag{III.101}$$

$$R_{44} = -\frac{\kappa}{2}\rho_0 c^2 \tag{III.102}$$

- R_{44} aus

$$R_{mikp} = \frac{1}{2}(g_{mk|i|p} + g_{ip|m|k} - g_{mp|i|k} - g_{ik|m|p}) + \text{ quadr. Terme in } \Gamma \tag{III.103}$$

$$R^n{}_{ikp} = \frac{1}{2}\eta^{nm}\left(f_{mk|i|p} + f_{ip|m|k} - f_{mp|i|k} - f_{ik|m|p}\right) \tag{III.104}$$

$$R_{44} = R^n{}_{4n4} = \frac{1}{2}\eta^{nm}(f_{mn|4|4} + f_{44|m|n} - f_{m4|4|n} - f_{4n|m|4}) \tag{III.105}$$

- $(\ )_{|4} = 0$

$$R_{44} = \frac{1}{2}\eta^{nm} f_{44|m|n} = \frac{1}{2}\Delta f_{44} \tag{III.106}$$

$$\longrightarrow \quad \Delta f_{44} = -\kappa\rho_0 c^2 \tag{III.107}$$

- Struktur einer Poisson-Gleichung, aber f_{44} dimensionslos, kein Potential
  $\longrightarrow$ zusätzliche Information notwendig

- Geodäten-Gleichung

$$\frac{d^2\xi^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{kp}\frac{d\xi^k}{d\tau}\frac{d\xi^p}{d\tau} = 0 \tag{III.108}$$

  für langsam bewegte Teilchen (z.B. Planeten)

$$\tau \approx t\ , \tag{III.109}$$

$$\frac{d\xi^k}{d\tau} = u^k \approx (0,0,0,c) \tag{III.110}$$

  i = a :

$$\frac{d^2\xi^a}{dt^2} = -\Gamma^a_{44}c^2 \tag{III.111}$$

$$\Gamma^m_{ik} = \frac{1}{2}g^{mn}(g_{in|k} + g_{kn|i} - g_{ik|n}) \tag{III.112}$$

$$\Gamma^a_{44} = \frac{1}{2}\eta^{an}(f_{4n|4} + f_{4n|4} - f_{44|n}) \tag{III.113}$$

$$\Gamma^a_{44} = -\frac{1}{2}\eta^{ab} f_{44|b} \tag{III.114}$$

$$\frac{d^2\xi^a}{dt^2} = \frac{c^2}{2}\eta^{ab} f_{44|b} \tag{III.115}$$

- Vergleich mit Bewegungsgleichung eines Teilchens im Gravitationspotential Φ

$$\frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = -\partial_{\underline{r}}\Phi = -grad\Phi \tag{III.116}$$

$$\frac{d^2\xi^a}{dt^2} = -\Phi^{|a} = -\eta^{ai}\Phi_{|i} = -\eta^{ab}\Phi_{|b} \tag{III.117}$$

$$\rightarrow \quad -\Phi = \frac{c^2}{2} f_{44} \tag{III.118}$$

1.

$$g_{44} = \eta_{44} + f_{44} = -1 - \frac{2\Phi}{c^2} \tag{III.119}$$

$$g_{44} = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) \tag{III.120}$$

2.

$$\Delta\Phi = 4\pi\gamma\rho = -\frac{c^2}{2}\Delta f_{44} \tag{III.121}$$

$$= \frac{c^2}{2}\kappa\rho_0 c^2 = \frac{c^4}{2}\kappa\rho \quad (\rho_0 = \rho) \tag{III.122}$$

$$\longrightarrow \quad \kappa = \frac{8\pi}{c^4}\,\gamma \tag{III.123}$$

(III.124)

Verknüpfung zw. Einstein(κ) und Newton (γ)

- Newtonscher Grenzfall mit Kosmologischer Konstanten und Interpretation des Vorzeichens der Kosmologischen Konstanten

Anknüpfung an Gleichung (III.84) :

$$R^{mn} - \frac{R}{2}\,g^{mn} - \Lambda\, g^{mn} = -\varkappa T^{mn} \tag{III.125}$$

Folgerungen:

$$\begin{aligned} R^m{}_n - \frac{R}{2} g^m{}_n - \Lambda g^m{}_n &= -\varkappa T^m{}_n \\ R - \frac{R}{2}\,4 - \Lambda\,4 &= -\varkappa T \\ -R - 4\,\Lambda &= -\varkappa T \\ R &= \varkappa T - 4\,\Lambda \end{aligned} \tag{III.126}$$

$$
\begin{aligned}
R^{mn} &- \frac{g^{mn}}{2}\,(\varkappa T - 4\,\Lambda) - \Lambda g^{mn} = -\varkappa T^{mn} \\
R^{mn} &- \frac{\varkappa}{2}\,T\,g^{mn} + 2\,\Lambda\,g^{mn} - \Lambda g^{mn} = -\varkappa T^{mn} \\
R^{mn} &= -\varkappa T^{mn} + \frac{\varkappa}{2}\,T\,g^{mn} - \Lambda g^{mn} \\
R^{mn} &= -\varkappa\left(T^{mn} - \frac{T}{2}\,g^{mn}\right) - \Lambda\,g^{mn} \qquad \text{(III.127)} \\
R_{mn} &= -\varkappa\left(T_{mn} - \frac{T}{2}\,g_{mn}\right) - \Lambda\,g_{mn} \qquad \text{(III.128)}
\end{aligned}
$$

Im Newtonschen Grenzfall gilt

$$g_{44} \approx -1 \qquad \text{(III.129)}$$

woraus folgt

$$R_{44} = -\varkappa\left(T_{44} + \frac{T}{2}\right) + \Lambda\,. \qquad \text{(III.130)}$$

Wegen

$$T = g^{ik}\,T_{ik} = g^{44}T_{44} = -T_{44} \qquad \text{(III.131)}$$

folgt weiter

$$
\begin{aligned}
R_{44} &= -\frac{\varkappa}{2}\,T_{44} + \Lambda \\
R_{44} &= -\frac{\varkappa}{2}\,\rho_0\,c^2 + \Lambda\,. \qquad \text{(III.132)}
\end{aligned}
$$

Somit kann $\Lambda > 0$ als Anti-Gravitation interpretiert werden, denn die gravitierende Wirkung von $\rho_0\,c^2$ wird herabgesetzt.

5.4 Struktur der Einsteinschen Feldgleichungen

Feldgleichungen

$$R_{mn} - \frac{1}{2}g_{mn}R = -\kappa T_{mn} \qquad \text{(III.133)}$$

- 10 part. Dgl. für 10 g_{mn}
- 10 Dgln. sind nicht unabhängig wegen

$$\left(R^{mn} - \frac{1}{2}g^{mn}R\right)_{||n} = 0 \qquad \text{(III.134)}$$

(4 Gleichungen)

- nur 10-4=6 Gleichungen sind wirklich unabhängig
- g_{mn} nicht eindeutig bestimmt
- Folge der Kovarianz, denn es muss aus Lösungen $g_{mn}(\xi)$ durch $\xi'(\xi)$ auch $g_{p'q'}(\xi')$ Lösung sein

  $\longrightarrow$ Feldgleichungen dürfen daher nur 6 Funktionen festlegen
- geschickte Wahl der ξ erleichtert Lösung

Vergleich mit Elektrodynamik in SRT

- Eichmöglichkeit für Potentiale, z.B. Lorentz-Eichung

$$A^i{}_{|i} = 0 \tag{III.135}$$

- Feldgleichungen bekommen einfache Form

$$\Box A^i = \eta^{kl} A^i{}_{|k|l} = A^{i|k}{}_{|k} = -J^i \tag{III.136}$$

Feldgleichungen und Geodäten

- Frage: Muss Geodätengleichung

$$\frac{d^2\xi^1}{d\lambda^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{d\xi^k}{d\lambda}\frac{d\xi^l}{d\lambda} = 0 \tag{III.137}$$

  als Bewegungsgleichung von Testteilchen zusätzlich gefordert werden?
- Antwort: Nein, Geodätengleichung folgt aus $T^{mn}{}_{||n} = 0$, ist also Folge der lokalen Energie-Impuls-Erhaltung
- Beweis: vgl. Stephani, S.92

Kapitel IV

Schwarzschild-Lösung

kugelsymmetrische Gravitationsfelder

Erwartung besonderer Einfachheit bei Kugelsymmetrie

wichtigste Gravitationsfelder für uns: Sonne und Erde; nahezu kugelsymmetrisch, Drehung langsam ($v^a << c$)

1 Kugelsymmetrie in 4 Dimensionen

Bezeichnungen

$\xi^1 = R, \xi^2 = \vartheta, \xi^3 = \varphi, \xi^4 = cT$

3-dim. Linienelement

$$ds^2 = g_{11}(R, cT)dR^2 + g_{22}(R, cT)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \tag{IV.1}$$

- wg. Kugelsymmetrie darf keine ϑ- oder φ- Richtung ausgezeichnet sein $\longrightarrow$
- g_{11} und g_{22} dürfen nicht von ϑ und φ abhängen,
- ds^2 darf nicht vom Vorzeichen von $d\vartheta$ oder $d\varphi$ abhängen: $g_{12} = g_{13} = g_{23} = 0$

4-dim. Verallgemeinerung

- $g_{24} = g_{34} = 0$, weil ds^2 nicht vom Vorzeichen von $d\vartheta$ oder $d\varphi$ abhängen darf
- allgemeinster kugelsymmetrischer Ansatz

  $ds^2 = g_{11}(R, cT)dR^2 + g_{22}(R, cT)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) + 2g_{14}(R, cT)dRdcT + g_{44}(R, cT)c^2dT^2$

Vereinfachung durch Koordinatentransformation

- $r' = \sqrt{g_{22}(R, cT)}, \vartheta' = \vartheta, \varphi' = \varphi, cT' = cT$

- Striche weglassen

$$\longrightarrow \quad R = R(r, cT) \tag{IV.2}$$
$$\longrightarrow \quad dR = \ldots dr + \ldots dcT \tag{IV.3}$$

-

$$ds^2 \;=\; h^2 dr^2 - 2\ a\ b\ dr\ dcT - b^2 c^2 dT^2 + r^2(d\vartheta^2 + sin^2\vartheta d\varphi) \tag{IV.4}$$
$$h(r,T), a(r,T), b(r,T) \tag{IV.5}$$

- Interpretation von r : r=const, T=const beschreibt eine Kugel, deren Oberfläche zu $4\pi r^2$ auszurechnen ist; r ist aber etwas anderes als der Radius

weitere Koordinatentransformation: Beseitigung des gemischten Terms durch Einführung einer neuen Zeitkoordinate $t = t(T, r)$

- Vorgabe der Transformation nicht integral sondern differentiell; trotzdem muss t holonom sein

$$dct = e^{-\frac{\gamma(r,T)}{2}}(a\ dr + b\ dcT) \tag{IV.6}$$

- $(a\ dr + b\ dcT)$ i.a. kein vollständiges Differential; integrierender Faktor $e^{-\frac{\gamma}{2}}$ macht rechte Seite zum vollständigen Differential $\longrightarrow$ t holonom Koord. $\longrightarrow$ Existenz von $t(T, r)$ gesichert

  Anm.: vgl. math. Satz: Pfaffsche Formen mit 2 Veränderlichen haben stets einen integrierenden Faktor!

-

$$2a\ b\ dr\ dcT + b^2(dcT)^2 = e^{\gamma}(dct)^2 - a^2 dr^2 \tag{IV.7}$$

-

$$h^2 + a^2 \;=:\; e^{\lambda} \tag{IV.8}$$

-

$$ds^2 = e^{\lambda(r,t)}dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) - e^{\gamma(r,t)}dct^2 \tag{IV.9}$$

(Schwarzschildsche Form des Linienelementes einer kugelsymmetrischen Metrik)

$$\longrightarrow \quad g_{11} = e^{\lambda},\ g_{22} = r^2,\ g_{33} = r^2\sin^2\vartheta,\ g_{44} = -e^{\gamma}, \tag{IV.10}$$
$$g_{ik} = 0 \ \text{ für } i \neq k \tag{IV.11}$$

- Der inverse metrische Tensor g^{ik} ist einfach hinzuschreiben: die Inverse einer Diagonalmatrix ist wieder diagonal, die Diagonalelemente sind invers zueinander

2 Aufstellen der Feldgleichungen

Christoffel - Symbole

- vorbereitende Bereitstellung, da in Feldgleichungen benötigt
- Berechnung der Γ^i_{kl} entweder aus Definition

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{is}(g_{sk|l} + g_{sl|k} - g_{kl|s}) \tag{IV.12}$$

- geschickter ist das Ablesen der Γ^i_{kl} aus der Geodäten-Gleichung

$$\ddot{\xi}^i + \Gamma^i_{kl}\dot{\xi}^k\dot{\xi}^l = 0 \tag{IV.13}$$

- Geodäten-Gleichung aus LII mit der Lagrange-Funktion (vgl. Abschnitt Geodäten)

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 \tag{IV.14}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{e^\lambda\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2\left[\left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2 + \sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2\right] - e^\nu\left(\frac{dct}{d\tau}\right)^2\right\} \tag{IV.15}$$

- Aufstellen der LII

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial d_\tau \xi^i} - \frac{\partial L}{\partial \xi^i} = 0 \tag{IV.16}$$

- Abkürzungen

$$\frac{\partial(\ )}{\partial r} = (\ )', \tag{IV.17}$$

$$\frac{\partial(\ )}{\partial ct} = (\ )^\cdot \tag{IV.18}$$

- $\xi^1 = r$:

$$\frac{d}{d\tau}\left(e^\lambda\frac{dr}{d\tau}\right) - \frac{1}{2}e^\lambda\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2\lambda' - \tag{IV.19}$$

$$- r\left[\left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2 + \sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2\right] + \frac{1}{2}e^\nu\left(\frac{dct}{d\tau}\right)^2\nu' = 0 \tag{IV.20}$$

$$e^\lambda\left\{\frac{d^2r}{d\tau^2} + \lambda'\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \dot{\lambda}\frac{dr}{d\tau}\cdot\frac{dct}{d\tau}\right\} - \frac{1}{2}e^\lambda\lambda'\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \tag{IV.21}$$

$$- r\left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2 - r\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2}e^\nu\nu'\left(\frac{dct}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{IV.22}$$

$$\left(\frac{d^2r}{d\tau^2}\right) + \frac{1}{2}\lambda'\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \dot{\lambda}\frac{dr}{d\tau}\cdot\frac{dct}{d\tau} - re^{-\nu}\left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2 - \tag{IV.23}$$

$$- r\sin^2\vartheta e^{-\lambda}\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 - \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}\left(\frac{dct}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{IV.24}$$

$$\longrightarrow \Gamma^1_{11} = \frac{\lambda'}{2}; \tag{IV.25}$$

$$\Gamma^1_{14} = \frac{\dot{\lambda}}{2}; \tag{IV.26}$$

$$\Gamma^1_{22} = -r\ e^{-\lambda}; \tag{IV.27}$$

$$\Gamma^1_{33} = -r\sin^2\vartheta e^{-\lambda}; \tag{IV.28}$$

$$\Gamma^1_{44} = \frac{1}{2}\nu' e^{\nu-\lambda} \tag{IV.29}$$

- $\xi^2 = \vartheta$:

$$\frac{d}{d\tau}\left(r^2\frac{d\vartheta}{d\tau}\right) - r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{IV.30}$$

$$\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\vartheta}{d\tau} - \sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{IV.31}$$

$$\longrightarrow \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}; \tag{IV.32}$$

$$\Gamma^2_{33} = -\sin\vartheta\cos\vartheta \tag{IV.33}$$

- $\xi^3 = \varphi$:

$$\frac{d}{d\tau}\left(r^2\sin^2\vartheta\frac{d\varphi}{d\tau}\right) = 0 \tag{IV.34}$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau} + 2\cot\vartheta\frac{d\vartheta}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau} = 0 \tag{IV.35}$$

$$\longrightarrow \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}; \tag{IV.36}$$

$$\Gamma^3_{23} = \cot\vartheta \tag{IV.37}$$

- $\xi^4 = ct$:

$$\frac{d}{d\tau}\left(-e^{\nu}\frac{dct}{d\tau}\right) - \frac{1}{2}e^{\lambda}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2\cdot\dot{\lambda} + \frac{1}{2}e^{\nu}\dot{\nu}\left(\frac{dct}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{IV.38}$$

$$-e^{\nu}\frac{d^2ct}{d\tau^2} - e^{\nu}\nu'\frac{dr}{d\tau}\frac{dct}{d\tau} - e^{\nu}\dot{\nu}\left(\frac{dct}{d\tau}\right)^2 - \tag{IV.39}$$

$$-\frac{1}{2}e^{\lambda}\dot{\lambda}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2}e^{\nu}\dot{\nu}\left(\frac{dct}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{IV.40}$$

$$\frac{d^2ct}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\dot{\nu}\left(\frac{dct}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2}\dot{\lambda}e^{\lambda-\nu}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \nu'\frac{dr}{d\tau}\frac{dct}{d\tau} = 0 \tag{IV.41}$$

$$\longrightarrow \Gamma^4_{11} = \frac{\dot{\lambda}}{2}e^{\lambda-\nu}; \tag{IV.42}$$

$$\Gamma^4_{14} = \frac{\nu'}{2}; \tag{IV.43}$$

$$\Gamma^4_{44} = \frac{\dot{\nu}}{2} \tag{IV.44}$$

- alle anderen Γ 's verschwinden

  Γ 's im Überblick

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \tfrac{\lambda'}{2} & \Gamma^1_{22} &= -re^{-\lambda}\\
\Gamma^1_{33} &= -r\sin^2\vartheta e^{-\lambda} & \Gamma^1_{44} &= \tfrac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}\\
\Gamma^1_{14} &= \tfrac{\dot\lambda}{2}\\
\Gamma^2_{12} &= \tfrac{1}{r} & \Gamma^2_{33} &= -\sin\vartheta\cos\vartheta\\
\Gamma^3_{13} &= \tfrac{1}{r} & \Gamma^3_{23} &= \cot\vartheta\\
\Gamma^4_{11} &= \tfrac{\dot\lambda}{2}e^{\lambda-\nu} & \Gamma^4_{14} &= \tfrac{\nu'}{2}\\
\Gamma^4_{44} &= \tfrac{\dot\nu}{2}
\end{aligned}$$

- Berechnung einiger Γ's zum Vergleich direkt aus der Definition

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \tfrac{1}{2}g^{1s}(g_{s1|1}+g_{s1|1}-g_{s1|1}) & \Gamma^1_{11} &= \tfrac{\lambda'}{2}\\
\Gamma^1_{11} &= \tfrac{1}{2}g^{1s}g_{s1|1} & \Gamma^1_{12} &= \tfrac{1}{2}g^{1s}(g_{s1|2}+g_{s2|1}-g_{12|s})\\
\Gamma^1_{11} &= \tfrac{1}{2}g^{11}g_{11|1} & &= \tfrac{1}{2}g^{11}(g_{11|2}+g_{12|1}-g_{12|1})\\
g_{11} &= e^{\lambda}, & &= \tfrac{1}{2}g^{11}g_{11|2}\\
g^{11} &= e^{-\lambda} & &= 0\\
g_{11|1} &= e^{\lambda}\cdot\lambda'
\end{aligned}$$

Ricci-Tensor

- $R_{mn} = R^{i}{}_{min} = \Gamma^i_{mi|n} - \Gamma^i_{mn|i} + \Gamma^r_{mi}\Gamma^i_{rn} - \Gamma^r_{mn}\Gamma^i_{ri}$
- $R^1{}_{m1n} = \Gamma^1_{m1|n} - \Gamma^1_{mn|1} + \Gamma^r_{m1}\Gamma^1_{rn} - \Gamma^1_{mn}\Gamma^1_{11} - \Gamma^4_{mn}\Gamma^1_{41}$

  $R^2{}_{m2n} = \Gamma^2_{m2|n} - \Gamma^2_{mn|2} + \Gamma^r_{m2}\Gamma^2_{rn} - \Gamma^2_{mn}\Gamma^2_{12}$

  $R^3{}_{m3n} = \Gamma^3_{m3|n} - \underbrace{\Gamma^3_{mn|3}}_{=0} + \Gamma^r_{m3}\Gamma^3_{rn} - \Gamma^1_{mn}\Gamma^3_{13} - \Gamma^2_{mn}\Gamma^3_{23}$

  $R^4{}_{m4n} = \Gamma^4_{m4|n} - \Gamma^4_{mn|4} + \Gamma^r_{m4}\Gamma^4_{rn} - \Gamma^1_{mn}\Gamma^4_{14} - \Gamma^4_{mn}\Gamma^4_{44}$
- $R^1{}_{m1n}$

  $R^1{}_{11n} = 0 = R^1{}_{n11}$

  $R^1{}_{212} = -\Gamma^1_{22|1} + \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22} - \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11}$

  $R^1{}_{213} = 0 = R^1{}_{312}$

  $R^1{}_{214} = 0 = R^1{}_{412}$

  $R^1{}_{313} = -\Gamma^1_{33|1} + \Gamma^3_{31}\Gamma^1_{33} - \Gamma^1_{33}\Gamma^1_{11}$

  $R^1{}_{314} = 0 = R^1{}_{413}$

  $R^1{}_{414} = \Gamma^1_{41|4} - \Gamma^1_{44|1} + \Gamma^1_{41}\Gamma^1_{14} + \Gamma^4_{41}\Gamma^1_{44} - \Gamma^1_{44}\Gamma^1_{11} - \Gamma^4_{44}\Gamma^1_{41}$

- $R^2{}_{m2n}$

$R^2{}_{121} = \Gamma^2_{12|1} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12}$
$R^2{}_{n22} = 0 = R^2{}_{22n}$
$R^2{}_{123} = 0 = R^2{}_{321}$
$R^2{}_{124} = -\Gamma^1_{14}\Gamma^2_{12} = R^2{}_{421}$
$R^2{}_{323} = -\Gamma^2_{33|2} + \Gamma^3_{32}\Gamma^2_{33} - \Gamma^1_{33}\Gamma^2_{12}$
$R^2{}_{324} = 0 = R^2{}_{423}$
$R^2{}_{424} = -\Gamma^1_{44}\Gamma^2_{12}$

- $R^3{}_{m3n}$

$R^3{}_{131} = \Gamma^3_{13|1} + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{31} - \Gamma^1_{11}\Gamma^3_{13}$
$R^3{}_{132} = 0 = R^3{}_{231}$
$R^3{}_{n33} = 0 = R^3{}_{33n}$
$R^3{}_{134} = -\Gamma^1_{14}\Gamma^3_{13} = R^3{}_{431}$
$R^3{}_{232} = +\Gamma^3_{23|2} + \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{32} - \Gamma^1_{22}\Gamma^3_{13}$
$R^3{}_{234} = 0 = R^3{}_{432}$
$R^3{}_{434} = -\Gamma^1_{44}\Gamma^3_{13}$

- $R^4{}_{m4n}$

$R^4{}_{141} = \Gamma^4_{14|1} - \Gamma^4_{11|4} + \Gamma^1_{14}\Gamma^4_{11} + \Gamma^4_{14}\Gamma^4_{41} - \Gamma^4_{11}\Gamma^4_{44} - \Gamma^1_{11}\Gamma^4_{14}$
$R^4{}_{142} = 0 = R^4{}_{241}$
$R^4{}_{143} = 0 = R^4{}_{341}$
$R^4{}_{n44} = 0 = R^4{}_{44n}$
$R^4{}_{242} = -\Gamma^1_{22}\Gamma^4_{14}$
$R^4{}_{243} = 0 = R^4{}_{342}$
$R^4{}_{343} = -\Gamma^1_{33}\Gamma^4_{14}$

Ricci - Tensor in Γ's

- $R_{11} = \Gamma^2_{12|1} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13|1} + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{13} - \Gamma^1_{11}\Gamma^3_{13} + \Gamma^4_{14|1} - \Gamma^4_{11|4} + \Gamma^1_{14}\Gamma^4_{11}$
  $+\Gamma^4_{14}\Gamma^4_{41} - \Gamma^4_{11}\Gamma^4_{44} - \Gamma^1_{11}\Gamma^4_{14}$

- $R_{12} = 0$
- $R_{13} = 0$
- $R_{14} = -\Gamma^1_{14}\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{14}\Gamma^3_{13}$
- $R_{22} = -\Gamma^1_{22|1} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22} - \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} + \Gamma^3_{23|2} + \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{32} - \Gamma^1_{22}\Gamma^3_{13} - \Gamma^1_{22}\Gamma^4_{14}$
- $R_{23} = 0$
- $R_{24} = 0$
- $R_{33} = -\Gamma^1_{33|1} + \Gamma^3_{31}\Gamma^1_{33} - \Gamma^1_{33}\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{33|2} + \Gamma^3_{32}\Gamma^2_{33} - \Gamma^1_{33}\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{33}\Gamma^4_{14}$
- $R_{34} = 0$
- $R_{44} = \Gamma^1_{41|4} - \Gamma^1_{44|1} + \Gamma^1_{41}\Gamma^1_{14} + \Gamma^4_{41}\Gamma^1_{44} - \Gamma^1_{44}\Gamma^1_{11} - \Gamma^4_{44}\Gamma^1_{41} - \Gamma^1_{44}\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{44}\Gamma^3_{13}$

Nichtverschwindende R_{ip}

- $R_{11} = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{2}\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{2}\frac{1}{r} + \frac{\nu''}{2} - \left\{\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}}{2}\left(\dot{\lambda} - \dot{\nu}\right)\right\} e^{\lambda-\nu} + \frac{\dot{\lambda}}{2}\frac{\dot{\lambda}}{2}e^{\lambda-\nu} + \left(\frac{\nu'}{2}\right)^2 - \frac{\dot{\lambda}}{2}e^{\lambda-\nu}\frac{\dot{\nu}}{2} - \frac{\lambda'}{2}\frac{\nu'}{2}$
  $R_{11} = \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'\nu'}{4} - \frac{\lambda'}{r} - e^{\lambda-\nu}\left\{\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4}\right\}$

- $R_{22} = +\left(1 - r\lambda'\right)e^{-\lambda} - \frac{1}{r}re^{-\lambda} + \frac{\lambda'}{2}re^{-\lambda} - \frac{1}{\sin^2\vartheta} + \cot^2\vartheta + re^{-\lambda}\frac{1}{r} + re^{-\lambda}\frac{\nu'}{2}$
  $R_{22} = -1 + e^{-\lambda}\left\{1 + \frac{r}{2}(\nu' - \lambda')\right\}$
- $R_{33} = \sin^2\vartheta(1 - r\lambda')e^{-\lambda} - \frac{1}{r}r\sin^2\vartheta e^{-\lambda} + \frac{\lambda'}{2}re^{-\lambda} + \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta + r\sin^2\vartheta e^{-\lambda}\frac{1}{r} + r\sin^2\vartheta e^{-\lambda}\frac{\nu'}{2}$
  $R_{33} = \sin^2\vartheta\left\{-1 + e^{-\lambda}\left[1 + \frac{r}{2}(\nu' - \lambda')\right]\right\}$
  $R_{33} = \sin^2\vartheta R_{22}$
- $R_{44} = \frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{1}{2}\left\{\nu'' + \nu'(\nu' - \lambda')\right\}e^{\nu-\lambda} + \left(\frac{\dot{\lambda}}{2}\right)^2 + \frac{\nu'}{2}\frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda} - \frac{\lambda'}{2}\frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda} - \frac{\dot{\nu}}{2}\frac{\dot{\lambda}}{2} - \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}\frac{1}{r} - \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}\frac{1}{r}$
  $R_{44} = \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4} - e^{\nu-\lambda}\left\{\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\nu'}{r}\right\}$
- $R_{14} = -\frac{\dot{\lambda}}{2}\frac{1}{r} - \frac{\dot{\lambda}}{2}\frac{1}{r}$
  $R_{14} = -\frac{\dot{\lambda}}{r}$

3 Lösung der Vakuum - Feldgleichungen

Lösung außerhalb der Massenverteilung ($\hat{=}$ äußere Schwarzschild- Lösung)

$T^{mn} \equiv 0$

Einfluss der Massenverteilung besteht nur in der Symmetrie des Lösungsansatzes, sonst gehen Massen nicht mehr ein

$$\begin{aligned} R_{mn} - \frac{R}{2} g_{mn} &= 0 \qquad |g^{nm} \\ g^{nm} R_{mn} - \frac{R}{2} g^{nm} g_{mn} &= 0 \\ R^n_{\ n} - \frac{R}{2} \delta^n_n &= 0 \\ R - \frac{R}{2} \cdot 4 &= 0 \\ R &= 0 \end{aligned}$$

Vakuum-Feldgleichungen

$R_{mn} = 0$

- $R_{11} = \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'\nu'}{4} - \frac{\lambda'}{r} - e^{\lambda-\nu}\left\{\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4}\right\} = 0$
- $R_{22} = -1 + e^{-\lambda}\left\{1 + \frac{r}{2}(\nu' - \lambda')\right\} = 0$
- $R_{33} = \sin^2\vartheta R_{22} = 0$
- $R_{44} = \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} - e^{\nu-\lambda}\left\{\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\nu'}{r}\right\} = 0$
- $R_{14} = -\frac{\dot{\lambda}}{r} = 0$

Birkhoffscher Satz (1923) :

Jede kugelsymmetrische Lösung der Einsteinschen Gleichungen ist statisch.

- Beweis:

  1. $R_{14} = 0$
     $\longrightarrow \dot{\lambda} = 0$
     $\longrightarrow \lambda = \lambda(r)$

  2. $R_{22} = 0$
     $\longrightarrow \nu' = \nu'(r)$
     $\longrightarrow \nu = \nu(r) + f(t)$

3. $f(t)$ kann wegtransformiert werden: Eingang von ν in das Linienelement über

$$e^{\nu}(dct)^2 = e^{\nu(r)}e^{f(t)}(dct)^2$$

Koordinatentransformation

$$dct' = e^{\frac{f(t)}{2}}dct$$

bringt in neuen Koordinaten ct' f zum Verschwinden (Strich im weiteren wieder weggelassen)
$\longrightarrow \nu(r)$

4. wegen $\lambda(r)$ und $\nu(r)$ ist Metrik zeitunabhängig

q.e.d

Verbleibende Gleichungen

$$\begin{array}{lll} R_{11}: & \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'\nu'}{4} - \frac{\lambda'}{r} = 0 \\ R_{44}: & \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\nu'}{r} = 0 \\ R_{22}, R_{33}: & e^{-\lambda}\left\{1 + \frac{r}{2}(\nu' - \lambda')\right\} = 1 \end{array}$$

- $R_{11} - R_{44}$:

$$\begin{aligned} \lambda' &= -\nu' \\ \nu &= -\lambda(r) + \tilde{f}(t) \end{aligned}$$

$\tilde{f}(t)$ kann wie $f(t)$ durch Koordinatentransformation $dct' = e^{\frac{\tilde{f}}{2}}dct$ zum Verschwinden gebracht werden.

$$\nu(r) = -\lambda(r)$$

- R_{22}, R_{33} : Substitution $\alpha = e^{-\lambda}$

$$\begin{aligned} \alpha' = -\lambda' e^{-\lambda} &= -\lambda'\alpha \\ e^{-\lambda}\left\{1 + \frac{r}{2}(-2\lambda')\right\} &= 1 \\ \alpha\left\{1 + r\frac{\alpha'}{\alpha}\right\} &= 1 \\ \alpha' + \frac{1}{r}\alpha &= \frac{1}{r} \end{aligned}$$

Homog. Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{\alpha} &= -\frac{dr}{r} \\ ln\alpha &= -lnr + const \\ \alpha &\propto \frac{1}{r} \\ \alpha &= -\frac{2M}{r} \end{aligned}$$

mit $-2M$ als Integrationskonstanten
Inhomog. Lösung:

$$\alpha = 1$$

Allg. Lösung:

$$\alpha \;=\; 1 - \frac{2M}{r} \;=\; e^{-\lambda} \;=\; e^{\nu}$$

$\longrightarrow$ Schwarzschild - Metrik (1916)

- $$ds^2 \;=\; \frac{dr^2}{1-2\frac{M}{r}} + r^2\left(d\vartheta^2 + (\sin\vartheta)^2 d\varphi^2\right) - \left(1 - 2\frac{M}{r}\right) dct^2$$

Diskussion

- Bedeutung von M ?
  für $r \gg M$ nur geringe Abweichung vom flachen Raum:

$$g_{mn} \;=\; \eta_{mn} + f_{mn}\;, \quad |f_{mn}| << 1 \tag{IV.45}$$

  $\longrightarrow$ Verknüpfung mit Newtonschem Grenzfall (vgl. (III.120)) :

$$g_{44} \;=\; -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) = -\left(1 - 2\frac{M}{r}\right) \tag{IV.46}$$

$$\longrightarrow \quad \Phi \;=\; -\frac{Mc^2}{r} \tag{IV.47}$$

  vgl. mit $\Phi = -\gamma\frac{M_N}{r}$,
  wobei M_N (Newtonsche) Masse einer kugelsymmetrischen Massenverteilung,

$$\longrightarrow \quad M = \frac{\gamma}{c^2} M_N = \frac{\kappa c^2}{8\pi} M_N \tag{IV.48}$$

  M hat Dimension einer Länge
  $\longrightarrow$ Einführung von
  $r_G = 2M$ { Gravitationsradius oder Schwarzschild - Radius

- Beispiele für r_G : Sonne $r_G = 2,96$ km; Erde $r_G = 8,8$ mm
  Schwarzschild - Radius wird meist im Innern der Massenverteilung liegen

- Falls r_G doch bereits im Außenraum liegt, wird r_G zum Ereignishorizont eines Schwarzen Loches; genauere Diskussion später

Bedeutung der Koordinaten

- insbesondere r,t haben keine unmittelbare physikalische Bedeutung
- t wird Koordinatenzeit genannt im Unterschied zur Eigenzeit τ eines im Gravitationsfeld ruhenden Beobachters ($dr = d\vartheta = d\varphi = 0$)
-

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_G}{r}\right) dct^2 \underbrace{\stackrel{!}{=}}_{Def.derEigenzeit} -c^2 d\tau^2 \tag{IV.49}$$

$$\longrightarrow \quad d\tau = \sqrt{1 - \frac{r_G}{r}}\, dt \tag{IV.50}$$

- r ist radiale Koordinate aber nicht der Radius; r = const ist Oberfläche einer Kugel mit dem Wert 4 πr^2 , denn für r = const und t = const gilt

$$ds^2 = r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) \tag{IV.51}$$

und für das Flächenelement dS von $d\vartheta$ und $d\varphi$ aufgespannt gilt

$$dS = \sqrt{\tilde{g}} d\vartheta d\varphi \quad (\ \hat{=}\ \text{2-dim. Volumenelement}\ ) \tag{IV.52}$$

mit

$$\tilde{g} = (g_{22}g_{33} - g_{23}g_{32}) = r^4 sin^2\vartheta \tag{IV.53}$$

also

$$S = \int dS = r^2 \int \sin\vartheta\ d\vartheta\ d\varphi = 4\pi r^2 \tag{IV.54}$$

Linienelement in radiale Richtung ist durch

$$ds = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_G}{r}}} =: dR \quad \text{(radialer Abstand)} \tag{IV.55}$$

gegeben, d.h. $dR > dr$, radialer Abstand ist immer größer als Differenz der radialen Koordinate.

- Darstellung der Fläche t=const, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (Rotationsfläche) im Einbettungsraum:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_G}{r}} + r^2 d\varphi^2 \tag{IV.56}$$

Entlangwandern auf $\varphi = const$:

$$ds = dR = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_G}{r}}} \tag{IV.57}$$

Schwarzschild-Metrik mit kosmolog. Glied

$$
\begin{aligned}
R_{mn} - \frac{R}{2} g_{mn} - \Lambda g_{mn} &= 0 \\
R^m_{\ m} - \frac{R}{2}\delta^m_{\ n} - \Lambda \delta^m_{\ n} &= 0 \\
R - \frac{R}{2} 4 - \Lambda 4 &= 0 \\
R &= -4\Lambda \\
R_{mn} + 2\Lambda g_{mn} - \Lambda g_{mn} &= 0 \\
R_{mn} &= -\Lambda g_{mn} \\
R^m_{\ n} &= -\Lambda \delta^m_{\ n}
\end{aligned}
$$

$R_{14} = 0 \longrightarrow$ Birkhoffscher Satz auch bei $\Lambda \neq 0$

$$
\begin{aligned}
R_{11} &= \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'\nu'}{4} - \frac{\lambda'}{r} = -\Lambda e^{\lambda} && \text{(IV.58)} \\
R_{22} &= -1 + e^{-\lambda}\left\{1 + \frac{r}{2}(\nu' - \lambda')\right\} = -\Lambda r^2 && \text{(IV.59)} \\
R_{33} &= \sin^2\vartheta \; R_{23} \; = \; -\Lambda \, r^2 \sin^2\vartheta && \text{(IV.60)} \\
R_{44} &= -e^{\nu-\lambda}\left\{\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\nu'}{r}\right\} = +\Lambda e^{\nu} && \text{(IV.61)}
\end{aligned}
$$

$R_{11} - R_{44}$:

$$
\begin{aligned}
\lambda' &= -\nu' && \text{(IV.62)} \\
\nu &= -\lambda + \tilde{f}(t) && \text{(IV.63)}
\end{aligned}
$$

$\tilde{f}(t)$ kann durch Trafo

$$
dct' = e^{\frac{\tilde{f}}{2}} dct \qquad \text{(IV.64)}
$$

zum Verschwinden gebracht werden

$$
\longrightarrow \quad \nu(r) = -\lambda(r) \qquad \text{(IV.65)}
$$

R_{22}, R_{33} : $\qquad e^{-\lambda}\left\{1 + \frac{r}{2}(-2\lambda')\right\} = 1 - \Lambda r^2$

$$
\begin{aligned}
\alpha &= e^{-\lambda} && \text{(IV.66)} \\
\alpha' &= -\lambda' e^{-\lambda} \; = \; -\lambda'\alpha && \text{(IV.67)} \\
\alpha\left\{1 + r\frac{\alpha'}{\alpha}\right\} &= 1 - \Lambda r^2 && \text{(IV.68)} \\
\alpha + r\alpha' &= 1 - \Lambda r^2 && \text{(IV.69)} \\
\alpha' + \frac{1}{r}\alpha &= \frac{1}{r} - \Lambda r && \text{(IV.70)}
\end{aligned}
$$

Homog. Lösung :

$$\alpha = -\frac{2M}{r} \tag{IV.71}$$

Inhomog. Lösung :

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1 - \beta\Lambda r^2 && \text{(IV.72)}\\
\alpha' &= -2\beta\Lambda r && \text{(IV.73)}\\
-2\beta\Lambda r + \cancel{\frac{1}{r}} - \beta\Lambda r &= \cancel{\frac{1}{r}} - \Lambda r && \text{(IV.74)}\\
2\beta + \beta &= 1 && \text{(IV.75)}\\
\beta &= \frac{1}{3} && \text{(IV.76)}\\
\alpha &= 1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2 && \text{(IV.77)}\\
\longrightarrow \quad e^{-\lambda} &= 1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2 && \text{(IV.78)}
\end{aligned}$$

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2} + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right) - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)dct^2 \tag{IV.79}$$

Zusammenfassung : Schwarzschild - Lösung

Kugelsymmetrie in 4 Dimensionen

$$ds^2 = g_{11}(R,cT)dR^2 + g_{22}(R,cT)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \quad \text{(IV.80)}$$
$$+ 2g_{14}(R,cT)\ dR\ dcT + g_{44}(R,cT)(dcT)^2 \quad \text{(IV.81)}$$

Koordinatentransformationen

- $r = \sqrt{g_{22}(R,cT)},\ \vartheta = \vartheta,\ \varphi = \varphi,\ cT = cT$

  $$ds^2 = h^2dr^2 - 2ab\ dr\ dcT - b^2(dcT)^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \quad \text{(IV.82)}$$

  $h(r,T);\ a(r,T);\ b(r,T)$

- $t = t(T,r)$ vermittels $dct = e^{-\frac{\nu(r,T)}{2}}\ \{a\ dr + b(dcT)\}$

  $$ds^2 = e^{\lambda}dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) - e^{\nu}dct^2 \quad \text{(IV.83)}$$

  $\longrightarrow g_{11} = e^{\lambda(r,t)},\ g_{22} = r^2,\ g_{33} = r^2\sin^2\vartheta,\ g_{44} = -e^{\nu(r,t)}, g_{ik} = 0$ für $i \neq k$
  {Schwarzschildsche Form des Linienelementes einer kugelsymmetrischen Metrik}

Christoffel - Symbole

- Ausrechnen über Definition oder
- Ablesen aus Geodäten - Gleichung
- Definition: $\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}g^{is}\left(g_{sk|l} + g_{sl|k} - g_{kl|s}\right)$
- Abkürzung $\partial_r(\ ) = ()'$, $\partial_{ct}(\ ) = (\ )^{\cdot}$

$$\begin{array}{llll}
\Gamma^1_{11} = \frac{\lambda'}{2} & & \Gamma^1_{22} = -re^{-\lambda} & \\
\Gamma^1_{33} = -r\sin^2\vartheta e^{-\lambda} & & \Gamma^1_{44} = \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda} & \\
\Gamma^1_{14} = \frac{\dot{\lambda}}{2} & & & \\
\Gamma^2_{12} = \frac{1}{r} & & \Gamma^2_{33} = -\sin\vartheta\cos\vartheta & \\
\Gamma^3_{13} = \frac{1}{r} & & \Gamma^3_{23} = \cot\vartheta & \\
\Gamma^4_{11} = \frac{\dot{\lambda}}{2}e^{\lambda-\nu} & & \Gamma^4_{14} = \frac{\nu'}{2} & \\
\Gamma^4_{44} = \frac{\dot{\nu}}{2} & & &
\end{array}$$

- alle weiteren Γ 's verschwinden

Ricci-Tensor

- $R_{mn} = R^{i}{}_{min} = R^{1}{}_{m1n} + R^{2}{}_{m2n} + R^{3}{}_{m3n} + R^{4}{}_{m4n}$
- $R_{11} = \Gamma^{2}_{12|1} + \Gamma^{2}_{12}\Gamma^{2}_{12} - \Gamma^{1}_{11}\Gamma^{2}_{12} + \Gamma^{3}_{13|1} + \Gamma^{3}_{13}\Gamma^{3}_{13} - \Gamma^{1}_{11}\Gamma^{3}_{13} + \Gamma^{4}_{14|1} - \Gamma^{4}_{11|4} + \Gamma^{1}_{14}\Gamma^{4}_{11}$
  $+ \quad \Gamma^{4}_{14}\Gamma^{4}_{41} - \Gamma^{4}_{11}\Gamma^{4}_{44} - \Gamma^{1}_{11}\Gamma^{4}_{14}$
- $R_{14} = -\Gamma^{1}_{14}\Gamma^{2}_{12} - \Gamma^{1}_{14}\Gamma^{3}_{13}$
- $R_{22} = -\Gamma^{1}_{22|1} + \Gamma^{2}_{12}\Gamma^{1}_{22} - \Gamma^{1}_{22}\Gamma^{1}_{11} + \Gamma^{3}_{23|2} + \Gamma^{3}_{23}\Gamma^{3}_{32} - \Gamma^{1}_{22}\Gamma^{3}_{13} - \Gamma^{1}_{22}\Gamma^{4}_{14}$
- $R_{33} = -\Gamma^{1}_{33|1} + \Gamma^{3}_{31}\Gamma^{1}_{33} - \Gamma^{1}_{33}\Gamma^{1}_{11} - \Gamma^{2}_{33|2} + \Gamma^{3}_{32}\Gamma^{2}_{33} - \Gamma^{1}_{33}\Gamma^{2}_{12} - \Gamma^{1}_{33}\Gamma^{4}_{14}$
- $R_{44} = \Gamma^{1}_{41|4} - \Gamma^{1}_{44|1} + \Gamma^{1}_{41}\Gamma^{1}_{14} + \Gamma^{4}_{41}\Gamma^{1}_{44} - \Gamma^{1}_{44}\Gamma^{1}_{11} - \Gamma^{4}_{44}\Gamma^{1}_{41} - \Gamma^{1}_{44}\Gamma^{2}_{12} - \Gamma^{1}_{44}\Gamma^{3}_{13}$
- alle weiteren R_{mn} verschwinden

Ricci - Tensor in λ und ν

- $R_{11} = \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'\nu'}{4} - \frac{\lambda'}{r} - e^{\lambda-\nu}\left\{\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4}\right\}$
- $R_{22} = -1 + e^{-\lambda}\left\{1 + \frac{r}{2}(\nu' - \lambda')\right\}$
- $R_{33} = \sin^2\vartheta R_{22}$
- $R_{44} = \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} - e^{\lambda-\nu}\left\{\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\nu'}{r}\right\}$
- $R_{14} = -\frac{\dot{\lambda}}{r}$

Vakuum - Feldgleichungen : $R_{mn} = 0$

Birkhoffscher Satz: Jede kugelsymmetrische Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen ist statisch.

- $\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'\nu'}{4} - \frac{\lambda'}{r} = 0$
- $\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\nu'}{r} = 0$
- $e^{-\lambda}\left\{1 + \frac{r}{2}(\nu' - \lambda')\right\} = 1$

Schwarzschild-Lösung

- $ds^2 = \frac{dr^2}{1-\frac{2M}{r}} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dct^2$

- $2M = r_G$ Schwarzschild-Radius, Gravitationsradius

4 Planetenbewegung und Periheldrehung

zu untersuchen ist die relativistische Version des Kepler-Problems, Bewegung eines Körpers (Teilchens) im zentralsymmetrischen Gravitationsfeld

Darstellung des Gravitationsfeldes mit der Schwarzschild-Metrik

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-\frac{r_G}{r}} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) - \left(1-\frac{r_G}{r}\right)dct^2 \tag{IV.84}$$

LII - Gleichungen wurden bereits im Abschnitt „Geodäten“ für eine beliebige Metrik ausgerechnet zu

$$\frac{d^2\xi^i}{d\lambda^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{d\xi^k}{d\lambda}\frac{d\xi^l}{d\lambda} = 0 \tag{IV.85}$$

λ affiner Parameter, z.B. $\lambda = \tau$ mit

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2, \tag{IV.86}$$

- entweder: Γ^i_{kl} auf Schwarzschild - Metrik spezialisieren
- oder: LII erneut ableiten mit sofort auf die Schwarzschild-Metrik spezialisierter Lagrange-Funktion
- 2. Variante geht schneller, also

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2}{1-\frac{r_G}{r}} + r^2\left[\left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2 + \sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2\right] - \left(1-\frac{r_G}{r}\right)\left(\frac{dct}{d\tau}\right)^2\right\} \end{aligned} \tag{IV.87}$$

und

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot\xi^k} - \frac{\partial L}{\partial \xi^k} = 0,\ \dot\xi^k := \frac{d\xi^k}{d\tau} \tag{IV.88}$$

- Vereinfachung möglich über LII für $\xi^2 = \vartheta$:

$$\frac{d}{d\tau}\left(r^2\frac{d\vartheta}{d\tau}\right) - r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{IV.89}$$

$$\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\vartheta}{d\tau} - \sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{IV.90}$$

Vorgabe von Anfangsbedingungen (durch geeignete Wahl eines Koordinatensystems):

$$\begin{aligned} \vartheta(\tau=0) &= \frac{\pi}{2}, \\ \frac{d\vartheta}{d\tau}(\tau=0) &= 0 \\ \longrightarrow\quad \vartheta(\tau) &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(eindeutig nach Dgl. - Theorie) ;
$\longrightarrow$ ebene Bewegung !

- $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ sofort in L einsetzen bevor weitere LII gebildet werden:

$$L = \frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2}{1-\frac{r_G}{r}} + r^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 - \left(1-\frac{r_G}{r}\right)\left(\frac{dct}{d\tau}\right)^2\right\} \tag{IV.91}$$

- $\xi^3 = \varphi$: zyklisch
$\longrightarrow$ Erhaltungssatz (Drehimpuls)

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial d_\tau \varphi} = 0 \tag{IV.92}$$

$$\longrightarrow \quad r^2\frac{d\varphi}{d\tau} = B = const \tag{IV.93}$$

- $\xi^4 = ct$: zyklisch
$\longrightarrow$ Erhaltungssatz (Energie)

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial d_\tau ct} = 0 \tag{IV.94}$$

$$\longrightarrow \quad \left(1-\frac{r_G}{r}\right)\frac{dct}{d\tau} = A = const \tag{IV.95}$$

- $\xi^1 = r$:

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\frac{d_\tau r}{1-\frac{r_G}{r}}\right\} + \frac{1}{2}\frac{\frac{r_G}{r^2}\left(d_\tau r\right)^2}{\left(1-\frac{r_G}{r}\right)^2} - r\left(d_\tau\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{r_G}{r^2}\left(d_\tau ct\right)^2 = 0; \tag{IV.96}$$

anstelle dieser komplizierten Dgl. ist es auch möglich, das 1.Integral

$$\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = -c^2 = \frac{\left(d_\tau r\right)^2}{1-\frac{r_G}{r}} + r^2\left(d_\tau\varphi\right)^2 - \left(1-\frac{r_G}{r}\right)\left(d_\tau ct\right)^2 \tag{IV.97}$$

zu verwenden!

Verifikation des 1. Integrals

- Differenzieren d_τ des 1. Integrals

$$-c^2 = \frac{\left(d_\tau r\right)^2}{1-\frac{r_G}{r}} + r^2\left(d_\tau\varphi\right)^2 - \left(1-\frac{r_G}{r}\right)\left(d_\tau ct\right)^2 \tag{IV.98}$$

unter Beachtung der Erhaltungssätze liefert

$$0 = \frac{2d_\tau r d_\tau^2 r}{1-\frac{r_G}{r}} - \frac{\left(d_\tau r\right)^2}{\left(1-\frac{r_G}{r}\right)^2}\frac{r_G}{r^2}d_\tau r + \underbrace{r^2 d_\tau\varphi}_{=const} d_\tau^2\varphi - \underbrace{\left(1-\frac{r_G}{r}\right)d_\tau ct}_{=const} d_\tau^2 ct \tag{IV.99}$$

$$0 = \frac{d_\tau^2 r}{1-\frac{r_G}{r}} - \frac{1}{2}\frac{\left(d_\tau r\right)^2\frac{r_G}{r^2}}{\left(1-\frac{r_G}{r}\right)^2} + \frac{1}{2}r^2 d_\tau\varphi\frac{d_\tau^2\varphi}{d_\tau r} - \frac{\left(1-\frac{r_G}{r}\right)d_\tau ct}{2}\cdot\frac{d_\tau^2 ct}{d_\tau r} \tag{IV.100}$$

- $\frac{d_\tau^2\varphi}{d_\tau r}$ eliminieren über Erhaltungssatz nach Diff.:

$$2\tau d_\tau r d_\tau\varphi + r^2 d_\tau^2\varphi = 0 \tag{IV.101}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{d_\tau^2\varphi}{d_\tau r} = -2\frac{d_\tau\varphi}{\tau} \tag{IV.102}$$

- $\frac{d_\tau^2 ct}{d_\tau r}$ eliminieren über weiteren Erhaltungssatz nach Diff.

$$\frac{r_G}{r^2} d_\tau r d_\tau ct + \left(1 - \frac{r_G}{r}\right) d_\tau^2 ct = 0 \tag{IV.103}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{d_\tau^2 ct}{d_\tau r} = -\frac{d_\tau^2 ct \frac{r_G}{r^2}}{1 - \frac{r_G}{r}} \tag{IV.104}$$

$$\longrightarrow \quad 0 = \frac{d_\tau^2 r}{1 - \frac{r_G}{r}} - \frac{1}{2}\frac{(d_\tau r)^2 \frac{r_G}{r^2}}{\left(1 - \frac{r_G}{r}\right)^2} - r\,(d_\tau\varphi)^2 + \frac{1}{2}\frac{r_G}{r^2}\,(d_\tau ct)^2 \tag{IV.105}$$

$\longrightarrow$ Übereinstimmung mit Geodätengl. für $\xi^1 = r$!

Einarbeiten der Erhaltungsgrößen in die Geodätengl. ergibt mit der Abkürzung $\dot{(\ )} = d_\tau(\ )$

$$-c^2 = \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_G}{r}} + \frac{B^2}{r^2} - \frac{A^2}{1 - \frac{r_G}{r}} \tag{IV.106}$$

$$\dot{r}^2 + \frac{B^2}{r^2} - \frac{r_G B^2}{r^3} - \frac{c^2 r_G}{r} = A^2 - c^2 = const \tag{IV.107}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{\gamma M_N}{r} + \frac{B^2}{2r^2}}_{\text{Keplerproblem nach Newton}} - \underbrace{\frac{MB^2}{r^3}}_{\text{Zusatzterm der ART}} = const \tag{IV.108}$$

Somit modifiziert die ART das Keplerproblem nach Newton um einen Zusatzterm $\propto r^{-3}$.

Berechnung der Bahnkurve $r(\varphi)$ aus dem 1.Integral, der Impulserhaltung und der Energieerhaltung:

- Substitution

$$r = \frac{1}{w} \tag{IV.109}$$

$$\longrightarrow \quad d_\tau\varphi = \frac{B}{r^2} = Bw^2 \tag{IV.110}$$

$$d_\tau ct = \frac{A}{1 - \frac{r_G}{r}} = \frac{A}{1 - r_G w} \tag{IV.111}$$

$$d_\tau r = -\frac{1}{w^2} d_\tau w = -\frac{1}{w^2} d_\varphi w d_\tau\varphi \tag{IV.112}$$

$$d_\tau r = -B d_\varphi w \tag{IV.113}$$

$$w' := d_\varphi w \tag{IV.114}$$

- 1. Integral

$$\frac{B^2 w'^2}{1-r_G w} + B^2 w^2 - \frac{A^2}{1-r_G w} = -c^2 \quad \text{(IV.115)}$$

$$B^2 w'^2 + B^2 w^2 (1-r_G w) - A^2 + c^2(1-r_G w) = 0, \quad \text{(IV.116)}$$

Separation mittels $\frac{d\varphi}{dw}$ möglich
$\longrightarrow \varphi = \int f(w) dw$ führt auf Elliptische Integrale, aber nicht auf Ellipsen; d.h. prinzipiell exakt gelöst!

- näherungsweise Lösung der Dgl: Differentation nach φ

$$2B^2 w' w'' + 2B^2 w w'(1-r_G w) - B^2 r_G w^2 w' - c^2 r_G w' = 0 \quad \text{(IV.117)}$$

$$2B^2 w' w'' + 2B^2 w w' - 3B^2 r_G w^2 w' - c^2 r_G w' = 0 \quad \text{(IV.118)}$$

$$(w'' + w - \frac{3}{2} r_G w^2 - \frac{c^2 r_G}{2B^2}) w' = 0 \quad \text{(IV.119)}$$

$$w'' + w = \frac{c^2 r_G}{2B^2} + \frac{3}{2} r_G w^2 \text{ und } w' = 0 \quad \text{(IV.120)}$$

$$w'' + w = \frac{c^2 M}{B^2} + 3Mw^2 \text{ und } w' = 0 \quad \text{(IV.121)}$$

- Fall 1 : $w' = 0$
$\longrightarrow d_\tau r = 0 \longrightarrow r = const$ (Kreisbahn)

- Fall 2 : $w'' + w = \frac{c^2 M}{B^2} + 3Mw^2$
Vernachlässigung des Terms $\propto w^2$ führt auf Newtonsche Theorie:

$$w_0'' + w_0 = \frac{c^2 M}{B^2} \quad \text{(IV.122)}$$

$$w_0 = \frac{Mc^2}{B^2}(1 + \epsilon \cos\varphi), \quad \text{(IV.123)}$$

Einsetzen von w_0 im Term $\propto w^2$, d.h. Iteration

$$w_1'' + w_1 = \frac{Mc^2}{B^2} + 3Mw_0^2 \quad \text{(IV.124)}$$

$$w_1'' + w_1 = \frac{Mc^2}{B^2} + 3M\frac{M^2c^4}{B^4}(1 + 2\epsilon\cos\varphi + \epsilon^2\cos^2\varphi), \quad \text{(IV.125)}$$

Dgl. vom Typ der Gleichung einer erzwungenen Schwingung;
nach Stephani:

$$\longrightarrow \quad w_1 = w_0 + \frac{3M^3c^4}{B^4}\left\{1 + \epsilon\varphi\sin\varphi + \epsilon^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos(2\varphi)\right)\right\}, \quad \text{(IV.126)}$$

$\epsilon\varphi\sin\varphi$: entscheidender Korrekturterm zu w_0 , da wachsend (IV.127)

$\frac{1}{6}\cos(2\varphi)$: oszillierend (IV.128)

$$w_1 \approx w_0 + \frac{3M^3c^4}{B^4}\epsilon\varphi\sin\varphi \tag{IV.129}$$

$$w_1 \approx \frac{Mc^2}{B^2}\left\{1 + \epsilon\cos\varphi + \frac{3M^2c^2}{B^2}\epsilon\varphi\sin\varphi\right\} \tag{IV.130}$$

$$w_1 \approx \frac{Mc^2}{B^2}\left\{1 + \epsilon\cos(1 - \left(\frac{3M^2c^2}{B^2}\right)\varphi\right\}, \tag{IV.131}$$

denn

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{IV.132}$$

$$\cos(1 - \tilde{M})\varphi = \cos\varphi\cos\tilde{M}\varphi + \sin\varphi\sin\tilde{M}\varphi \tag{IV.133}$$

$$\cos(1 - \tilde{M})\varphi \approx \cos\varphi + \tilde{M}\varphi\sin\varphi \tag{IV.134}$$

$$\text{mit } \tilde{M} = \frac{3M^2c^2}{B^2}, \tag{IV.135}$$

$$\tilde{M}\varphi << 1 \tag{IV.136}$$

- nach $\varphi = 2\pi$ ist das ursprüngliche r noch nicht wieder ganz erreicht:

$$\Delta\varphi_P = \frac{6\pi M^2c^2}{B^2} \tag{IV.137}$$

ist Periheldrehung ($\epsilon \neq 0$)

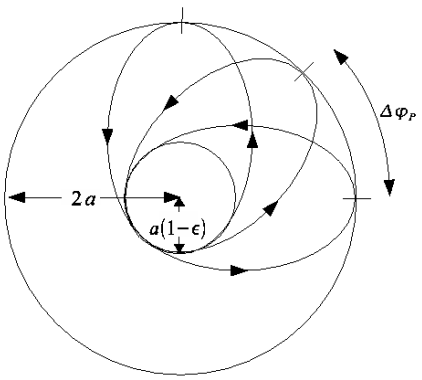


Abbildung IV.1: Rosettenbewegung eines Planeten

5 Lichtablenkung

Lichtstrahlen sind s.g. Nullgeodäten, d.h. das 1. Integral der Geodäten - Gleichung ist

$$\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = g_{ik}\frac{d\xi^i}{d\lambda}\frac{d\xi^k}{d\lambda} = 0 \tag{IV.138}$$

$$\text{vgl.} \quad ds^2 = 0 \ \text{ im Minkowski Raum :} \tag{IV.139}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 = 0 \tag{IV.140}$$

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 - c^2 = 0 \tag{IV.141}$$

$$v^2 = c^2 \tag{IV.142}$$

Geodäten - Gleichung ist ebenfalls gültig, allerdings kann Eigenzeit nicht als Kurvenparameter verwendet werden; sie ist definiert über

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2, \tag{IV.143}$$

was hier nicht brauchbar ist; Wahl eines anderen affinen Kurvenparameters λ

Geodäten - Gleichung für ϑ, φ, ct werden unverändert aus Abschnitt 4.4 übernommen, also insbesondere

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} \ \text{, ebene Bewegung} \tag{IV.144}$$

$$r^2\frac{d\varphi}{d\lambda} = B = const \ \text{, Impulssatz} \tag{IV.145}$$

$$\left(1 - \frac{r_G}{r}\right)\frac{dct}{d\lambda} = A = const \ \text{, Energiesatz} \tag{IV.146}$$

anstelle der Geodäten-Gleichung für r wird wiederum das 1. Integral benutzt:

$$\frac{1}{1 - \frac{r_G}{r}}\left(d_\lambda r\right)^2 + r^2\left(d_\lambda \varphi\right)^2 - \left(1 - \frac{r_G}{r}\right)\left(d_\lambda ct\right)^2 = 0 \tag{IV.147}$$

folglich

$$w'' + w = 3Mw^2 \tag{IV.148}$$

Lösung im flachen Raum (M = 0)

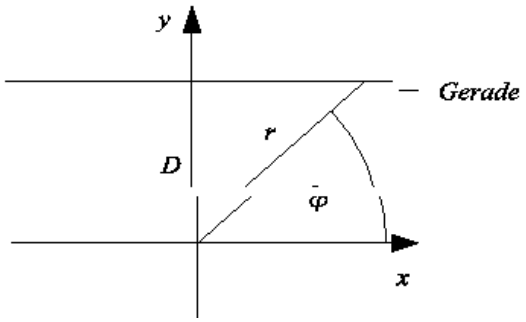
$$w_0'' + w_0 = 0 \tag{IV.149}$$

$$\longrightarrow \quad w_0 = \frac{1}{D}\sin(\varphi - \varphi_0) \tag{IV.150}$$

$$\varphi_0, D \quad \text{Integrationskonstanten ,} \tag{IV.151}$$

$$\text{o.B.d.A.} \quad \varphi_0 = 0 \tag{IV.152}$$

$$\longrightarrow \quad w_0 = \frac{1}{r} = \frac{1}{D}\sin\varphi \tag{IV.153}$$



Geradengleichung mit Abstand D vom Ursprung
genäherte Lösung im gekrümmten Raum

$$w_1'' + w_1 = \frac{3M}{D^2}\sin^2\varphi \tag{IV.154}$$

- partikuläre inhom. Lösung

$$\tilde{w}_1 = \frac{M}{D^2}(1+\cos^2\varphi) \tag{IV.155}$$

- allg. Lösung

$$w_1 = w_0 + \tilde{w}_1 \tag{IV.156}$$
$$w_1 = \frac{1}{D}\sin\varphi + \frac{M}{D^2}(1+\cos^2\varphi) = \frac{1}{r} \tag{IV.157}$$
$$D = r\sin\varphi + \frac{M}{D}r(2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \tag{IV.158}$$
$$D = y + \frac{M}{D}\frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{IV.159}$$

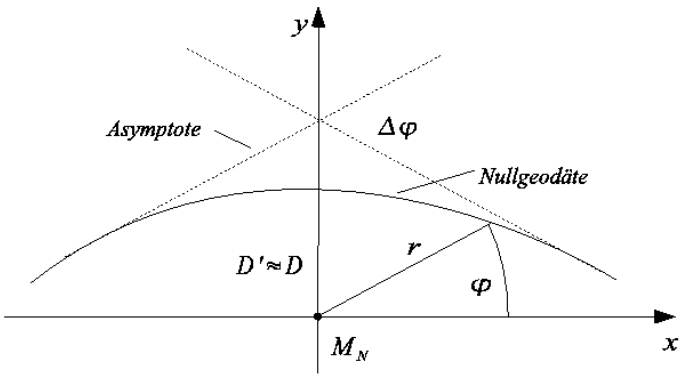
- 2.Term beschreibt Abweichung von der Geraden $y = D$:

$$y = D - \frac{M}{D}\frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{IV.160}$$

- Asymptote für $x \to \pm\infty$

$$y = D - \frac{2M}{D}x \tag{IV.161}$$
$$\tan\frac{\Delta\varphi}{2} \approx \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{2M}{D} \tag{IV.162}$$
$$\Delta\varphi = \frac{4M}{D} = \frac{2r_G}{D} \tag{IV.163}$$

- Beispiel : Sonne
  $r_G = 2,96km$
  $D = 7 \cdot 10^5 km$ (Sonnenrand streifend)
  $\Delta\varphi = 1,75''$



- Historische Messung am 29.5.1919 während einer Sonnenfinsternis
- neuere Messungen mit Quasaren, die keiner Sonnenfinsternis bedürfen
- Gravitationslinse

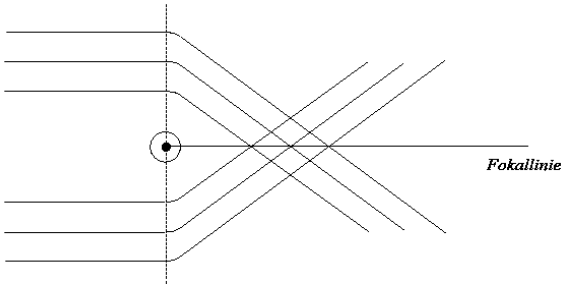


Abbildung IV.2: Gravitationslinse

6 Rotverschiebung

Im Gravitationsfeld wird Licht nicht nur in Richtung geändert, auch in Frequenz

- Effekt beruht auf zusammenhang zwischen Eigenzeit und Zeitkoordinate

Effekt ist wohlunterschieden von Doppler-Effekt, hat also mit Bewegung von Quellen oder Sender nichts zu tun

Gültigkeit in allen statischen Gravitationsfeldern, nicht nur Schwarzschild-Metrik

Ausgangspunkt:

- Zeitorthogonale Koordinaten : $g_{4a} = 0$

- zeitunabhängige Metrik: $g_{ik|4} = 0$
- Sender im Punkt $P_1 = (r_1, \Theta_1, \varphi_1)$ ruhend
- Empfänger im Punkt $P_2 = (r_2, \Theta_2, \varphi_2)$ ruhend

Lichtwelle zwischen P_1 und P_2

- $ds^2 = g_{ab} d\xi^a d\xi^b + g_{44} dct^2 = 0$
- t_1 Koordinatenzeit beim Aussenden in P_1
- t_2 Koordinatenzeit beim Empfangen in P_2
- Koordinatenzeit - Differenz $t_2 - t_1$:
  $ct_2 - ct_1 = \int_1^2 dct$
  $= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{-\frac{g_{ab}}{g_{44}} \frac{d\xi^a}{d\lambda} \frac{d\xi^b}{d\lambda}} d\lambda$,
  λ affiner Parameter entlang der Nullgeodäten
- Integral hängt nur vom Weg ab, nicht von der Zeit ct, da g_{ik} zeitunabhängig sind
- für ein später (t_1') ausgesandtes Lichtsignal gilt der gleiche Weg und demnach die gleiche Zeitdifferenz
  $t_2 - t_1 = t_2' - t_1'$
- $\longrightarrow$ Koordinatenzeitintervalle zwischen aufeinanderfolgenden Signalen sind am Empfänger und Sender gleich:

$$t_1' - t_1 \quad = \quad t_2' - t_2 \tag{IV.164}$$

- $\longrightarrow$ Zahl der Schwingungen der Welle in Einheiten der Koordinatenzeit ist am Empfänger und Sender gleich

$$\frac{n}{\Delta t_1} \quad = \quad \frac{n}{\Delta t_2}; \tag{IV.165}$$

  n muss natürlich auch gleich sein, da sich alle Portionen innerhalb der Welle mit gleicher Geschwindigkeit c ausbreiten

Uhr des Beobachters am Sender misst aber Eigenzeit $\Delta\tau_1$

- wg. Def. der Eigenzeit $-c^2 d\tau^2 = g_{ik} d\xi^i d\xi^k$ gilt für ruhenden Beobachter

$$-c^2 d\tau^2 \quad = \quad g_{44} dct^2 \tag{IV.166}$$

- Integration, da $g_{44|4} = 0$

$$\Delta\tau_1 \quad = \quad \sqrt{-g_{44}(1)} \Delta t_1 \tag{IV.167}$$

Uhr des Beobachters am Empfänger misst $\Delta\tau_2$

$$\Delta\tau_2 = \sqrt{-g_{44}(2)}\Delta t_2 \tag{IV.168}$$

folglich

$$\frac{\Delta\tau_2}{\Delta\tau_1} = \sqrt{\frac{g_{44}(2)}{g_{44}(1)}} \tag{IV.169}$$

Frequenzen an jeweiligen Orten

- $$f_1 := \frac{1}{\Delta\tau_1}, \tag{IV.170}$$
  $$f_2 := \frac{1}{\Delta\tau_2} \tag{IV.171}$$
- $$\frac{f_1}{f_2} = \sqrt{\frac{g_{44}(2)}{g_{44}(1)}} \tag{IV.172}$$

Rotverschiebung z

$$z := \frac{f_1}{f_2} - 1 = \sqrt{\frac{g_{44}(2)}{g_{44}(1)}} - 1 \tag{IV.173}$$

- z heißt immer „Rotverschiebung“, auch wenn $f_2 > f_1$, d.h. wenn tatsächlich eine „Blauverschiebung“ (z<0) vorliegt

Rotverschiebung in der Schwarzschild-Metrik

- $$z = \sqrt{\frac{1-\frac{r_G}{r_2}}{1-\frac{r_G}{r_1}}} - 1 \tag{IV.174}$$
- $r_1, r_2 >> r_G$
  $$z \approx \sqrt{(1-\frac{r_G}{r_2})(1+\frac{r_G}{r_1})} - 1 \approx \sqrt{1+\frac{r_G}{r_1}-\frac{r_G}{r_2}} - 1 \tag{IV.175}$$
  $$z \approx \frac{1}{2}\left(\frac{r_G}{r_1} - \frac{r_G}{r_2}\right) \tag{IV.176}$$

- Beispiel: Sonne r_1 , Erde r_2

$$z \;=\; \frac{1}{2}\frac{r_G}{r_1} \;\approx\; 10^{-6}, \tag{IV.177}$$

echte Rotverschiebung, da Sender näher an Gravitationsquelle als Empfänger

Darstellung der Rotverschiebung mit dem Newtonschen Gravitationspotential Φ

$$g_{44} \;=\; -\left(1+\frac{2\Phi}{c^2}\right) \tag{IV.178}$$

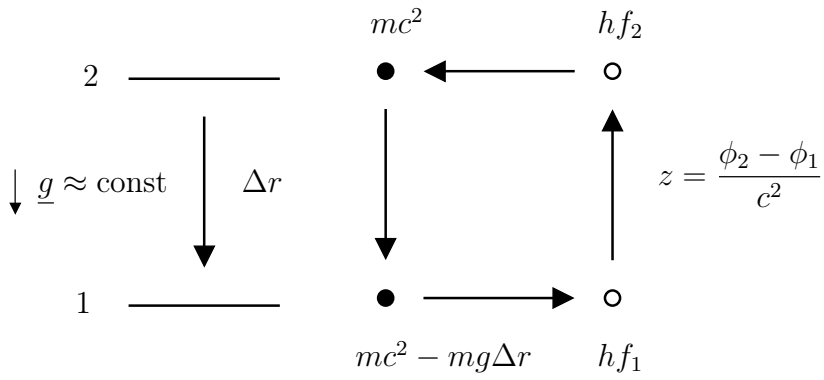
$$z \;=\; \sqrt{\frac{1+\frac{2\Phi_2}{c^2}}{1+\frac{2\Phi_1}{c^2}}}-1 \;\approx\; \frac{1}{c^2}(\Phi_2-\Phi_1) \tag{IV.179}$$

- im Photonen-Bild entspricht die Gravitationsrotverschiebung einer Änderung der kinetischen Energie $h\cdot f$ durch Gewinn oder Verlust von potentieller Energie

  Zur Veranschaulichung betrachte man folgenden Kreisprozess: Ein zunächst ruhendes massives Teilchen der Energie mc^2 falle im homogen angenommenen Gravitationsfeld um die Strecke $\Delta r < 0$.
  Das Teilchen verliert potentielle Energie $(-m\,g\,\Delta r)$, die sich in kinetische Energie umwandelt. Die Gesamtenergie des Teilchens bei Position 1 zerstrahle man in ein Photon, das dann die Energie $h\cdot f_1$ haben möge.
  Das Photon bewege sich zurück nach Position 2 und erfährt die Rotverschiebung $z = \frac{(\Phi_2-\Phi_1)}{c^2}$. Dort angekommen denke man sich, dass das Photon der Energie hf_2 sich in das massive Ausgangsteilchen der Energie mc^2 zurückverwandelt. Wegen

$$\Phi_2-\Phi_1 = -g\Delta r \tag{IV.180}$$

  ist die Rotverschiebung als Verlust von potentieller Energie interpretierbar.



Rotverschiebung beruht letztendlich auf der allgemein-relativistischen Zeitdilatation im Gravitationsfeld

7 Physik am Schwarzschildradius

- Außenraum (Vakuum) erstrecke sich bei $r < r_G$
- $$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_G}{r}} + r^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right) - \left(1 - \frac{r_G}{r}\right) dct^2$$
- Singularität des Metrischen Tensors:
$$g_{11} \underset{r \to r_G}{\longrightarrow} \infty \tag{IV.181}$$
- Singularitäten sind wohlbekanntes Phänomen, z.B. für Coulomb-Potential
$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$
- Kompliziertere Situation in einer nichtlinearen Theorie, da Singularität nicht am Ort der Quelle aufzutreten braucht
- Singularitäten des Raumes können auch durch singuläres Koordinatensystem vorgetäuscht sein, z. B. Kugelkoordinaten im dreidimensionalen Euklidischen Raum
$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 \qquad g_{22} = r^2 \qquad g_{33} = r^2 \sin^2\vartheta \\ g^{11} &= 1 \qquad g^{22} = \frac{1}{r^2} \qquad g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \\ g^{22} &\underset{r \to 0}{\longrightarrow} \infty \qquad , g^{33} \underset{r \to 0, \vartheta \to 0, \pi}{\longrightarrow} \infty \quad ; \end{aligned} \tag{IV.182}$$
aber $r = 0$ ist ein harmloser Punkt.
- Koordinaten-unabhängige Charakterisierung durch Suche nach Singularitäten in Tensoren 0. Stufe (Invarianten), z. B.
$$R_{ijkl} R^{ijkl} = 12 \frac{r_G^2}{r^2} \tag{IV.183}$$
oder in anderen geometrischen Objekten wie z. B.
$$g = -r^4 \sin^2\vartheta \qquad ; \tag{IV.184}$$
beide Konstruktionen sind regulär bei $r = r_G$
- Untersuchung der physikalischen Verhältnisse bei $r = r_G$ entlang radialer Geodäten für Testteilchen:
- Anknüpfung an Gleichung (IV.95) und (IV.97) für radiale Bewegung ($d\varphi = 0$, kein Drehimpuls):
$$\left(1 - \frac{r_G}{r}\right) d_\tau ct = A = const \tag{IV.185}$$
$$-c^2 = \frac{1}{1 - \frac{r_G}{r}} (d_\tau r)^2 - \left(-\frac{r_G}{r}\right) (d_\tau ct)^2 \tag{IV.186}$$

- folglich

$$d_\tau r = \pm\sqrt{A^2 - c^2\left(1 - \frac{r_G}{r}\right)} \tag{IV.187}$$

$$\frac{dr}{dct} = \frac{d_\tau r}{d_\tau ct} = \pm\frac{\sqrt{A^2 - c^2\left(1 - \frac{r_G}{r}\right)}}{A}\left(1 - \frac{r_G}{r}\right) \tag{IV.188}$$

$$\rightarrow \quad dct = \pm A\frac{dr}{\left(1 - \frac{r_G}{r}\right)\sqrt{A^2 - c^2\left(1 - \frac{r_G}{r}\right)}} \tag{IV.189}$$

- Integration von Startzeit t_s bei Startpunkt $r_s (\neq r_G)$ bis t_G bei r_G

$$\int_{t_s}^{t_G} dt = \pm\frac{A}{C}\int_{r_s}^{r_G}\frac{dr}{\left(1 - \frac{r_G}{r}\right)\sqrt{A^2 - c^2\left(1 - \frac{r_G}{r}\right)}} \tag{IV.190}$$

- rechtes Integral divergiert, abzuschätzen durch folgende Situation:
  r_s nahe an r_G beginnen lassen,

$$\sqrt{A^2 - c^2\left(1 - r_G/r\right)} \approx \sqrt{A^2} \quad ; \tag{IV.191}$$

  damit vereinfacht sich das rechte Integral zu

$$\int_{r_s}^{r_G}\frac{dr}{1 - \frac{r_G}{r}} = \int_{r_s}^{r_G}\frac{r\ dr}{r - r_G} \approx \tilde{r}\ \ln\left(r - r_G\right)\Big|_{r_s}^{r_G} \rightarrow \infty \tag{IV.192}$$

  und aus (IV.190) folgt

$$\longrightarrow \quad t_G - t_s \rightarrow \infty \quad . \tag{IV.193}$$

  Testteilchen braucht unendlich lange Koordinatenzeit um die endliche Strecke

$$\Delta s = \int_{r_s}^{r_G} ds = \int_{r_s}^{r_G}\frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_G}{r}}} = \int_{r_s}^{r_G}\frac{\sqrt{r}\ dr}{\sqrt{r - r_G}} = \sqrt{\tilde{r}}\int_{r_s}^{r_G}\frac{dr}{\sqrt{r - r_G}} = \sqrt{\tilde{r}}\ \frac{\sqrt{r - r_G}}{2} < \infty \tag{IV.194}$$

  zurückzulegen.

- Eigenzeit während Bewegung von r_s nach r_G: Nach (IV.187) erhalten wir

$$\tau = \int_{r_s}^{r_G}\frac{dr}{\sqrt{A^2 - c^2\left(1 - r_G/r\right)}} < \infty \qquad \text{(wie } \Delta s\text{)} \tag{IV.195}$$

  $\rightarrow$ frei fallender Beobachter spürt nichts beim Passieren von r_G, r und t "ungeeignete" Koordinaten

- Analoge Diskussion radialer Geodäten für Photonen:

- Anknüpfung an Gleichung (IV.146) und (IV.147) für $d\varphi = 0$:

$$\frac{dr^2}{1-\frac{r_G}{r}} - \left(1-\frac{r_G}{r}\right) dct^2 = 0 \tag{IV.196}$$

$$c\,(t_s - t_G) = \int_{t_s}^{t_G} dct = \int_{r_s}^{r_G} \frac{dr}{1-\frac{r_G}{r}} \to \infty \tag{IV.197}$$

  Photon braucht ebenfalls unendlich lange Koordinatenzeit für die endliche Strecke Δs.

- Schwarzschildlösung in anderen Koordinaten;
  z.B. Lemaitre 1933, Eddington-Finkelstein (1924, 1958), Kruskal

- Kruskal-Koordinaten (s. Stephani, S. 208)
  $r, ct \to w, z \quad ; \quad \vartheta, \varphi$ bleiben unverändert mit

$$z^2 - w^2 = \frac{r - r_G}{r_G} e^{\frac{r}{r_G}} \tag{IV.198}$$

$$\frac{w}{z} = \tanh \frac{ct}{2r_G} \tag{IV.199}$$

  w, z auch negativ, aber so beschränkt, dass $r \geq 0$

- Charakt. Linien:

$$r = r_G: \qquad z^2 - w^2 = 0 \quad , \qquad z = \pm w$$

$$\to \qquad \tanh \frac{ct}{2_G} = \pm 1 \qquad \to \qquad t = \pm\infty$$

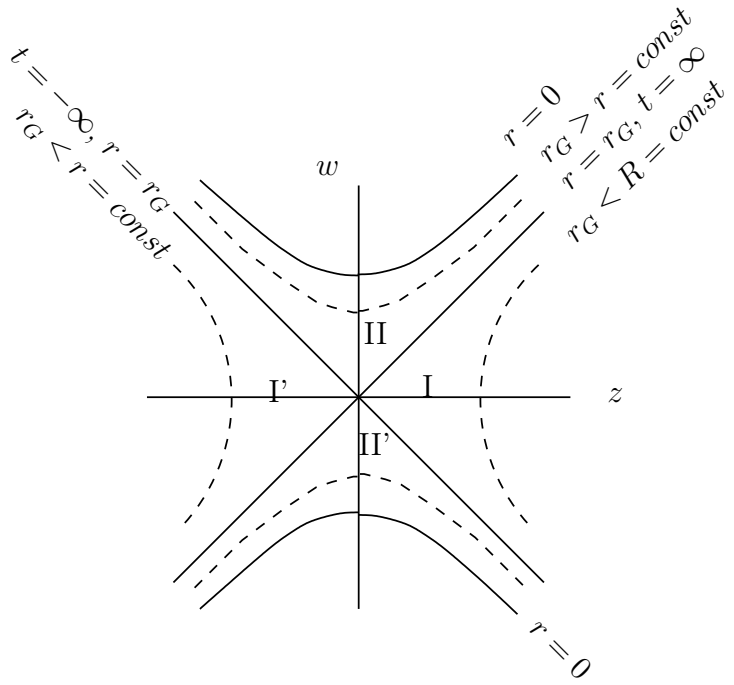
$$r = 0: \qquad z^2 - w^2 = -1 \quad ; \qquad w^2 - z^2 = 1$$

-

$$ds^2 = 4\frac{r_G^3}{r} e^{-\frac{r}{r_G}} \left(dz^2 - dw^2\right) + r^2(w,z)\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right) \tag{IV.200}$$

  (**Kruskal-Metrik**)

- Diskussion



$$I: r > r_G \quad , \quad z > |w| \quad , \quad t \text{ endlich}$$
$$II: r > r_G$$
$$I', II': \text{isometrisch zu I, II}$$
$$\text{metrisch ununterscheidbar}$$

- radiale Bewegungen ($d\vartheta = d\varphi = 0$)

$$ds^2 = 4\frac{r_G^3}{r} e^{-\frac{r}{r_G}} \left(dz^2 - dw^2\right) \tag{IV.201}$$

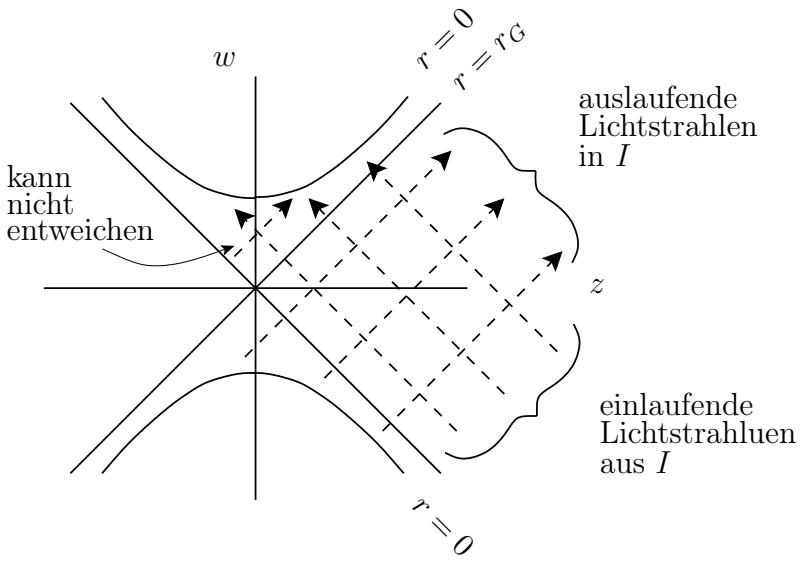
- radiale Lichtausbreitung: $ds = 0$

- einlaufende Lichtstrahlen aus I landen unweigerlich im Schwarzen Loch bei $r = 0$, wenn sie einmal den Schwarzschildradius ($r = r_G$) passiert haben, da wird r zeitartig und t raumartig:

$$ds^2 = \underbrace{\frac{r_G}{r} - 1}_{>0} dct^2 + r^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right) \underbrace{- \frac{dr^2}{\frac{r_G}{r} - 1}}_{<0} \tag{IV.202}$$

  Das Verrinnen der Zeit "r" kann man aber nicht aufhalten, auch nicht mit Raketen, während man den Ort festhalten kann.

- auslaufende Lichtstrahlen in I können nicht aus dem Schwarzen Loch ($r = 0$ oben), sondern höchstens aus dem weißen Loch ($r = 0$ unten). Allerdings brauchen sie unendlich lange ($t = \infty$); wobei t ja auch die Eigenzeit eines entfernten Beobachters ($r \gg r_G$) ist. Für einen endlich existierenden Kosmos kann also von dort nichts bei uns angekommen sin.



- Hinzunahme von weiteren Freiheitsgraden beschleunigt sogar den Sturz ins Schwarze Loch; z. B. für Photonen

$$\ldots \left(dz^2 - dw^2\right) + d\sigma^2 = 0$$

$\rightarrow$ dw^2 muss größer werden.
Ähnliches gilt für Beobachter mit Raketen!!!

Kapitel V

Gravitationswellen

Existenz von Gravitationswellen ist besonders interessantes Problem

Frage nach freien wellenartigen Gravitationsfeldern in Analogie zur Elektrodynamik

Ausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit

Erzeugung von einem System beschleunigter Massen

wegen nicht existierender gravitativer Dipole kann niedrigste Ordnung nur Quadrupolstrahlung sein

Entstehung, wenn große Massen stark beschleunigt werden

- theoretisch vorhergesagt
- intensiv gesucht
- bisher nicht gefunden
- GEO600 in Hannover u.a. vielversprechend

indirekte Nachweis der Gravitationsstrahlung durch Abnahme der Bahnperiode des Doppelsternsystems PSR 1913 + 16

- Nobelpreis 1993; Taylor und Hulse
- Abnahme der Systemenergie $\hat{=}$ erwartete Energie der Gravitationsstrahlung

1 Linearisierte Theorie

Nur geringe Abweichung von der Minkowski-Metrik:

$$\begin{aligned} g_{mn} &= \eta_{mn} + f_{mn} \\ \text{für} \quad |f_{mn}| &<< 1 \end{aligned} \tag{V.1}$$

Linearisierung

- Produkte der f's vernachlässigen
- Indexziehen mit Minkowski-Metrik; da

$$\begin{aligned} f_{mn} &= f^{pr} g_{mp} g_{nr} && \text{(V.2)} \\ &= f^{pr} \left(\eta_{mp} + f_{mp}\right) \left(\eta_{nr} + f_{nr}\right) && \text{(V.3)} \\ &= f^{pr} \eta_{mp} \eta_{nr} + O(f^2) && \text{(V.4)} \\ &= f^{pr} \eta_{mp} \eta_{nr}; && \text{(V.5)} \end{aligned}$$

  analog für andere Tensoren

- Inverse Metrik

$$\begin{aligned} g^{mn} &= \eta^{mn} - f^{mn} \quad \text{, da} && \text{(V.6)} \\ \delta^n_m &= g_{mr} g^{rn} = \left(\eta_{mr} + f_{mr}\right) \left(\eta^{rn} - f^{rn}\right) && \text{(V.7)} \\ &= \eta_{mr} \eta^{rn} + \eta^{rn} f_{mr} - \eta_{mr} f^{rn} && \text{(V.8)} \\ &= \delta^n_m + f_m{}^n - f_m{}^n && \text{(V.9)} \end{aligned}$$

folglich

$$\Gamma^m_{ik} = \frac{1}{2} \eta^{ms} \left(f_{si|k} + f_{sk|i} - f_{ik|s}\right) \tag{V.10}$$

folglich

$$\begin{aligned} R^m_{\ ikp} &= \Gamma^m_{ik|p} - \Gamma^m_{ip|k} && \text{(V.11)} \\ &= \frac{1}{2} \eta^{ms} \left(f_{si|k|p} + f_{sk|i|p} - f_{ik|s|p} - f_{si|p|k} - f_{sp|i|k} + f_{ip|s|k}\right) && \text{(V.12)} \\ &= \frac{1}{2} \eta^{ms} \left(f_{sk|i|p} - f_{ik|s|p} - f_{sp|i|k} + f_{ip|s|k}\right) && \text{(V.13)} \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned} R_{ip} &= R^m_{\ imp} = \frac{1}{2} \eta^{ms} \left(f_{sm|i|p} - f_{im|s|p} - f_{sp|i|m} + f_{ip|s|m}\right) && \text{(V.14)} \\ R_{ip} &= \frac{1}{2} \left\{ \Box f_{ip} + f^m_{\ m|i|p} - f^m_{\ i|m|p} - f^m_{\ p|i|m} \right\} && \text{(V.15)} \end{aligned}$$

mit d'Alembert-Operator:

$$\Box \quad := \quad \eta^{ms} \partial_{x^m} \partial_{x^s} \ := \ \eta^{ms} \partial_m \partial_s \quad := \quad \partial_m \partial^m \ = \ (\ )_{|m}{}^{|m} \tag{V.16}$$

Einführung einer zweckmäßigen Hilfsfunktion Ψ :

$$\Psi_m{}^q := f_m{}^q - \frac{1}{2}\delta^q_m f \tag{V.17}$$

mit

$$f := f^i_{\ i} \tag{V.18}$$

$$\longrightarrow \quad R_{ip} = \frac{1}{2}\Box f_{ip} - \frac{1}{2}\left(\Psi_i{}^m{}_{|m|p} + \Psi_p{}^m{}_{|m|i}\right), \tag{V.19}$$

da:

$$\Psi_i{}^m{}_{|m|p} = f_i{}^m{}_{|m|p} - \frac{1}{2}\delta^m_i f_{|m|p} \tag{V.20}$$

$$= f^m{}_{i|m|p} - \frac{1}{2}f_{|i|p} \tag{V.21}$$

$$\Psi_p{}^m{}_{|m|i} = f^m{}_{p|m|i} - \frac{1}{2}f_{|p|i} \tag{V.22}$$

$$\Psi_i{}^m{}_{|m|p} + \Psi_p{}^m{}_{|m|i} = f^m{}_{i|m|p} + f^m{}_{p|m|i} - f_{|i|p} \tag{V.23}$$

$$\longrightarrow Aussage \tag{V.24}$$

Linearisierte Feldgleichungen

- zunächst allgemein:

$$R_{ip} = -\kappa\left(T_{ip} - \frac{1}{2}T g_{ip}\right) \tag{V.25}$$

- linearisiert:

$$\frac{1}{2}\Box f_{ip} - \frac{1}{2}\left(\Psi_i{}^m{}_{|m|p} + \Psi_p{}^m{}_{|m|i}\right) = -\kappa\left(T_{ip} - \frac{1}{2}T\eta_{ip}\right) \tag{V.26}$$

Vereinfachung der linearisierten Feldgleichungen durch geeignete Koordinatentransformation

$$\xi^i \quad \rightarrow \quad \bar{\xi}^i = \xi^i + \epsilon^i(\xi) \tag{V.27}$$

- wg. $|f_{mn}| << 1$ sind nur kleine Abweichungen von den Minkowski-Koordinaten zugelassen; das gilt für die ξ^i als auch die $\bar{\xi}^i$; somit sind insbesondere ϵ^i kleine Größen.

$$\bar{\xi}^i{}_{|l} = \delta^i_l + \epsilon^i{}_{|l} \tag{V.28}$$

$$\text{bzw.} \quad \xi^i{}_{|l} = \bar{\delta}^i_l - \epsilon^i{}_{|l} = \delta^i_l - \epsilon^i{}_{|l} \tag{V.29}$$

- Auswirkungen für $f_{ip} \rightarrow \bar{f}_{ip}$:

$$\bar{g}_{ip} = \frac{\partial\xi^m}{\partial\bar{\xi}^i}\frac{\partial\xi^n}{\partial\bar{\xi}^p}g_{mn} = \xi^m{}_{|i}\,\xi^n{}_{|p}\,g_{mn} \tag{V.30}$$

$$\bar{g}_{ip} = \left(\delta^m_i - \epsilon^m_{\ |i}\right)\left(\delta^n_p - \epsilon^n_{\ |p}\right)(\eta_{mn} + f_{mn}) \tag{V.31}$$

$$\bar{g}_{ip} = \eta_{ip} + f_{ip} - \epsilon_{i|p} - \epsilon_{p|i} \tag{V.32}$$

$$\rightarrow \quad \bar{f}_{ip} = f_{ip} - \epsilon_{i|p} - \epsilon_{p|i} \tag{V.33}$$

bzw.

$$f_{ip} \;=\; \bar{f}_{ip} + \epsilon_{i|p} + \epsilon_{p|i} \tag{V.34}$$

- Krümmungstensor bleibt bei dieser Transformation unverändert (ÜA)
- sei $f = f^i{}_i, \bar{f} = \bar{f}^i{}_i$, dann folgt

$$\begin{aligned}
\bar{f} &= f - \eta^{ip}\epsilon_{i|p} - \eta^{ip}\epsilon_{p|i} = f - 2\epsilon^i{}_{|i} && \text{(V.35)}\\
\rightarrow \quad \bar{\Psi}_i{}^m &= \Psi_i{}^m - \epsilon_i{}^{|m} - \epsilon^m{}_{|i} - \frac{1}{2}\delta_i^m(f - 2\epsilon^r{}_{|r}) && \text{(V.36)}\\
\bar{\Psi}_i{}^m &= \Psi_i{}^m - \epsilon_i{}^{|m} - \epsilon^m{}_{|i} + \delta_i^m\epsilon^r{}_{|r} && \text{(V.37)}
\end{aligned}$$

- Ableitungen der $\bar{\Psi}$

$$\bar{\Psi}_i{}^m{}_{|m} = \Psi_i{}^m{}_{|m} - \epsilon_i{}^{|m}{}_{|m} - \underbrace{\epsilon^m{}_{|i|m} + \delta_i^m\epsilon^r{}_{|r|m}}_{=0} \tag{V.38}$$

Wahl der ϵ , so dass

$$\begin{aligned}
\epsilon_i{}^{|m}{}_{|m} &= \Box\epsilon_i = \Psi_i{}^m{}_{|m} && \text{(V.39)}\\
\rightarrow \quad \bar{\Psi}_i{}^m{}_{|m} &= 0 && \text{(V.40)}
\end{aligned}$$

$\hat{=}$ 4 Nebenbedingungen an die $\bar{f}_{ip}$:

$$\bar{\Psi}_i{}^m{}_{|m} \;=\; \bar{f}_i{}^m{}_{|m} - \bar{f}_{|i} \;=\; 0 \tag{V.41}$$

$\hat{=}$ spezielle Eichung der $\bar{f}_{ip}$: Hilbert-Eichung

Ricci-Tensor bleibt bei der Koordinatentransformation $\xi^i \rightarrow \bar{\xi}^i$ unverändert

- klar, da Krümmungstensor unverändert
- explizites Nachrechnen für R_{ip} :

$$\begin{aligned}
R_{ip} &= \frac{1}{2}\Box f_{ip} - \frac{1}{2}\left(\Psi_i{}^m{}_{|m|p} + \Psi_p{}^m{}_{|m|i}\right) && \text{(V.42)}\\
f_{ip} &= \bar{f}_{ip} + \epsilon_{i|p} + \epsilon_{p|i} && \text{(V.43)}\\
\Psi_i{}^m{}_{|m} &= \bar{\Psi}_i{}^m{}_{|m} + \epsilon_i{}^m{}_{|m} = \bar{\Psi}_i{}^m{}_{|m} + \Box\epsilon_i && \text{(V.44)}\\
R_{ip} &= \frac{1}{2}\Box\bar{f}_{ip} + \frac{1}{2}\cancel{\Box\epsilon_{i|p}} + \cancel{\Box\epsilon_{p|i}} - \frac{1}{2}\left\{\bar{\Psi}_i{}^m{}_{|m|p} + \cancel{\Box\epsilon_{i|p}} + \bar{\Psi}_p{}^m{}_{|m|i} + \cancel{\Box\epsilon_{p|i}}\right\} && \text{(V.45)}\\
\rightarrow\; R_{ip} &= \frac{1}{2}\Box\bar{f}_{ip} - \frac{1}{2}\left(\bar{\Psi}_i{}^m{}_{|m|p} + \bar{\Psi}_p{}^m{}_{|m|i}\right) && \text{(V.46)}
\end{aligned}$$

Verbleibende Gleichung

$$\Box \bar{f}_{ip} = -2\kappa \left(T_{ip} - \frac{1}{2} T \eta_{ip} \right) \tag{V.47}$$

Eindeutigkeit der Eichtransformation?

- Eichtransformation bestimmt sich aus

$$\Box \epsilon_i = \Psi_i{}^m{}_{|m} \tag{V.48}$$

- inhomogene lineare Dgl. für ϵ_i mit allg. Lösung

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= \epsilon_i^{hom.} + \epsilon_i^{inhom}, & \text{(V.49)} \\ \Box \epsilon_i^{hom} &= 0 & \text{(V.50)} \\ \Box \epsilon_i^{inhom} &= \Psi_i{}^m{}_{|m} & \text{(V.51)} \end{aligned}$$

- $\Box \epsilon_i^{hom} = 0$ nicht eindeutig lösbar $\rightarrow \epsilon_i$ nicht eindeutig!

Es sind beliebige weitere Eichtransformationen $\overline{\overline{\xi}}^i = \overline{\xi}^i + \bar{\epsilon}^i$ möglich, die die Hilbert - Eichung nicht schädigen , so lange

$$\Box \bar{\epsilon}_i = 0 \tag{V.52}$$

gilt.

2 Ebene Gravitationswellen

Ebene Wellen im Vakuum sind gesucht

zu lösendes Problem

$$\begin{aligned} \Box \overline{f}_{jp} &= 0, & \text{(V.53)} \\ \overline{f}_j{}^m{}_{|m} - \frac{1}{2} \overline{f}_{|j} &= 0 & \text{(V.54)} \end{aligned}$$

Strich wird im weiteren weggelassen, also

$$\begin{aligned} \Box f_{jp} &= 0, & \text{(V.55)} \\ f_j{}^m{}_{|m} - \frac{1}{2} f_{|j} &= 0 & \text{(V.56)} \end{aligned}$$

Ansatz für eine ebene Welle

$$f_{jp} = Re\left\{a_{jp}e^{ik_m\xi^m}\right\} \tag{V.57}$$

- Re für Realteil wird im weiteren unterdrückt

$$\Box f_{jp} = \eta^{mn}f_{jp|m|n} = -\eta^{mn}k_mk_nf_{jp} = 0 \tag{V.58}$$
$$\rightarrow \quad \eta^{mn}k_mk_n = k^nk_n = 0 \tag{V.59}$$

  d.h. k^n muss s.g. Nullvektor sein

$$f_j{}^m{}_{|m} - \frac{1}{2}f_{|j} = a_j{}^m ik_m - \frac{1}{2}a_m{}^m(ik_j) = 0 \tag{V.60}$$
$$\rightarrow \quad a_{jm}k^m = \frac{1}{2}ak_j \quad \text{mit} \quad a := a_m{}^m \tag{V.61}$$

a_{jp} heißt Polarisationstensor

- Symmetrie ergibt zunächst 10 Komponenten
- Hilbert-Eichung reduziert um 4 auf 6 Komponenten
- 6 Komponenten enthalten reine Koordinantenwellen; dies sind Wellen, deren Krümmungstensor identisch verschwindet
- Beseitigung der Koordinatenwellen durch weitere Eichung $\overline{\overline{\xi}}^n = \overline{\xi}^n + \overline{\epsilon}^n$ mit

$$\Box\epsilon^n = 0 \tag{V.62}$$

  → Reduktion auf 2 Komponenten möglich

- konkrete Wahl

$$\epsilon^n = -ib^ne^{ik_m\xi^m} \tag{V.63}$$
$$\rightarrow \overline{f}_{rp} = f_{rp} - \epsilon_{r|p} - \epsilon_{p|r} \tag{V.64}$$
$$\rightarrow \overline{a}_{rp} = a_{rp} - b_rk_p - b_pk_r \tag{V.65}$$

Betrachtung einer ebenen Welle, die sich in ξ^3-Richtung ausbreitet

$$k^m = (0, 0, k, k) \tag{V.66}$$

mit

$$k = \frac{\omega}{c} > 0 \tag{V.67}$$

- Hilbert-Eichung liefert

$$\begin{aligned} a_{13}+a_{14} &= 0 && \text{(V.68)}\\ a_{23}+a_{24} &= 0 && \text{(V.69)}\\ a_{33}+a_{34} &= \frac{a}{2} && \text{(V.70)}\\ a_{43}+a_{44} &= -\frac{a}{2} && \text{(V.71)}\\ \longrightarrow\quad a_{33}-a_{44} &= a \;=\; a_{11}+a_{22}+a_{33}-a_{44} && \text{(V.72)}\\ \longrightarrow\quad a_{11} &= -a_{22} && \text{(V.73)} \end{aligned}$$

- als 6 unabhängige Komponenten können aufgefasst werden
  $a_{11}, a_{33}, a_{44}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$

- die weiteren 4 abhängigen Komponenten sind dann

$$\begin{aligned} a_{22} &= -a_{11} && \text{(V.74)}\\ a_{14} &= -a_{13} && \text{(V.75)}\\ a_{24} &= -a_{23} && \text{(V.76)}\\ a_{34} &= -\frac{1}{2}(a_{33}+a_{44}) && \text{(V.77)} \end{aligned}$$

- Umeichung

$$\begin{aligned} \overline{a}_{11} &= a_{11} && \text{(V.78)}\\ \overline{a}_{33} &= a_{33}-2b_3k && \text{(V.79)}\\ \overline{a}_{44} &= a_{44}+2b_4k && \text{(V.80)}\\ \overline{a}_{12} &= a_{12} && \text{(V.81)}\\ \overline{a}_{13} &= a_{13}-b_1k && \text{(V.82)}\\ \overline{a}_{23} &= a_{23}-b_2k && \text{(V.83)} \end{aligned}$$

- Wahl der b_n so, dass

$$\overline{a}_{mn} = 0 \qquad \text{(V.84)}$$

- danach nur noch folgende nichtverschwindende Komponenten

$$\begin{aligned} \overline{a}_{11} &= -\overline{a}_{22}, && \text{(V.85)}\\ \overline{a}_{12} &= \overline{a}_{21} && \text{(V.86)} \end{aligned}$$

  bzw. Striche weglassen

$$\begin{aligned} a_{11} &= -a_{22}, && \text{(V.87)}\\ a_{12} &= a_{21} && \text{(V.88)} \end{aligned}$$

  diese Eichung heißt auch tt-Eichung : transverse traceless gauge.

- zwei mögliche lineare Polarisationen durch $a_{12} = 0$ bzw. durch $a_{11} = 0$ bestimmt; Einführung zweier Basis-Polarisationstensoren.

$$\underline{\underline{e}}^{\,I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{V.89}$$

$$\underline{\underline{e}}^{\,II} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{V.90}$$

$$a = a^1{}_1 + a^2{}_2 + 0 = 0 \quad \text{(traceless)} \tag{V.91}$$

$$\rightarrow \quad a_{im}k^m = \frac{1}{2}ak_i = 0 \tag{V.92}$$

$$\text{(transverse:} \quad a_{im} \perp k_m) \tag{V.93}$$

3 Teilchen im Feld der Gravitationswelle

ebene Gravitationswellen sind zeitabhängige Störungen der Metrik mit zwei transversalen Moden

Ausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit wegen $\Box$

echter physikalischer Effekt und kein Koordinateneffekt, denn

- Krümmungstensor enthält nichtverschwindende zeitabhängige Komponenten

$$R^m{}_{ikp} = \frac{1}{2}\eta^{ms}\left(f_{sk|i|p} - f_{ik|s|p} - f_{sp|i|k} + f_{ip|s|k}\right) \tag{V.94}$$

  wobei für ebene Gravitationswellen

$$f_{sk|i|p} = -k_i k_p f_{sk} \tag{V.95}$$

  $\rightarrow$ Rückführung von $R^m{}_{ikp}$ auf f_{11} und f_{12}

- außerdem gilt für den linearisierten Krümmungstensor in obiger Form die Wellengleichung

$$\Box R^m{}_{ikp} = 0 \tag{V.96}$$

  als kovariante Gleichung; da

$$\Box R^m{}_{ikp} = R^m{}_{ikp|n}{}^{|n} = \eta^{nr}R^m{}_{ikp|n|r} = \frac{1}{2}\eta^{ms}\eta^{nr}(f_{sk|i|p|n|r} - ...) \tag{V.97}$$

$$= \frac{1}{2}\eta^{ms}\eta^{nr}(f_{sk|n|r|i|p} - ...) \tag{V.98}$$

$$= \frac{1}{2}\eta^{ms}(\Box f_{sk|i|p} - ...) = 0 \tag{V.99}$$

Probeteilchen im Feld der ebenen Gravitationswelle, das keinen weiteren Kräften ausgesetzt ist

- freies Teilchen genügt Geodätengleichung

$$\ddot{\xi}^i + \Gamma^i_{kl}\dot{\xi}^k\dot{\xi}^l = 0 \tag{V.100}$$

mit

$$\dot{\xi}^i = \frac{d\xi^i}{d\tau} = u^i \tag{V.101}$$

$$\frac{du^i}{d\tau} + \Gamma^i_{kl}u^k u^l = 0 \tag{V.102}$$

- Anfangsbedingung: ruhendes Teilchen

$$u^i = (0,0,0,c) \tag{V.103}$$

- tt-Eichung

$$\rightarrow \quad \text{nur} \quad f_{11}, f_{22}, f_{12}, f_{21} \neq 0 \tag{V.104}$$

$$\rightarrow \quad \Gamma^i_{44} = \frac{1}{2}\eta^{4s}(f_{s4|4} + f_{s4|4} - f_{44|s}) = 0 \tag{V.105}$$

$$\rightarrow \quad \left.\frac{du^i}{d\tau}\right|_{\tau=0} = 0 \tag{V.106}$$

$$\rightarrow \quad u^i = (0,0,0,c) \tag{V.107}$$

$$\rightarrow \quad \xi^a = const, \tag{V.108}$$

$$\xi^4 = c\tau \tag{V.109}$$

Teilchen bleibt in Ruhe bzgl. des gewählten KS ξ ; wegen Zeitabhängigkeit der Metrik ändern sich relative Abstände von Teilchen zueinander

- ds^2

$$ds^2 = (\eta_{mn} + f_{mn})d\xi^m d\xi^n \tag{V.110}$$

mit

$$f_{mn} = f_{mn}(\xi^3, \xi^4) \quad \text{für} \quad m,n = 1,2 \tag{V.111}$$

- Umschrift

$$ds^2 = dl^2 + (d\xi^3)^2 - (d\xi^4)^2, \tag{V.112}$$

$$\xi^4 = ct \tag{V.113}$$

mit

$$dl^2 = (1 + f_{11})(d\xi^1)^2 + (1 - f_{11})(d\xi^2)^2 + 2f_{12}d\xi_1 d\xi_2 \tag{V.114}$$

- Betrachtung von Teilchen auf einem Kreis bei $\xi^3 = 0$ zunächst ohne Welle, also

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 = L^2 \tag{V.115}$$

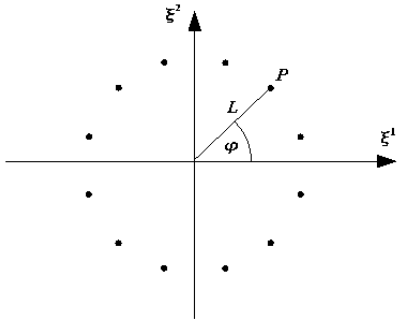
- Einfallen einer ebenen Gravitationswelle in ξ^3 - Richtung :

$$l^2 = (1 + f_{11})(\xi^1)^2 + (1 - f_{11})(\xi^2)^2 + 2f_{12}\xi^1\xi^2, \tag{V.116}$$

da f_{ab} nicht von ξ^1, ξ^2 abhängen, können endliche Koordinaten statt Differentiale benutzt werden.

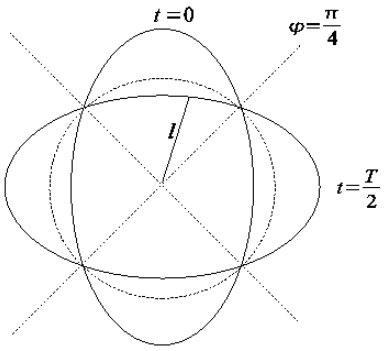
- Position eines Teilchens P ändert sich nicht; wir schreiben

$$\xi^1_P = L\cos\varphi \tag{V.117}$$
$$\xi^2_P = L\sin\varphi \tag{V.118}$$



- Fall 1 : Gravitationswelle Typ I , $e_{11} = 1$, $e_{12} = 0$, Amplitude $\hat{a}$

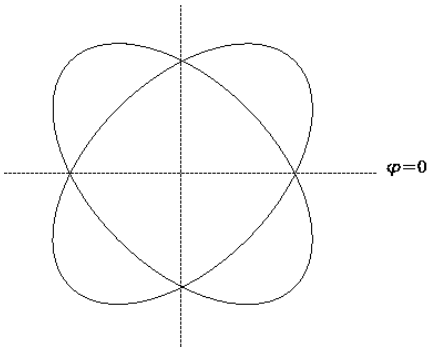
$$l^2 = L^2\left\{(1 + \hat{a}e_{11}\cos\omega t)\cos^2\varphi + (1 - \hat{a}e_{11}\cos\omega t)\sin^2\varphi\right\} \tag{V.119}$$
$$l^2 = L^2\left\{1 - \hat{a}\cos\omega t\cos 2\varphi\right\} \tag{V.120}$$



- Fall 2 : Gravitationswelle Typ II , $e_{11} = 0$, $e_{12} = 1$,

$$l^2 = L^2 \left\{ \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi + 2\hat{a} e_{12} \cos \omega t \cos \varphi \sin \varphi \right\} \quad \text{(V.121)}$$

$$= L^2 \left\{ 1 + \hat{a} \cos \omega t \sin 2\varphi \right\} \quad \text{(V.122)}$$



4 Nachweis von Gravitationswellen

Weber - Zylinder

Interferometer

- GEO 600 (600m)
- LIGO (4km, Washington in Luisiana)
- VIRGO (3km, Pisa)
- TAMA 300 (3km, Japan)
- LISA ($5 \cdot 10^6$ km, ESA,NASA)

Kapitel VI

Innere Schwarzschild-Lösung

Gravitationsfeld im Innern eines Himmelskörpers

Modell für Energie-Impuls-Tensor notwendig

- Vernachlässigung von innerer Reibung, Wärmeleitung u.a. typisch thermodynamischen Effekten

- Modell eines idealen fluiden Mediums ist gute Approximation
  (vgl. (III.70))

$$T_{mn} = \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) u_m u_n + P g_{mn} \tag{VI.1}$$

  weglassen des Index „0“ an ρ und P zur Markierung, das es sich um die Größen im Ruhesystem des jeweiligen Volumenelementes handelt („ statischer-Druck“)

Feldgleichungen

$$R_m^{\ n} - \frac{R}{2}\delta_m^{\ n} = -\kappa T_m^{\ n} \tag{VI.2}$$

hier am günstigsten in dieser Form.

1 Aufstellen der Feldgleichungen und der Integrabilitätsbedingungen

Statische, kugelsymmetrische Lösung gesucht

- Vernachlässigung radialer Massesträme in den Sternen

Ansatz für Metrik

$$ds^2 = e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) - e^{\nu(r)} dct^2 \tag{VI.3}$$

Materie ruht in diesem Koordiantensystem

$$u^m = (0,0,0,u^4) \tag{VI.4}$$

$$T_1{}^1 = T_2{}^2 = T_3{}^3 = P \tag{VI.5}$$
$$T_4{}^4 = -c^2\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) + P = -c^2\rho \tag{VI.6}$$
$$T_m^n = 0 \text{ für } m \neq n \tag{VI.7}$$

Ricci- Tensor wie im Abschnitt „ Schwarzschild-Lösung“ mit $\dot{\lambda} = \dot{\nu} = 0$

$$R_{11} = \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'\nu'}{4} - \frac{\lambda'}{r} \tag{VI.8}$$
$$R_{22} = -1 + e^{-\lambda}\left\{1 + \frac{r}{2}\left(\nu' - \lambda'\right)\right\} \tag{VI.9}$$
$$R_{33} = \sin^2\vartheta R_{22} \tag{VI.10}$$
$$R_{44} = -e^{\nu-\lambda}\left\{\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\nu'}{r}\right\} \tag{VI.11}$$

Krümmungsskalar R

$$R = g^{mn}R_{mn} \tag{VI.12}$$

Ablesen der g^{mn}

$$g^{11} = e^{-\lambda} \tag{VI.13}$$
$$g^{22} = \frac{1}{r^2} \tag{VI.14}$$
$$g^{33} = \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta} \tag{VI.15}$$
$$g^{44} = -e^{-\nu} \tag{VI.16}$$

$$R = g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} + g^{44}R_{44} \tag{VI.17}$$

$$R = e^{-\lambda}\left\{\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'\nu'}{4} - \frac{\lambda'}{r}\right\} \tag{VI.18}$$
$$+ \frac{1+1}{r^2}\left\{-1 + e^{-\lambda}\left(1 + \frac{r}{2}\left(\nu' - \lambda'\right)\right)\right\} + e^{-\lambda}\left\{\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\nu'}{r}\right\}$$
$$R = -\frac{2}{r^2} + 2e^{-\lambda}\left\{\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'\nu'}{4} - \frac{\lambda'}{2r} + \frac{\nu'}{2r} + \frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{2r} - \frac{\lambda'}{2r}\right\} \tag{VI.19}$$
$$R = -\frac{2}{r^2} + 2e^{-\lambda}\left\{\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} + \frac{1}{r^2}\right\} \tag{VI.20}$$

Umrechnung R_{mn} in $R_m^{\ n}$

$$
\begin{aligned}
R_m^{\ n} &= g^{ni}R_{im} && \text{(VI.21)}\\
R_1^{\ 1} &= g^{11}R_{11} && \text{(VI.22)}\\
R_1^{\ 1} &= -e^{-\lambda}\left\{\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'^2}{4}-\frac{\lambda'\nu'}{4}-\frac{\lambda'}{r}\right\} && \text{(VI.23)}\\
R_2^{\ 2} &= g^{22}R_{22} && \text{(VI.24)}\\
R_2^{\ 2} &= -\frac{1}{r^2}+e^{-\lambda}\left\{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{2r}\left(\nu'-\lambda'\right)\right\} && \text{(VI.25)}\\
R_3^{\ 3} &= g^{33}R_{33} = R_2^{\ 2} && \text{(VI.26)}\\
R_4^{\ 4} &= g^{44}R_{44} = e^{-\lambda}\left\{\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'^2}{4}-\frac{\lambda'\nu'}{4}+\frac{\nu'}{r}\right\} && \text{(VI.27)}
\end{aligned}
$$

Erinnerung

$$
\frac{R}{2}=-\frac{1}{r^2}+e^{-\lambda}\left\{\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'^2}{4}-\frac{\lambda'\nu'}{4}+\frac{\nu'-\lambda'}{r}+\frac{1}{r^2}\right\} \qquad \text{(VI.28)}
$$

Feldgleichungen

$$
R_m^{\ n}-\frac{R}{2}\delta_m^{\ n} = -\kappa T_m^{\ n} \qquad \text{(VI.29)}
$$

$\frac{1}{1}$:

$$
\begin{aligned}
-\kappa P &= R_1^{\ 1}-\frac{R}{2} && \text{(VI.30)}\\
-\kappa P &= +\frac{1}{r^2}-e^{-\lambda}\left\{\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right\} && \text{(VI.31)}
\end{aligned}
$$

$\frac{2}{2}$:

$$
\begin{aligned}
-\kappa P &= R_2^{\ 2}-\frac{R}{2} && \text{(VI.32)}\\
-\kappa P &= -\frac{1}{r^2}-e^{-\lambda}\left\{\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'^2}{4}-\frac{\lambda'\nu'}{4}+\frac{\nu'-\lambda'}{2r}\right\} && \text{(VI.33)}
\end{aligned}
$$

$\frac{3}{3}$: identisch $\frac{2}{2}$

$\frac{4}{4}$:

$$+\kappa c^2\rho = R_4{}^4 - \frac{R}{2} \tag{VI.34}$$

$$+\kappa c^2\rho = \frac{1}{r^2} - e^{-\lambda}\left\{-\frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2}\right\} \tag{VI.35}$$

$\longrightarrow$ 3 Feldgleichungen für

$$\lambda(r), \nu(r), P(r), \rho(r) \tag{VI.36}$$

Über die Feldgleichungen hinaus ist eine Zustandsgleichung (= Materialgleichung)

$$F(\rho, P) = 0 \tag{VI.37}$$

zu formulieren!

anstatt der Feldgleichungen ist es ggf. zweckmäßig die Integrabilitätsbedingungen (IB)

$$T^{mn}{}_{||n} = 0 \tag{VI.38}$$

$$\text{bzw.} \quad T_m{}^n{}_{||n} = 0 \tag{VI.39}$$

mit zu verwenden:

$$T_m{}^n = \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) u_m u^n + P\delta_m^n \tag{VI.40}$$

$$T_m{}^n{}_{||n} = \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)_{|n} u_m u^n + \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) u_{m||n} u^n + \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) u_m u^n{}_{||n} + P_{|m} = 0 \tag{VI.41}$$

wegen $u^n = (0, 0, 0, u^4)$ gilt

$$\rho_{|n} \cdot u^n = 0 \tag{VI.42}$$

$$P_{|n} \cdot u^n = 0 \tag{VI.43}$$

$$u^n{}_{||n} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}u^n\right)_{|n} = 0 \tag{VI.44}$$

$$u_{m||n} = u_{m|n} - \Gamma^i_{mn}u_i = 0 - \Gamma^4_{mn}u^4 = -u^4\Gamma^4_{mn} \tag{VI.45}$$

$$\left\{u_{a||n} \neq 0 \quad \text{obwohl} \quad u_a = 0\,!\,\right\} \tag{VI.46}$$

nichttriviale Formel nur für m = 1

$$
\begin{aligned}
0 &= P' + \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) u_{1||n} u^n && \text{(VI.47)}\\
&= P' + \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) (-u^4)\ \Gamma^4_{1n} u^n && \text{(VI.48)}\\
&= P' + \left(\rho c^2 + P\right) \Gamma^4_{14} \quad ;\ \Gamma^4_{14} = \frac{\nu'}{2} && \text{(VI.49)}\\
0 &= P' + \frac{\nu'}{2}\left(P + \rho c^2\right) && \text{(VI.50)}
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung ist in den übrigen 3 Feldgleichungen $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{4}$ enthalten (ÜA!) und kann anstelle einer dieser Gleichungen betrachtet werden!

Zusammenfassung der Grundgleichungen

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{1}: \quad -\kappa P &= +\frac{1}{r^2} - e^{-\lambda}\left\{\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right\} && \text{(VI.51)}\\
\tfrac{2}{2}: \quad -\kappa P &= -e^{-\lambda}\left\{\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r}\right\} && \text{(VI.52)}\\
\tfrac{4}{4}: \quad +\kappa c^2 \rho &= \frac{1}{r^2} - e^{-\lambda}\left\{-\frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2}\right\} && \text{(VI.53)}\\
\text{oder IB}: \quad P' &= -\frac{\nu'}{2}\left(P + \rho c^2\right) && \text{(VI.54)}
\end{aligned}
$$

Oppenheimer - Volkoff - Gleichung

- reduzierte Druckgleichung für beliebige Zustandsgleichungen $F(P, \rho) = 0$
- Elimination von λ und ν mit dem Ziel einer Gleichung $P' = f(P, \rho)$
- Integration der $\frac{4}{4}$ Gleichung:

$$
\begin{aligned}
\kappa c^2 \rho r^2 &= 1 - e^{-\lambda}\left\{1 - \lambda' r\right\} = 1 - \left(r e^{-\lambda}\right)' && \text{(VI.55)}\\
r e^{-\lambda} &= r - \kappa c^2 \int_0^r \rho(\tilde{r}) \tilde{r}^2 d\tilde{r} + C && \text{(VI.56)}\\
r e^{-\lambda} &= r - 2m(r) + C && \text{(VI.57)}
\end{aligned}
$$

mit der Massenfunktion

$$
m(r) = \frac{\kappa c^2}{2} \int_0^r \rho(\tilde{r}) \tilde{r}^2 d\tilde{r} \qquad \text{(VI.58)}
$$

- anschaulich: $m(r)$ proportional zur Gesamtmasse in der Kugel mit Radius r ; Vorsicht: r ist Koordinatenradius und nicht der wahre Kugelradius R; dieser ist

$$R = \int_0^r \sqrt{g_{11}}d\tilde{r} = \int_0^r e^{\frac{\lambda}{2}}d\tilde{r} \tag{VI.59}$$

- $C \stackrel{!}{=} 0$ damit

$$g^{11} = e^{-\lambda} < \infty \quad \text{für} \quad r \to 0 \tag{VI.60}$$

$$\longrightarrow \quad e^{-\lambda(r)} = 1 - 2\frac{m(r)}{r} \tag{VI.61}$$

- Auflösen der $\frac{1}{1}$ Gleichung nach ν' und Einsetzen in die IB

$$\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} = \left(\frac{1}{r^2} + \kappa P\right)e^{\lambda} = \frac{\frac{1}{r^2} + \kappa P}{1 - 2\frac{m}{r}} \tag{VI.62}$$

$$\nu' = -\frac{1}{r} + \frac{\frac{1}{r} + \kappa P r}{1 - 2\frac{m}{r}} = \frac{-\frac{1}{r} + 2\frac{m}{r^2} + \frac{1}{r} + \kappa P r}{1 - 2\frac{m}{r}} \tag{VI.63}$$

$$\nu' = \frac{2\frac{m}{r^2} + \kappa P r}{1 - 2\frac{m}{r}} \tag{VI.64}$$

in IB

$$P' = -\frac{1}{2}\frac{2\frac{m}{r^2} + \kappa P r}{1 - 2\frac{m}{r}}\left(P + \rho c^2\right) \tag{VI.65}$$

$$P' = -\frac{\left(m + \frac{\kappa}{2}Pr^3\right)\left(P + \rho c^2\right)}{r^2\left(1 - 2\frac{m}{r}\right)} \tag{VI.66}$$

Oppenheimer Volkoff - Gl.

- Gleichung stellt hydrostatische Gleichgewichtsbedingung eines Sterns dar, wobei $P(r)$ und $\rho(r)$ durch eine beliebige Zustandsgleichung $F(P, \rho) = 0$ verbunden sind.

- Zum einfacheren Vergleich mit der Newtonschen Theorie lässt sich die Oppenheimer-Volkoff-Gleichung mittels der Abkürzung

$$\tilde{m}(r) = 4\pi \int_0^r r'^2 \rho(r')dr' \tag{VI.67}$$

auch darstellen als

$$P' = \frac{dP}{dr} = -\frac{\gamma\tilde{m}\rho}{r^2}\frac{\left(1 + \frac{P}{\rho c^2}\right)\left(1 + \frac{4\pi r^2 P}{\tilde{m}c^2}\right)}{1 - \frac{2\gamma\tilde{m}}{c^2 r}} \quad . \tag{VI.68}$$

Vergleich mit der Newtonschen Theorie

$$P'_N = \frac{dP}{dr} = \lim \frac{\Delta P}{\Delta r} = \lim \frac{\Delta K}{\Delta F \Delta r} = \lim \frac{\Delta K}{\Delta V} \tag{VI.69}$$

$$= \lim \left\{ -\gamma \frac{\Delta \tilde{m} \cdot \tilde{m}(r)}{r^2 \Delta V} \right\} = -\gamma \frac{\rho \tilde{m}}{r^2} \tag{VI.70}$$

wobei $\tilde{m}(r)$ Massendimension hat im Unterschied zur obigen Massenfunktion $m(r)$; $\Delta\tilde{m}$ liegt als Masse auf $\tilde{m}$; $\rho = \frac{\Delta \hat{m}}{\Delta V}$
$\longrightarrow$ relativist. Druckgradient ist betragsmäßig größer als der Newtonsche: Vergrößerung der Faktoren im Zähler, Verkleinerung des Nenners.

Oppenheimer - Volkoff - Gleichung ist i.a. numerisch zu integrieren bei Vorgabe einer Zustandsgleichung und eines Zentraldruckes $P(0) = P_0$; Integration bis $P = 0 \longrightarrow r = r_0 (\hat{=}$ Sternrand)

2 Lösung für inkompressible Materie

- diese Situation wird auch Innere Schwarzschild-Lösung genannt
- inkompressible Materie = konstante Ruhemassendichte:

$$\rho = const \tag{VI.71}$$

$$m(r) = \frac{\kappa c^2}{2} \rho \frac{r^3}{3} \tag{VI.72}$$

$$P' = -\frac{\frac{\kappa}{2} r^3 \left(\frac{1}{3} c^2 \rho + P\right) \left(P + \rho c^2\right)}{r^2 \left(1 - \frac{1}{3} \kappa c^2 \rho r^2\right)} \tag{VI.73}$$

$$A := \frac{1}{3} \kappa c^2 \rho \tag{VI.74}$$

$$P' = -\frac{\kappa}{2} r \frac{\left(P + \frac{1}{3} c^2 \rho\right) \left(P + \rho c^2\right)}{1 - A r^2} \tag{VI.75}$$

$$\frac{dP}{\left(P + \frac{1}{3} c^2 \rho\right) \left(P + \rho c^2\right)} = -\frac{\kappa}{2} \frac{r dr}{1 - A r^2} \tag{VI.76}$$

$$\tilde{p} := \kappa P \tag{VI.77}$$

$$\frac{d\tilde{p}}{(\tilde{p} + A)(\tilde{p} + 3A)} = -\frac{1}{2} \frac{r dr}{1 - A r^2} \tag{VI.78}$$

- sei r_0 Rand des Sterns und $P(r_0) = 0$.

- rechte Seite: Integration von r_0 nach innen (r)

$$y = Ar^2, \tag{VI.79}$$
$$dy = A2rdr, \tag{VI.80}$$
$$z = 1-y \tag{VI.81}$$
$$-\frac{1}{2}\int_{r_0}^{r}\frac{rdr}{1-Ar^2} = -\frac{1}{4A}\int\frac{dy}{1-y} = \frac{1}{4A}\ln\left(1-Ar^2\right)\Big|_{r_0}^{r} \tag{VI.82}$$
$$= \frac{1}{4A}\ln\frac{1-Ar^2}{1-Ar_0^2} \tag{VI.83}$$

- linke Seite : Integration von $P(r_0)=0$ bis P bzw $\tilde{p}$

$$\frac{1}{(\tilde{p}+A)(\tilde{p}+3A)} = \frac{\frac{1}{2A}}{\tilde{p}+A}+\frac{-\frac{1}{2A}}{\tilde{p}+3A} = \frac{1}{2A}\left\{\frac{1}{\tilde{p}+A}-\frac{1}{\tilde{p}+3A}\right\} \tag{VI.84}$$
$$\int_0^{\tilde{p}}\frac{d\tilde{p}}{(\tilde{p}+A)(\tilde{p}+3A)} = \frac{1}{2A}\left\{ln\frac{\tilde{p}+A}{A}-ln\frac{\tilde{p}+3A}{3A}\right\} = \frac{1}{2A}ln\left(3\frac{\tilde{p}+A}{\tilde{p}+3A}\right) \tag{VI.85}$$

- folglich

$$3\frac{\tilde{p}+A}{\tilde{p}+3A} = \sqrt{\frac{1-Ar^2}{1-Ar_0^2}} \tag{VI.86}$$
$$\tilde{p}+A = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1-Ar^2}{1-Ar_0^2}}+\sqrt{\frac{1-Ar^2}{1-Ar_0^2}}A \tag{VI.87}$$
$$\tilde{p} = A\frac{\surd-1}{1-\frac{1}{3}\surd} = 3A\frac{\sqrt{\frac{1-Ar^2}{1-Ar_0^2}}-1}{3-\sqrt{\frac{1-Ar^2}{1-Ar_0^2}}} \tag{VI.88}$$
$$\tilde{p} = \kappa P = 3A\frac{\sqrt{1-Ar^2}-\sqrt{1-Ar_0^2}}{3\sqrt{1-Ar_0^2}-\sqrt{1-Ar^2}} \tag{VI.89}$$

- Bestimmung von λ für $\rho = const$ aus $\frac{4}{4}$:

$$e^{-\lambda} = 1-\frac{\kappa c^2\rho}{3}r^2 = 1-Ar^2 \longrightarrow \lambda \tag{VI.90}$$

- Bestimmung von ν für $\rho = const$ aus IB:

$$P' = -\frac{\nu'}{2}\left(P+c^2\rho\right) = \left(P+c^2\rho\right)' \tag{VI.91}$$
$$ln\left(P+c^2\rho\right) = -\frac{\nu}{2}+const \tag{VI.92}$$
$$P+c^2\rho = Be^{-\frac{\nu}{2}} \tag{VI.93}$$

Also

$$e^{+\lambda} = \frac{1}{1-Ar^2} \tag{VI.94}$$

sowie

$$e^{+\frac{\nu}{2}} = \frac{B}{P + c^2\rho} \tag{VI.95}$$

3 Übergangsbedingungen an die äußere Schwarzschild - Lösung

Erinnerung an Elektrodynamik

- Übergangsbedingungen zwischen zwei Medien aus Maxwell-Gleichungen ableitbar
- z.B. $B_n^I = B_n^{II}$, $\epsilon^I E_n^I = \epsilon^{II} E_n^{II}$ usw.

Übergangsbedingungen in ART ebenfalls aus Einsteinschen Feldgleichungen ableitbar

- Rechnung aufwendig
- hier: physikalische Intuition anstatt längerer Rechnung:
  Metrik stetig auf Sternoberfläche bei $r = r_0$

innere Schwarzschildlösung $r \leq r_0$

$$ds^2 = e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right) - e^{\nu(r)}dct^2 \tag{VI.96}$$

$$\text{mit} \quad \lambda(r), \nu(r) \quad \text{aus vorigem Abschnitt} \tag{VI.97}$$

äußere Schwarzschild - Lösung $r \geq r_0$

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_G}{r}} + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right) - \left(1 - \frac{r_G}{r}\right)dct^2 \tag{VI.98}$$

Stetigkeit: innen - außen bei $r = r_0$

$$e^{-\lambda(r_0)}: \quad 1 - Ar_0^2 = 1 - \frac{r_G}{r_0} \tag{VI.99}$$

$$e^{-\nu(r_0)}: \quad \left(\frac{B}{c^2\rho}\right)^2 = 1 - \frac{r_G}{r_0} \tag{VI.100}$$

$$\longrightarrow \quad A = \frac{r_G}{r_0^3} \quad (= \frac{1}{3}c^2\rho\kappa) \tag{VI.101}$$

$$B = c^2\rho\sqrt{1-\frac{r_G}{r_0}} \tag{VI.102}$$

$$B = \frac{3r_G}{\kappa r_0^3}\sqrt{1-\frac{r_G}{r_0}} \tag{VI.103}$$

$$\longrightarrow \quad e^{-\lambda(r)} = 1 - Ar^2 = 1 - \frac{r_G r^2}{r_0^3} \tag{VI.104}$$

$$e^{\frac{\nu(r)}{2}} = \frac{B}{(P+c^2\rho)} = \frac{c^2\rho\sqrt{1-\frac{r_G}{r_0}}}{(P+c^2\rho)} \tag{VI.105}$$

$$e^{\frac{\nu}{2}} = \frac{\frac{3A}{\kappa}\sqrt{1-Ar_0^2}}{\frac{3A}{\kappa}\frac{\sqrt{1-Ar^2}-\sqrt{1-Ar_0^2}}{3\sqrt{1-Ar_0^2}-\sqrt{1-Ar^2}}+\frac{3A}{\kappa}} \tag{VI.106}$$

$$e^{\frac{\nu}{2}} = \frac{\sqrt{1-Ar_0^2}\left\{3\sqrt{1-Ar_0^2}-\sqrt{1-Ar^2}\right\}}{\cancel{\sqrt{1-Ar^2}}-\sqrt{1-Ar_0^2}+3\sqrt{1-Ar_0^2}-\cancel{\sqrt{1-Ar^2}}} \tag{VI.107}$$

$$e^{\frac{\nu}{2}} = \left\{\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{r_G}{r_0}}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{r_G r^2}{r_0^3}}\right\}^2 \tag{VI.108}$$

Darstellung der inneren Schwarzschild-Lösung

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-\frac{r_G r^2}{r_0^3}} + r^2\left(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta d\varphi^2\right) - \left\{\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{r_G}{r_0}}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{r_G r^2}{r_0^3}}\right\}^2 dct^2 \tag{VI.109}$$

vgl. mit äußerer Schwarzschild-Lösung

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-\frac{r_G}{r}} + r^2\left(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta d\varphi^2\right) - \left\{1-\frac{r_G}{r}\right\}dct^2 \tag{VI.110}$$

4 Massenobergrenze für stabile Sterne

Betrachtung der Druckgleichung für die innere Schwarzschild-Lösung

$$P = \rho c^2\,\frac{\sqrt{1-\frac{r_G r^2}{r_0^3}}-\sqrt{1-\frac{r_G}{r_0}}}{3\sqrt{1-\frac{r_G}{r_0}}-\sqrt{1-\frac{r_G r^2}{r_0^3}}} \tag{VI.111}$$

- folglich: Druck steigt nach innen an startend bei $P = 0$ bei $r = r_0$, Maximalwert bei $r = 0$

Lösung soll nichtsingulär bleiben, d.h. Lösung soll existieren

$$\longrightarrow \quad P(r=0) \overset{!}{<} \infty \tag{VI.112}$$

$$\sqrt{1-\frac{r_G r^2}{r_0^3}}\Bigg|_{r=0} \overset{!}{<} 3\sqrt{1-\frac{r_G}{r_0}} \tag{VI.113}$$

$$1 < 9-9\frac{r_G}{r_0} \tag{VI.114}$$

$$9\frac{r_G}{r_0} < 8 \tag{VI.115}$$

$$r_0 > \frac{9}{8}r_G \tag{VI.116}$$

- bei vorgegebener Gesamtmasse ($\propto r_G$) ist die innere Lösung nur dann regulär, wenn der Sternradius r_0 groß genug ist, auf jeden Fall größer als der Schwarzschild-Radius r_G
- bei Sternen vom Sonnen-Typ ist dies immer erfüllt
- bei Sternen mit sehr dichter Materie (Kernmaterie) kann die Ungleichung unerfüllbar sein
  $\longrightarrow \nexists$ stabile Lösung
  $\longrightarrow$ Kollaps $\hat{=}$ Schwarzes Loch
- detaillierte Untersuchung mittels zeitabhängiger Lösung (vgl. Kapitel "Gravitationskollaps und Schwarze Löcher")

Stabilitätsgrenze wurde für die Zustandsgleichung $\rho = const$ gewonnen; ohne Beweis geben wir an, dass

$$r_0 > \frac{9}{8}r_G \tag{VI.117}$$

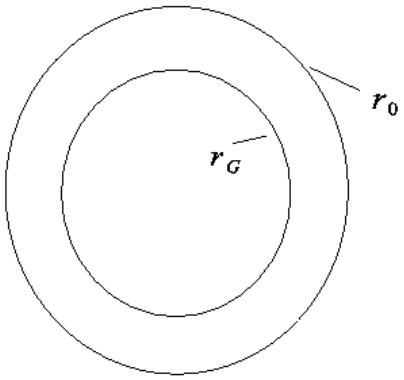
die Stabilitätsgrenze für eine beliebige Zustandsgleichung ist, d.h. für

$$r_0 < \frac{9}{8}r_G \tag{VI.118}$$

kollabiert jeder Stern unaufhörlich völlig unabhängig von der konkreten Materieform

Plausibilität für die Stabilitätsgrenze bei Zustandsgleichungen $\rho \neq const.$:

1. Masse außen verdichten $\longrightarrow$ instabil
2. Masse innen verdichten $\longrightarrow$ Stern wird effektiv komprimiert und kleiner gemacht $\longrightarrow$ Stabilitätsgrenze wird eher noch früher überschritten



5 Zustandsgleichung und Sterntypen

Für einen Stern im Gleichgewicht (statische Situation) gilt

$$P(r=0) < \infty \tag{VI.119}$$

Druck wird verursacht durch

- Gravitation ($\hat{=}$ Oppenheimer-Volkoff-Gl.)
- mikroskopischen Materieeigenschaften ($\hat{=}$ Zustandsgleichung)

Beide Ursachen stehen im statischen Stern in der Balance

Für $r_0 > \frac{9}{8} r_G$ sind verschiedene mikroskopische Prozesse (= Zustandsgleichungen) denkbar, die stabile Sterne ermöglichen. Unter gewissen Bedingungen (r_0 genügend klein) können die mikroskopischen Prozesse der Gravitation keinen Einhalt gebieten und es entsteht ein Schwarzes Loch.

5.1 Newtonsche Sterne

Sonnentyp

Materie als Ideales Gas

Zustandsgleichung

$$P = nk_BT = \frac{N}{V} k_BT \tag{VI.120}$$

$$M = N\mu = \rho V \ , \ \mu \quad \text{Masse eines Teilchens} \tag{VI.121}$$

$$P = \frac{k_BT}{\mu}\rho \tag{VI.122}$$

Oppenheimer - Volkoff - Gleichung für $\rho = const$

$$P = \rho c^2 \frac{\sqrt{1 - \frac{r_G r^2}{r_0^3}} - \sqrt{1 - \frac{r_G}{r_0}}}{3\sqrt{1 - \frac{r_G}{r_0}} - \sqrt{1 - \frac{r_G r^2}{r_0^3}}} \tag{VI.123}$$

Zentraldruck $P_0 := P(r = 0)$

$$P_0 = \rho c^2 \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{r_G}{r_0}}}{3\sqrt{1 - \frac{r_G}{r_0}} - 1} \tag{VI.124}$$

$$\begin{aligned} r_G &\ll r_0 \\ \frac{P_0}{\rho c^2} &= \frac{\frac{1}{2}\frac{r_G}{r_0}}{3 - 1} = \frac{1}{4}\frac{r_G}{r_0} \end{aligned} \tag{VI.125}$$

P_0 kann ausbalanciert werden, wenn T genügend groß ist, d.h. solange die Fusion brennt; dann gilt

$$\frac{P}{\rho c^2} = \frac{k_B T}{\mu c^2} \tag{VI.126}$$

$k_B T$ ist die bei der Fusion freigesetzte Energie; $\frac{k_B T}{c^2}$ ist der entsprechende Massendefekt

Ende des Fusionsbrennens

- Stern kühlt aus, $T \to 0$
- Gasdruck kann Gravitationsdruck nicht ausbalancieren
  $\longrightarrow$ Kollaps bis Weißer - Zwerg

5.2 Weiße Zwerge

- siehe Thermodynamik-Vorlesung

Zusammenfassung

Innere Schwarzschild-Lösung

Modell eines stationären kugelsymmetrischen Sterns aus idealem fluiden Medium

$$T_m^{\ n} = \left(\frac{P}{c^2}+\rho\right)u_m u^n + P\delta_m^n \tag{VI.127}$$

$$\text{mit} \quad u^n = (0,0,0,u^4) \tag{VI.128}$$

Feldgleichungen

$$\frac{1}{r^2} - e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right) = -\kappa P \tag{VI.129}$$

$$-e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'^2}{4}-\frac{\lambda'\nu'}{4}+\frac{\nu'-\lambda'}{2r}\right) = -\kappa P \tag{VI.130}$$

$$\frac{1}{r^2} - e^{-\lambda}\left(-\frac{\lambda'}{r}+\frac{1}{r^2}\right) = \kappa c^2 P \tag{VI.131}$$

Integrabilitätsbedingung

$$P' = -\frac{\nu'}{2}\left(P+c^2\rho\right) \tag{VI.132}$$

$\longrightarrow$ 3 unabhängige Gleichungen für $\lambda(r), \nu(r), p(r), \rho(r)$

Zustandsgleichung (Materialgleichung) : $F(p,\rho)=0$ zu spezifizieren!

Oppenheimer-Volkoff-Gleichung : (Elimination von λ und ν)

$$P' = -\frac{\left(m+\frac{\kappa}{2}Pr^3\right)\left(P+\rho c^2\right)}{r^2\left(1-2\frac{m}{r}\right)} \tag{VI.133}$$

$$\text{mit} \quad m(r) = \frac{\kappa c^2}{2}\int_0^r \rho(\tilde{r})\tilde{r}^2 d\tilde{r} \quad \text{(Massenfkt.)} \tag{VI.134}$$

Newtonscher Grenzfall : $P << c^2\rho$

$$P' = -\frac{mc^2\rho}{r^2} = -\gamma\frac{M_N\rho}{r^2} \tag{VI.135}$$

Inkompressible Materie ($\rho = const$)

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-\frac{r_G r^2}{r_0^3}} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) - \left(\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{r_G}{r_0}} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{r_G r^2}{r_0^3}}\right) dct^2 \qquad \text{(VI.136)}$$

Massenobergrenze für stabile Sterne

$$r_0 > \frac{9}{8} r_G \qquad \text{(VI.137)}$$

$\longrightarrow$ Unaufhörlicher Kollaps = Schwarzes Loch für

$$r_0 < \frac{9}{8} r_G \qquad \text{(VI.138)}$$

Kapitel VII

Gravitationskollaps und schwarze Löcher

- Bisher: Existenz Schwarzer Löcher nur indirekt geschlossen wegen Unmöglichkeit stabiler Sterne für Sternradius $r_S < \frac{9}{8} r_G$.
- Jetzt: Dynamischen Prozess betrachten, insbesondere wie die Oberfläche hinter r_G verschwindet.

1 Kugelsymmetrischer Ansatz in Gauss-Koordinaten

- kugelsymmetrischer Ansatz zunächst in Schwarzschild Koordinaten $(r, \vartheta, \varphi, ct)$

$$ds^2 = e^{\lambda(r,t)} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) - e^{\nu(r,t)} dct^2 \tag{VII.1}$$

- Transformation in Gauss-Koordinaten $(\rho, \vartheta, \varphi, c\tau)$

$$r = r(\rho, c\tau) \quad , \quad ct = ct(\rho, c\tau)$$

ρ ist hier Koordinate, ρ_0 ist weiterhin Ruhmassendichte; ρ_S wird später der Koordinatenwert für die Sternoberfläche.

Bezeichnungen: $(...)' := \frac{\partial(...)}{\partial \rho}$, $\dot{(...)} := \frac{\partial(...)}{\partial c\tau}$

$$dr^2 = r'^2 \, d\rho^2 + \dot{r}^2 dc\tau^2 + 2\, r' \, \dot{r} \, d\rho \, dc\tau \tag{VII.2}$$

$$dct^2 = ct'^2 \, d\rho^2 + \dot{ct}^2 dc\tau^2 + 2\, ct' \, \dot{ct} \, d\rho \, dc\tau \tag{VII.3}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad ds^2 &= (e^{\lambda}\, r'^2 \;-\; e^{\nu}\, \dot{ct}^2) d\rho^2 \;+\; r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) \\ &+ \underbrace{(e^{\lambda}\, \dot{r}^2 \;-\; e^{\nu}\, \dot{ct}^2)}_{\stackrel{!}{=}-1}\, dc\tau^2 \;+ \underbrace{(e^{\lambda}\, 2\dot{r}\, r' \;-\; e^{\nu}\, 2\dot{ct}\, ct')}_{\stackrel{!}{=}0}\, dc\tau\, d\rho \end{aligned} \tag{VII.4}$$

Koordinatentransformation geeignet wählen!

$$ds^2 = e^{\tilde{\lambda}(\rho, c\tau)}\, d\rho^2 \;+ r^2(\rho, c\tau)\, (d\vartheta^2 + sin^2\vartheta\, d\varphi^2) \;-\; dc\tau^2 \tag{VII.5}$$

- Interpretation der Koordinate $c\tau$:

  ruhendes Teilchen (Beobachter) in Gausskoordinaten

  $$d\rho = 0 \quad , \quad d\vartheta = 0 \quad , \; d\varphi = 0$$

  $\rightarrow \quad ds^2 \;=\; - dc\tau^2 \quad$ bzw. $\quad \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = -c^2$

  Dies ist gerade die Definition der Eigenzeit.

  $\rightarrow \quad \tau \;\;\widehat{=}\;\;$ Eigenzeit im Koordinaten-System ruhender Teilchen.

- Umbenennung: $\tilde{\lambda} \rightarrow \lambda$

- Ablesen der Struktur des Metrischen Tensors:

  $$\begin{aligned} g_{11} &= e^{\lambda} & g^{11} &= e^{-\lambda} \\ g_{22} &= r^2 & g^{22} &= \tfrac{1}{r^2} \\ g_{33} &= r^2 \sin^2\vartheta & g^{33} &= \tfrac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \\ g_{44} &= -1 & g^{44} &= -1 \end{aligned}$$

  mit $\lambda(\rho,\, c\tau)$

  $r(\rho,\, c\tau)$

  als 2 Ansatz-Funktionen.

- $\rho = \text{const} \quad , \quad \vartheta = \text{const} \quad , \quad \varphi = \text{const}$

  sind Geodäten, denn die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{2}\left\{e^{\lambda}\dot{\rho}^2 + r^2(\dot{\vartheta}^2 + sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2) - c^2\right\} \tag{VII.6}$$

  liefert folgende Lagrange-Gleichungen (L II):

L II für ϑ :

$$\frac{d}{d\tau}\left\{r^2\,\dot{\vartheta}\right\} - r^2 \sin\vartheta\,\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2 = 0$$

$$\ddot{\vartheta}\,r^2 + 2\,r\,\dot{r}\,\dot{\vartheta} - r^2\sin\vartheta\,\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2 = 0 \tag{VII.7}$$

$\vartheta = \frac{\pi}{2} = \text{const}$ (wie bekannt aus Abschnitt Periheldrehung)

L II für φ :

$$\partial_{\varphi} L = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_{\dot{\varphi}} L = r^2\dot{\varphi} = \text{const}$$

spezielle Wahl : $\dot{\varphi} = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi = \text{const}$

L II für ρ : an der Stelle von L II 1. Integral

$$\left(\tfrac{ds}{d\tau}\right)^2 = -c^2 = e^{\lambda}\,\dot{\rho}^2 - c^2$$

$$\rightarrow \quad \dot{\rho} = 0 \quad \rightarrow \quad \rho = \text{const}$$

q.e.d.

2 Inkohärente Materie als Sternenmaterial

- Sternenmaterial zunächst ideales Fluid

$$T^{mn} = \left(\rho_0 + \frac{P_0}{c^2}\right) u^m u^n + P_0 g^{mn} \tag{VII.8}$$

ρ_0: Ruhemassendichte

P_0: Druck (Eigendruck, im Ruhesystem des jeweiligen Volumenelementes)

$u^i = \dot{\xi}^i = \frac{d\xi^i}{d\tau}$: Vierer-Geschwindigkeit

- Lösung der nichtstationären Einstein-Gleichungen nur für besonders einfache Zustandsgleichung ohne grösseren mathematischen Aufwand:

  Inkohärente Materie mit $P_0 = 0$

- Kollaps ist bei $P_0 = 0$ zwar ohnehin klar,
  trotzdem ist die Situation nicht trivial und hat Modellcharakter für kollabierende Sterne.

- Da für $r_S < \frac{9}{8} r_G$ Materiedruck nicht mehr stabilisierend wirkt, ist das Weglassen des Drucks nicht abwegig.

- Inkohärente Materie heisst dann:

$$T^{mn} = \rho_0 u^m u^n \tag{VII.9}$$

- inkohärente Materie bewegt sich auf Geodäten, denn

(a) $$T^{mn}{}_{||n} = (\rho_0\, u^m\, u^n)_{||n} = 0$$

$$(\rho_0\, u^m\, u^n)_{||n} = \rho_{0\,|n}\, u^n\, u^m + \rho_0\, u^n{}_{||n}\, u^m + \rho_0\, u^n\, u^m{}_{||n}$$

$$= (\rho_{0\,|n}\, u^n + \rho_0\, u^n{}_{||n})\, u^m + \rho_0\, u^n\, u^m{}_{||n} = 0 \qquad \text{(VII.10)}$$

(b) $$u_m\, T^{mn}{}_{||n} = 0$$

$$\rho_{0\,|n}\, u^n \underbrace{u^m\, u_m}_{=-c^2} + \rho_0\, u^n{}_{||n} \underbrace{u^m\, u_m}_{=-c^2} + \rho_0\, u^n \underbrace{u^m{}_{||n}\, u_m}_{=0}$$

$$\rho_{0\,|n}\, u^n + \rho_0\, u^n{}_{||n} = 0 \qquad \text{(VII.11)}$$

Einsetzen von (b) in (a) liefert

$$\rho_0\, u^n\, u^m{}_{||n} = 0 \qquad \text{(VII.12)}$$

$$\rightarrow \qquad u^n\, u^m{}_{||n} = 0 \qquad \text{(VII.13)}$$

$$u^n\, u^m{}_{|n} + u^n\, \Gamma^m_{ni} \cdot u^i = 0 \qquad \text{(VII.14)}$$

$$\dot{u^m} + \Gamma^m_{ni}\, u^n\, u^i = 0 \qquad \text{(Geodäten} - \text{Gleichung)} \qquad \text{(VII.15)}$$

q.e.d.

- Konstruktion von T^{mn} in Gauss-Koordinaten

  $u^m = \frac{d\xi^m}{d\tau}$ der inkohärenten Materie ist $u^m = (0\,,\,0\,,\,0\,,\;\; c)$, da geodätische Bewegung ($d\rho = 0\,,\; d\vartheta = 0\,,\; d\varphi = 0$), d.h. geodätische Bewegung ist in Gauss-Koordinaten ruhend;

  somit ergibt

  $T^{mn} = \rho_0\, u^m\, u^n$

  die Komponenten

  $T^{44} = \rho_0\, c^2 \qquad , \quad T^4{}_4 = -\rho_0\, c^2$

  $T^{ik} = 0 \quad$ für $i \neq 4\,,\; k \neq 4$.

  Dabei gilt für die Ruhemassendichte wegen der Kugelsymmetrie die funktionale Abhängigkeit $\rho_0 = \rho_0\,(\rho, c\tau)$.

- Damit können Einstein-Gleichungen formuliert werden:

$$R^i{}_k - \frac{R}{2}\,\delta^i{}_k = -\varkappa T^i{}_k \tag{VII.16}$$

- Metrischer Tensor

$g_{11} = e^{\lambda}$	$g^{11} = e^{-\lambda}$
$g_{22} = r^2$	$g^{22} = \frac{1}{r^2}$
$g_{33} = r^2 \sin^2\vartheta$	$g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}$
$g_{44} = -1$	$g^{44} = -1$
$g_{ik} = 0 \quad$ sonst	$g^{ik} = 0 \quad$ sonst

- Verwendete Ableitungssymbole

$$\xi^1 = \rho\,, \quad \xi^2 = \vartheta\,, \quad \xi^3 = \varphi\,, \quad \xi^4 = c\tau$$

$$\partial_{\xi^1}(\,) = \partial_\rho(\,) = (\,)'$$

$$\partial_{\xi^4}(\,) = \partial_{c\tau}(\,) = \dot{(\,)}$$

- Christoffel-Symbole

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}\, g^{ij}\,(g_{jk|l} + g_{jl|k} + g_{kl|j}) \tag{VII.17}$$

Γ^1_{ik} :

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\, g^{11}\,(g_{11|1} + g_{11|1} - g_{11|1})$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\, e^{-\lambda}\,(e^\lambda \cdot \lambda') = \frac{\lambda'}{2} \tag{VII.18}$$

$$\Gamma^1_{12} = \frac{1}{2}\, g^{11}\,(g_{11|2} + g_{12|1} - g_{12|1})$$

$$\Gamma^1_{12} = 0 = \Gamma^1_{21} \tag{VII.19}$$

$$\Gamma^1_{13} = 0 = \Gamma^1_{31} \tag{VII.20}$$

$$\Gamma^1_{14} = \frac{1}{2}\, g^{11}\,(g_{11|4} + g_{14|1} - g_{14|1})$$

$$\Gamma^1_{14} = \frac{1}{2}\, e^{-\lambda}\,(e^\lambda \cdot \dot{\lambda}) = \frac{\dot{\lambda}}{2} = \Gamma^1_{41} \tag{VII.21}$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}\, g^{11}\,(g_{12|2} + g_{12|2} - g_{22|1})$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}\, e^{-\lambda}\,(-2\,r\,r') = -\,e^{-\lambda}\,r\,r' \tag{VII.22}$$

$$\Gamma^1_{23} = \frac{1}{2}\, g^{11}\,(g_{12|3} + g_{13|2} - g_{23|1}) = 0 = \Gamma^1_{32} \tag{VII.23}$$

$$\Gamma^1_{24} = \frac{1}{2}\, g^{11}\,(g_{12|4} + g_{14|2} - g_{24|1}) = 0 = \Gamma^1_{42} \tag{VII.24}$$

$$\Gamma^1_{33} = \frac{1}{2}\, g^{11}\,(g_{13|3} + g_{13|3} - g_{33|1})$$

$$\Gamma^1_{33} = \frac{1}{2}\, e^{-\lambda}\,(-2\,r\,r'\sin^2\vartheta) = -e^{-\lambda}\,r\,r'\sin^2\vartheta \tag{VII.25}$$

$$\Gamma^1_{34} = \frac{1}{2}\, g^{11}\,(g_{13|4} + g_{14|3} - g_{34|1}) = 0 = \Gamma^1_{43} \tag{VII.26}$$

$$\Gamma^1_{44} = \frac{1}{2}\, g^{11}\,(g_{14|4} + g_{14|4} - g_{44|1}) = 0 \tag{VII.27}$$

Γ^2_{ik} :

$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2}\,g^{22}\,(g_{21|1} + g_{21|1} - g_{11|2}) = 0 \tag{VII.28}$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}\,g^{22}\,(g_{21|2} + g_{22|1} - g_{12|2})$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{r^2}\,(2\,r\,r') = \frac{r'}{r} = \Gamma^2_{21} \tag{VII.29}$$

$$\Gamma^2_{13} = \frac{1}{2}\,g^{22}\,(g_{21|3} + g_{23|1} - g_{13|2}) = 0 = \Gamma^2_{31} \tag{VII.30}$$

$$\Gamma^2_{14} = \frac{1}{2}\,g^{22}\,(g_{21|4} + g_{24|1} - g_{14|2}) = 0 = \Gamma^2_{41} \tag{VII.31}$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2}\,g^{22}\,(g_{22|2} + g_{22|2} - g_{22|2}) = 0 \tag{VII.32}$$

$$\Gamma^2_{23} = \frac{1}{2}\,g^{22}\,(g_{22|3} + g_{23|2} - g_{23|2}) = 0 = \Gamma^2_{32} \tag{VII.33}$$

$$\Gamma^2_{24} = \frac{1}{2}\,g^{22}\,(g_{22|4} + g_{24|2} - g_{24|2}) \tag{VII.34}$$

$$\Gamma^2_{24} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{r^2}\,(2\,r\,\dot{r}) = \frac{\dot{r}}{r} = \Gamma^2_{42} \tag{VII.35}$$

$$\Gamma^2_{33} = \frac{1}{2}\,g^{22}\,(g_{23|3} + g_{23|3} - g_{33|2})$$

$$\Gamma^2_{33} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{r^2}\,(-2\,r^2\sin\vartheta\cos\vartheta) = -\sin\vartheta\,\cos\vartheta \tag{VII.36}$$

$$\Gamma^2_{34} = \frac{1}{2}\,g^{22}\,(g_{23|4} + g_{24|3} - g_{34|2}) = 0 = \Gamma^2_{43} \tag{VII.37}$$

$$\Gamma^2_{44} = \frac{1}{2}\,g^{22}\,(g_{24|4} + g_{24|4} - g_{44|2}) = 0 \tag{VII.38}$$

Γ^3_{ik} :

$$\Gamma^3_{11} = \frac{1}{2}\,g^{33}\,(g_{31|1} + g_{31|1} - g_{11|3}) = 0 \tag{VII.39}$$

$$\Gamma^3_{12} = \frac{1}{2}\,g^{33}\,(g_{31|2} + g_{32|1} - g_{12|3}) = 0 = \Gamma^2_{21} \tag{VII.40}$$

$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{2}\,g^{33}\,(g_{31|3} + g_{33|1} - g_{13|3})$$

$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{r^2\,\sin^2\vartheta}\,(2\,r\,r'\,\sin^2\vartheta) = \frac{r'}{r} = \Gamma^3_{31} \tag{VII.41}$$

$$\Gamma^3_{14} = \frac{1}{2}\,g^{33}\,(g_{31|4} + g_{34|1} - g_{14|3}) = 0 = \Gamma^3_{41} \tag{VII.42}$$

$$\Gamma^3_{22} = \frac{1}{2}\,g^{33}\,(g_{32|2} + g_{32|2} - g_{22|3}) = 0 \tag{VII.43}$$

$$\Gamma^3_{23} = \frac{1}{2}\,g^{33}\,(g_{32|3} + g_{33|2} - g_{23|3})$$

$$\Gamma^3_{23} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{r^2\,\sin^2\vartheta}\,(2\,r^2\,\sin\vartheta\,\cos\vartheta) = \cot\vartheta = \Gamma^3_{32} \tag{VII.44}$$

$$\Gamma^3_{24} = \frac{1}{2}\,g^{33}\,(g_{32|4} + g_{34|2} - g_{24|3}) = 0 = \Gamma^3_{42} \qquad \text{(VII.45)}$$

$$\Gamma^3_{33} = \frac{1}{2}\,g^{33}\,(g_{33|3} + g_{33|3} - g_{33|3}) = 0 \qquad \text{(VII.46)}$$

$$\Gamma^3_{34} = \frac{1}{2}\,g^{33}\,(g_{33|4} + g_{34|3} - g_{34|3})$$

$$\Gamma^3_{34} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{r^2\,\sin^2\vartheta}\,(2\,r\,\dot{r}\,\sin^2\vartheta) = \frac{\dot{r}}{r} = \Gamma^3_{43} \qquad \text{(VII.47)}$$

$$\Gamma^3_{44} = \frac{1}{2}\,g^{33}\,(g_{34|4} + g_{34|4} - g_{44|3}) = 0 \qquad \text{(VII.48)}$$

Γ^4_{ik} :

$$\Gamma^4_{11} = \frac{1}{2}\,g^{44}\,(g_{41|1} + g_{41|1} - g_{11|4})$$

$$\Gamma^4_{11} = -\frac{1}{2}\,(-\,e^{\lambda}\,\dot{\lambda}) = \frac{\dot{\lambda}}{2}\,e^{\lambda} \qquad \text{(VII.49)}$$

$$\Gamma^4_{12} = \frac{1}{2}\,g^{44}\,(g_{41|2} + g_{42|1} - g_{12|4}) = 0 = \Gamma^4_{21} \qquad \text{(VII.50)}$$

$$\Gamma^4_{13} = \frac{1}{2}\,g^{44}\,(g_{41|3} + g_{43|1} - g_{13|4}) = 0 = \Gamma^4_{31} \qquad \text{(VII.51)}$$

$$\Gamma^4_{14} = \frac{1}{2}\,g^{44}\,(g_{41|4} + g_{44|1} - g_{14|4}) = 0 = \Gamma^4_{41} \qquad \text{(VII.52)}$$

$$\Gamma^4_{22} = \frac{1}{2}\,g^{44}\,(g_{42|2} + g_{42|2} - g_{22|4})$$

$$\Gamma^4_{22} = -\frac{1}{2}\,(-\,2\,r\,\dot{r}) = r\,\dot{r} \qquad \text{(VII.53)}$$

$$\Gamma^4_{23} = \frac{1}{2}\,g^{44}\,(g_{42|3} + g_{43|2} - g_{23|4}) = 0 = \Gamma^4_{32} \qquad \text{(VII.54)}$$

$$\Gamma^4_{24} = \frac{1}{2}\,g^{44}\,(g_{42|4} + g_{44|2} - g_{24|4}) = 0 = \Gamma^4_{42} \qquad \text{(VII.55)}$$

$$\Gamma^4_{33} = \frac{1}{2}\,g^{44}\,(g_{43|3} + g_{43|3} - g_{33|4})$$

$$\Gamma^4_{33} = -\frac{1}{2}\,(-\,2\,r\,\dot{r}\,\sin^2\vartheta) = r\,\dot{r}\,\sin^2\vartheta \qquad \text{(VII.56)}$$

$$\Gamma^4_{34} = \frac{1}{2}\,g^{44}\,(g_{43|4} + g_{44|3} - g_{34|4}) = 0 = \Gamma^4_{43} \qquad \text{(VII.57)}$$

$$\Gamma^4_{44} = \frac{1}{2}\,g^{44}\,(g_{44|4} + g_{44|4} - g_{44|4}) = 0 \qquad \text{(VII.58)}$$

- Zusammenfassung der Christoffel-Symbole

$\Gamma^1_{11} = \frac{\lambda'}{2}$ $\quad \Gamma^1_{14} = \frac{\dot{\lambda}}{2}$ $\quad \Gamma^1_{22} = -e^{-\lambda}\,r\,r'$ $\quad \Gamma^1_{33} = -e^{-\lambda}\,r\,r'\,\sin^2\vartheta$

$\Gamma^2_{12} = \frac{r'}{r}$ $\quad \Gamma^2_{24} = \frac{\dot{r}}{r}$ $\quad \Gamma^2_{33} = -\,\sin\vartheta\,\cos\vartheta$

$\Gamma^3_{13} = \frac{r'}{r}$ $\quad \Gamma^3_{23} = \cot\vartheta$ $\quad \Gamma^3_{34} = \frac{\dot{r}}{r}$

$$\Gamma^4_{11} = \frac{\dot\lambda}{2}\, e^\lambda \qquad \Gamma^4_{22} = \dot r\, r \qquad \Gamma^4_{33} = \dot r\, r\, \sin^2\vartheta$$

Hinzu kommen nichtverschwindende Christoffel-Symbole
wegen der Symmetrie $\Gamma^n_{ik} = \Gamma^n_{ki}$.

Weitere Christoffel-Symbole verschwinden.

- Ricci-Tensor

$$R_{ip} \;=\; R^m_{imp} \;=\; \Gamma^m_{im|p} - \Gamma^m_{ip|m} + \Gamma^r_{im}\,\Gamma^m_{rp} - \Gamma^r_{ip}\,\Gamma^m_{rm} \tag{VII.59}$$

- zunächst werden die Diagonalelemente berechnet, dann die Nicht-Diagonalelemente.

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \Gamma^m_{1m|1} - \Gamma^m_{11|m} + \Gamma^r_{1m}\,\Gamma^m_{r1} - \Gamma^r_{11}\,\Gamma^m_{rm} \\
&= \frac{\lambda''}{2} + 2\left(\frac{r'}{r}\right)' - \frac{\lambda''}{2} - \left(\frac{\dot\lambda}{2}\, e^\lambda\right)^{\cdot} \\
&+ \Gamma^1_{1m}\,\Gamma^m_{11} + \Gamma^2_{1m}\,\Gamma^m_{21} + \Gamma^3_{1m}\,\Gamma^m_{31} + \Gamma^4_{1m}\,\Gamma^m_{41} \\
&- \Gamma^1_{11}\,\Gamma^m_{1m} - \Gamma^2_{11}\,\Gamma^m_{2m} - \Gamma^3_{11}\,\Gamma^m_{3m} - \Gamma^4_{11}\,\Gamma^m_{4m} \qquad \text{(VII.60)} \\
&= 2\,\frac{r''\,r - r'^2}{r^2} - \left(\frac{\ddot\lambda}{2} + \frac{\dot\lambda^2}{2}\right) e^\lambda \\
&+ \left(\frac{\lambda'}{2}\right)^2 + \left(\frac{\dot\lambda}{2}\right)^2 e^\lambda + 2\left(\frac{r'}{r}\right)^2 + \left(\frac{\dot\lambda}{2}\right)^2 e^\lambda \\
&- \left\{\left(\frac{\lambda'}{2}\right)^2 + 2\,\frac{\lambda'}{2}\,\frac{r'}{r} + \left(\frac{\dot\lambda}{2}\right)^2 e^\lambda + 2\,\frac{\dot\lambda}{2}\, e^\lambda \frac{\dot r}{r}\right\} \qquad \text{(VII.61)} \\
R_{11} &= 2\,\frac{r''}{r} - \frac{\ddot\lambda}{2}\, e^\lambda - \frac{\dot\lambda^2}{4}\, e^\lambda - \frac{\lambda'\,r'}{r} - \frac{\dot\lambda\dot r}{r}\, e^\lambda \qquad \text{(VII.62)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_1{}^1 &= g^{11} R_{11} = e^{-\lambda}\, R_{11} \\
&= 2\,\frac{r''}{r}\, e^{-\lambda} - \frac{\ddot\lambda}{2} - \frac{\dot\lambda^2}{4} - \frac{\lambda'\,r'}{r}\, e^{-\lambda} - \frac{\dot\lambda\dot r}{r} \qquad \text{(VII.63)}
\end{aligned}$$

$$R_{22} = \Gamma^m_{2m|2} - \Gamma^m_{22|m} + \Gamma^r_{2m}\,\Gamma^m_{r2} - \Gamma^r_{22}\,\Gamma^m_{rm} \tag{VII.64}$$

$$\begin{aligned} &= \partial_\vartheta \cot\vartheta + \left(r'\,r\,e^{-\lambda}\right)' - (\dot r\, r)^{\cdot} \\ &+ \Gamma^1_{2m}\,\Gamma^m_{12} + \Gamma^2_{2m}\,\Gamma^m_{22} + \Gamma^3_{2m}\,\Gamma^m_{32} + \Gamma^4_{2m}\,\Gamma^m_{42} \\ &- \Gamma^1_{22}\,\Gamma^m_{1m} - \Gamma^2_{22}\,\Gamma^m_{2m} - \Gamma^3_{22}\,\Gamma^m_{3m} - \Gamma^4_{22}\,\Gamma^m_{4m} \end{aligned} \tag{VII.65}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta}{\sin^2\vartheta} + r'' r e^{-\lambda} + r'^2 e^{-\lambda} - r'\lambda' r e^{-\lambda} - \ddot r r - \dot r^2 \\ &+ \frac{r'}{r}\left(-r' r e^{-\lambda}\right) + \frac{\dot r}{r}\dot r r + \left(-r' r e^{-\lambda}\right)\frac{r'}{r} + \cot^2\vartheta + \dot r r\frac{\dot r}{r} \\ &- \left\{-r' r e^{-\lambda}\frac{\lambda'}{2} - 2r' r e^{-\lambda}\frac{r'}{r} + \dot r r\cdot\frac{\dot\lambda}{2} + 2\dot r r\frac{\dot r}{r}\right\} \end{aligned} \tag{VII.66}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{\sin^2\vartheta} + r'' r e^{-\lambda} + r'^2 e^{-\lambda} - \frac{\lambda' r' r}{2}e^{-\lambda} - \ddot r r - \dot r^2 \\ &\quad + \cot^2\vartheta - \frac{\dot\lambda \dot r r}{2} \end{aligned} \tag{VII.67}$$

$$R_{22} = -1 - \ddot r r - \dot r^2 - \frac{\dot\lambda \dot r r}{2} + r'' r e^{-\lambda} - \frac{\lambda' r' r}{2}e^{-\lambda} + r'^2 e^{-\lambda} \tag{VII.68}$$

$$\begin{aligned} {R_2}^2 &= g^{22} R_{22} = \frac{1}{r^2} R_{22} \\ &= \frac{-1}{r^2} - \frac{\ddot r}{r} - \frac{\dot r^2}{r^2} - \frac{\dot\lambda \dot r}{2r} + \frac{r''}{r}e^{-\lambda} - \frac{\lambda' r'}{2r}e^{-\lambda} + \frac{r'^2}{r^2}e^{-\lambda} \end{aligned} \tag{VII.69}$$

$$R_{33} = \Gamma^m_{3m|3} - \Gamma^m_{33|m} + \Gamma^r_{3m}\Gamma^m_{r3} - \Gamma^r_{33}\Gamma^m_{rm} \tag{VII.70}$$

$$\begin{aligned} &= 0 + \left(r're^{-\lambda}\sin^2\vartheta\right)' + \partial_\vartheta(\sin\vartheta\cos\vartheta) - (\dot{r}r\sin^2\vartheta)^{\cdot} \\ &+ \Gamma^1_{3m}\Gamma^m_{13} + \Gamma^2_{3m}\Gamma^m_{23} + \Gamma^3_{3m}\Gamma^m_{33} + \Gamma^4_{3m}\Gamma^m_{43} \\ &- \Gamma^1_{33}\Gamma^m_{1m} - \Gamma^2_{33}\Gamma^m_{2m} - \Gamma^3_{33}\Gamma^m_{3m} - \Gamma^4_{33}\Gamma^m_{4m} \end{aligned} \tag{VII.71}$$

$$\begin{aligned} &= r''re^{-\lambda}\sin^2\vartheta + r'^2e^{-\lambda}\sin^2\vartheta - \lambda'r're^{-\lambda}\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta \\ &- \sin^2\vartheta - \ddot{r}r\sin^2\vartheta - \dot{r}^2\sin^2\vartheta \\ &+ \left(-r're^{-\lambda}\sin^2\vartheta\right)\frac{r'}{r} - \sin\vartheta\cos\vartheta\cot\vartheta + \frac{r'}{r}\left(-r're^{-\lambda}\sin^2\vartheta\right) \\ &- \cot\vartheta\sin\vartheta\cos\vartheta + \frac{\dot{r}}{r}\dot{r}r\sin^2\vartheta + \dot{r}r\sin^2\vartheta\frac{\dot{r}}{r} \\ &- \left(-e^{-\lambda}r'r\sin^2\vartheta\cdot\frac{\lambda'}{2} - 2r're^{-\lambda}\sin^2\vartheta\frac{r'}{r} - \sin\vartheta\cos\vartheta\cot\vartheta\right. \\ &+ \left.\dot{r}r\sin^2\vartheta\left(\frac{\dot{\lambda}}{2} + 2\frac{\dot{r}}{r}\right)\right) \end{aligned} \tag{VII.72}$$

$$\begin{aligned} &= r''re^{-\lambda}\sin^2\vartheta + r'^2e^{-\lambda}\sin^2\vartheta - \lambda'r're^{-\lambda}\sin^2\vartheta \\ &+ \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta - \cos^2\vartheta + \cos^2\vartheta \\ &- \ddot{r}r\sin^2\vartheta - \dot{r}^2\sin^2\vartheta + \frac{\lambda'r'r}{2}e^{-\lambda}\sin^2\vartheta - \frac{\dot{\lambda}\dot{r}r}{2}\sin^2\vartheta \end{aligned} \tag{VII.73}$$

$$\begin{aligned} R_{33} &= r''re^{-\lambda}\sin^2\vartheta + r'^2e^{-\lambda}\sin^2\vartheta - \frac{\lambda'r'r}{2}e^{-\lambda}\sin^2\vartheta \\ &- \ddot{r}r\sin^2\vartheta - \dot{r}^2\sin^2\vartheta - \frac{\dot{\lambda}\dot{r}r}{2}\sin^2\vartheta - \sin^2\vartheta \end{aligned} \tag{VII.74}$$

$$\begin{aligned} R_3{}^3 &= g^{33}R_{33} = \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}R_{33} \\ &= -\frac{1}{r^2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{r}}{2r} - \frac{\dot{r}^2}{r^2} - \frac{\ddot{r}}{r} + \frac{r''}{r}e^{-\lambda} + \frac{r'^2}{r^2}e^{-\lambda} - \frac{\lambda'r'}{2r}e^{-\lambda} \end{aligned} \tag{VII.75}$$

$$
\begin{aligned}
R_{44} &= \Gamma^m_{4m|4} - \Gamma^m_{44|m} + \Gamma^r_{4m}\,\Gamma^m_{r4} - \Gamma^r_{44}\,\Gamma^m_{rm} \\
&= \frac{\ddot{\lambda}}{2} + 2\left(\frac{\dot{r}}{r}\right)^{\cdot} \\
&+ \Gamma^1_{4m}\,\Gamma^m_{14} + \Gamma^2_{4m}\,\Gamma^m_{24} + \Gamma^3_{4m}\,\Gamma^m_{34} + \Gamma^4_{4m}\,\Gamma^m_{44} - 0 \\
&= \frac{\ddot{\lambda}}{2} + 2\,\frac{\ddot{r}r - \dot{r}^2}{r^2} + \left(\frac{\dot{\lambda}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\dot{r}}{r}\right) \qquad \text{(VII.76)}
\end{aligned}
$$

$$
R_{44} = \frac{\ddot{\lambda}}{2} + 2\,\frac{\ddot{r}}{r} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \qquad \text{(VII.77)}
$$

$$
R_4{}^4 = g^{44}R_{44} = -\frac{\ddot{\lambda}}{2} - 2\,\frac{\ddot{r}}{r} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \qquad \text{(VII.78)}
$$

$$R_{12} = \Gamma^m_{1m|2} - \Gamma^m_{12|m} + \Gamma^r_{1m}\,\Gamma^m_{r2} - \Gamma^r_{12}\,\Gamma^m_{rm}$$

$$\begin{aligned} R_{12} &= 0 - 0 \\ &+ \Gamma^1_{1m}\,\Gamma^m_{12} + \Gamma^2_{1m}\,\Gamma^m_{22} + \Gamma^3_{1m}\,\Gamma^m_{32} + \Gamma^4_{1m}\,\Gamma^m_{42} \\ &- \Gamma^1_{12}\,\Gamma^m_{1m} - \Gamma^2_{12}\,\Gamma^m_{2m} - \Gamma^3_{12}\,\Gamma^m_{3m} - \Gamma^4_{12}\,\Gamma^m_{4m} \end{aligned} \tag{VII.79}$$

$$\begin{aligned} &= 0 - 0 + \frac{r'}{r}\cot\vartheta + 0 \\ &- \left\{ 0 + \frac{r'}{r}\cot\vartheta + 0 + 0 \right\} = 0 \end{aligned} \tag{VII.80}$$

$$R_{13} = \Gamma^m_{1m|3} - \Gamma^m_{13|m} + \Gamma^r_{1m}\,\Gamma^m_{r3} - \Gamma^r_{13}\,\Gamma^m_{rm}$$

$$\begin{aligned} R_{13} &= 0 - 0 \\ &+ \Gamma^1_{1m}\,\Gamma^m_{13} + \Gamma^2_{1m}\,\Gamma^m_{23} + \Gamma^3_{1m}\,\Gamma^m_{33} + \Gamma^4_{1m}\,\Gamma^m_{43} \\ &- \Gamma^1_{13}\,\Gamma^m_{1m} - \Gamma^2_{13}\,\Gamma^m_{2m} - \Gamma^3_{13}\,\Gamma^m_{3m} - \Gamma^4_{13}\,\Gamma^m_{4m} \end{aligned} \tag{VII.81}$$

$$\begin{aligned} &= 0 - 0 + 0 + 0 \\ &- \{ 0 + 0 + 0 + 0\} = 0 \end{aligned} \tag{VII.82}$$

$$R_{14} = \Gamma^m_{1m|4} - \Gamma^m_{14|m} + \Gamma^r_{1m}\,\Gamma^m_{r4} - \Gamma^r_{14}\,\Gamma^m_{rm} \tag{VII.83}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\dot\lambda'}{2} + 2\left(\frac{r'}{r}\right)^{\cdot} - \frac{\dot\lambda'}{2} \\ &+ \Gamma^1_{1m}\,\Gamma^m_{14} + \Gamma^2_{1m}\,\Gamma^m_{24} + \Gamma^3_{1m}\,\Gamma^m_{34} + \Gamma^4_{1m}\,\Gamma^m_{44} \\ &+ \left\{\Gamma^1_{14}\,\Gamma^m_{1m} + 0\right\} \end{aligned} \tag{VII.84}$$

$$= \frac{\dot\lambda'}{2} + 2\left(\frac{r'}{r}\right)^{\cdot} - \frac{\dot\lambda'}{2} + \left\{\frac{\lambda'}{2}\frac{\dot\lambda}{2} + 2\frac{r'}{r}\frac{\dot r}{r}\right\} - \left\{\frac{\lambda'}{2}\frac{\dot\lambda}{2} + 2\frac{r'}{r}\frac{\dot\lambda}{2}\right\} \tag{VII.85}$$

$$R_{14} = \frac{\dot\lambda'}{2} + 2\left(\frac{r'}{r}\right)^{\cdot} - \frac{\dot\lambda'}{2} + 2\,\frac{r'\dot r}{r^2} - \frac{\dot\lambda r'}{r} \tag{VII.86}$$

$$\begin{aligned} R_{14} &= 2\frac{\dot{r'}r - r'\dot r}{r^2} + 2\frac{r'\dot r}{r^2} - \frac{\dot\lambda r'}{r} \\ R_{14} &= 2\frac{\dot{r'}}{r} - \frac{\dot\lambda r'}{r} \end{aligned} \tag{VII.87}$$

$$R_{23} = \Gamma^m_{2m|3} - \Gamma^m_{23|m} + \Gamma^r_{2m}\,\Gamma^m_{r3} - \Gamma^r_{23}\,\Gamma^m_{rm} \tag{VII.88}$$

$$\begin{aligned} &= \quad 0 \quad - \quad 0 = 0 \\ &+ \quad \Gamma^1_{2m}\,\Gamma^m_{13} + \Gamma^2_{2m}\,\Gamma^m_{23} + \Gamma^3_{2m}\,\Gamma^m_{33} + \Gamma^4_{2m}\,\Gamma^m_{43} \\ &- \quad \Gamma^1_{23}\,\Gamma^m_{1m} - \Gamma^2_{23}\,\Gamma^m_{2m} - \Gamma^3_{23}\,\Gamma^m_{3m} - \Gamma^4_{23}\,\Gamma^m_{4m} \end{aligned} \tag{VII.89}$$

$$R_{23} = \quad 0 - \{ \quad \cot\vartheta \cdot 0 + \quad 0\} = 0 \tag{VII.90}$$

$$R_{24} = \Gamma^m_{2m|4} - \Gamma^m_{24|m} + \Gamma^r_{2m}\,\Gamma^m_{r4} - \Gamma^r_{24}\,\Gamma^m_{rm} \tag{VII.91}$$

$$\begin{aligned} &= \quad 0 \quad - \quad 0 \\ &+ \quad \Gamma^1_{2m}\,\Gamma^m_{14} + \Gamma^2_{2m}\,\Gamma^m_{24} + \Gamma^3_{2m}\,\Gamma^m_{34} + \Gamma^4_{2m}\,\Gamma^m_{44} \\ &- \quad \Gamma^1_{24}\,\Gamma^m_{1m} - \Gamma^2_{24}\,\Gamma^m_{2m} - \Gamma^3_{24}\,\Gamma^m_{3m} - \Gamma^4_{24}\,\Gamma^m_{4m} \end{aligned} \tag{VII.92}$$

$$\begin{aligned} R_{24} &= \quad \cot\vartheta\frac{\dot r}{r} \\ &- \quad \left\{ \quad 0 + \frac{\dot r}{r}\cot\vartheta \right\} \quad = \quad 0 \end{aligned} \tag{VII.93}$$

$$R_{34} = \Gamma^m_{3m|4} - \Gamma^m_{34|m} + \Gamma^r_{3m}\,\Gamma^m_{r4} - \Gamma^r_{34}\,\Gamma^m_{rm} \tag{VII.94}$$

$$\begin{aligned} &= \quad 0 \quad - \quad 0 + \Gamma^1_{3m}\,\Gamma^m_{14} + \Gamma^2_{3m}\,\Gamma^m_{24} + \Gamma^3_{3m}\,\Gamma^m_{34} + \Gamma^4_{3m}\,\Gamma^m_{44} \\ &- \quad \Gamma^1_{34}\,\Gamma^m_{1m} - \Gamma^2_{34}\,\Gamma^m_{2m} - \Gamma^3_{34}\,\Gamma^m_{3m} - \Gamma^4_{34}\,\Gamma^m_{4m} \end{aligned} \tag{VII.95}$$

$$R_{34} = \quad 0 - \left\{ \frac{\dot r}{r} \cdot 0 + 0 \right\} \quad = \quad 0 \tag{VII.96}$$

(VII.97)

- Zusammenfassung des Ricci-Tensors

$$R_1{}^1 = 2\frac{r''}{r}e^{-\lambda} - \frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\lambda' r'}{r}e^{-\lambda} - \frac{\dot{\lambda}\dot{r}}{r} \tag{VII.98}$$

$$R_2{}^2 = \frac{-1}{r^2} - \frac{\ddot{r}}{r} - \frac{\dot{r}^2}{r^2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{r}}{2r} + \frac{r''}{r}e^{-\lambda} - \frac{\lambda' r'}{2r}e^{-\lambda} + \frac{r'^2}{r^2}e^{-\lambda} \tag{VII.99}$$

$$R_3{}^3 = -\frac{1}{r^2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{r}}{2r} - \frac{\dot{r}^2}{r^2} - \frac{\ddot{r}}{r} + \frac{r''}{r}e^{-\lambda} + \frac{r'^2}{r^2}e^{-\lambda} - \frac{\lambda' r'}{2r}e^{-\lambda} \tag{VII.100}$$

$$R_4{}^4 = -\frac{\ddot{\lambda}}{2} - 2\frac{\ddot{r}}{r} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \tag{VII.101}$$

$$R_{14} = 2\frac{\dot{r}'}{r} - \frac{\dot{\lambda} r'}{r} \tag{VII.102}$$

$$R_{ik} = 0 \qquad \text{sonst} \tag{VII.103}$$

- Krümmungsskalar

$$
\begin{aligned}
R &= R_1{}^1 && + R_2{}^2 && + R_3{}^3 && + R_4{}^4 \\
R &= 2\frac{r''}{r}e^{-\lambda} && + \frac{r''}{r}e^{-\lambda} && + \frac{r''}{r}e^{-\lambda} && \\
&- \frac{r'\lambda'}{r}e^{-\lambda} && - \frac{r'\lambda'}{2r}e^{-\lambda} && - \frac{r'\lambda'}{2r}e^{-\lambda} && \\
& && + \frac{r'^2}{r^2}e^{-\lambda} && + \frac{r'^2}{r^2}e^{-\lambda} && \\
&- \frac{\ddot{\lambda}}{2} && && && - \frac{\ddot{\lambda}}{2} \\
&- \frac{\dot{\lambda}^2}{4} && && && - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \\
&- \frac{\dot{\lambda}\dot{r}}{r} && - \frac{\dot{\lambda}\dot{r}}{2r} && - \frac{\dot{\lambda}\dot{r}}{2r} && \\
& && - \frac{\ddot{r}}{r} && - \frac{\ddot{r}}{r} && - 2\frac{\ddot{r}}{r} \\
& && - \frac{\dot{r}^2}{r^2} && - \frac{\dot{r}^2}{r^2} && \\
& && - \frac{1}{r^2} && - \frac{1}{r^2} &&
\end{aligned}
$$

$$
R = 4\frac{r''}{r}e^{-\lambda} - 2\frac{r'\lambda'}{r} + 2\frac{r'^2}{r^2}e^{-\lambda} - \ddot{\lambda} - \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - 2\frac{\dot{\lambda}\dot{r}}{r} - 4\frac{\ddot{r}}{r} - 2\frac{\dot{r}^2}{r^2} - \frac{2}{r^2} \qquad \text{(VII.104)}
$$

- Feldgleichungen

$$R_1{}^1 - \frac{R}{2} = -\frac{r'^2}{r^2}e^{-\lambda} + 2\frac{\ddot{r}}{r} + \frac{\dot{r}^2}{r^2} + \frac{1}{r^2} = 0 \tag{VII.105}$$

$$R_2{}^2 - \frac{R}{2} = -\frac{r''}{r}e^{-\lambda} + \frac{r'\lambda'}{2r}e^{-\lambda} + \frac{\ddot{r}}{r} + \frac{\dot{\lambda}\dot{r}}{2r} + \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} = 0 \tag{VII.106}$$

$$R_3{}^3 - \frac{R}{2} = -\frac{r''}{r}e^{-\lambda} + \frac{r'\lambda'}{2r}e^{-\lambda} + \frac{\ddot{r}}{r} + \frac{\dot{\lambda}\dot{r}}{2r} + \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} = 0 \tag{VII.107}$$

$$\left(\text{identisch mit } R_2{}^2 - \frac{R}{2} = 0\right)$$

$$R_4{}^4 - \frac{R}{2} = -2\frac{r''}{r}e^{-\lambda} + \frac{r'\lambda'}{r}e^{-\lambda} - \frac{r'^2}{r^2}e^{-\lambda} + \frac{\dot{\lambda}\dot{r}}{r} + \frac{\dot{r}^2}{r^2} + \frac{1}{r} \tag{VII.108}$$

$$= -\varkappa T_4{}^4 = -\varkappa(-c^2\rho_0) = \varkappa c^2 \rho_0 \tag{VII.109}$$

$$R_{14} = 2\frac{\dot{r}'}{r} - \frac{\dot{\lambda}r'}{r} = 0 \tag{VII.110}$$

- Abhängigkeit der Feldgleichungen untereinander:
Die zunächst gewonnenen 4 Feldgleichungen (11 , 22 , 44 , 14) bestimmen die 3 Funktionen $r(\rho, c\tau)$, $\lambda(\rho, c\tau)$, $\rho_0(\rho, c\tau)$. Sie können damit nicht unabhängig voneinander sein. Da in (44) die Massendichte mit eingeht, sind von den verbleibenden 3 Gleichungen (11, 22, 14) nur 2 tatsächlichunabhängig. Deren Abhängigkeit ergibt sich wie folgt:

$$(\ 14\ ):\quad \left.\begin{array}{l} \dot{\lambda} = 2\frac{\dot{r}'}{r'} \\ \ddot{\lambda} = 2\frac{\ddot{r}'r' - \dot{r}'^2}{r'^2} \end{array}\right\} \quad \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} = \frac{\ddot{r}'}{r'} \quad \text{in}\,(22)$$

$$(\ 22\ ):\quad -\frac{r''}{r}e^{-\lambda} + \frac{r'\lambda'}{2r}e^{-\lambda} + \frac{\ddot{r}}{r} + \frac{\dot{r}'\dot{r}}{r'r} + \frac{\ddot{r}'}{r'} = 0 \qquad \Big| \cdot 2\,r'\,r$$
$$-2r''r'e^{-\lambda} + r'^2\lambda'e^{-\lambda} + 2\ddot{r}r' + 2\dot{r}'\dot{r} + 2\ddot{r}'r = 0$$

$$(\ 11\ ):\quad -r'^2e^{-\lambda} + 2\ddot{r}r + \dot{r}^2 + 1 = 0 \qquad \Big| (\ )'$$
$$-2r''r'e^{-\lambda} + r'^2\lambda'e^{-\lambda} + 2\ddot{r}r' + 2\dot{r}'\dot{r} + 2\ddot{r}'r = 0$$

$\rightsquigarrow$ differenzierte Gleichung (11) stimmt mit (22) überein!

- erste Integrale der Feldgleichungen

$$(14): \quad \dot{\lambda} = \frac{2\dot{r'}}{r'} = \frac{\left(r'^2\right)^{\cdot}}{r'^2} = \frac{2r'\dot{r'}}{r'^2} = \frac{2\dot{r'}}{r'} \tag{VII.111}$$

$$\frac{d\lambda}{dc\tau} = \frac{1}{r'^2}\frac{dr'^2}{dc\tau} \quad \Big| \; \lambda(\rho, c\tau)\,,\; r(\rho, c\tau) \quad \text{wobei hier } \rho \text{ nur wie Parameter wirkt} \tag{VII.112}$$

$$\lambda - \lambda_0 = \ln r'^2 - \ln {r_0'}^2 = \ln \frac{r'^2}{{r_0'}^2} \quad \text{wobei } \lambda_0(\rho), {r'_0}^2(\rho) \tag{VII.113}$$

$$\frac{r'^2}{{r_0'}^2} = e^{\lambda - \lambda_0} \tag{VII.114}$$

$$e^{\lambda} = e^{\lambda_0}\frac{r'^2}{{r_0'}^2} = \frac{r'^2}{{r_0'}^2 e^{-\lambda_0}} \quad \text{wobei Nenner Funktion von } \rho \tag{VII.115}$$

Umschrift der "Integrationskonstanten":

$${r_0'}^2(\rho)e^{-\lambda_0(\rho)} =: 1 - \epsilon f^2(\rho) \tag{VII.116}$$

$$e^{\lambda} = \frac{r'^2}{1 - \epsilon f^2(\rho)} \tag{VII.117}$$

$\epsilon = 0, \pm 1$,
$f(\rho)$ beliebig,
allerdings muss gesamter Term nicht negativ sein, so dass für $\epsilon = +1$ gelten muss $f^2 \leq 1$.

Einsetzen von $e^{\lambda} = \frac{r'^2}{1-\epsilon f^2(\rho)}$ in

$$(11): \qquad -\frac{1-\epsilon f^2}{r^2} + 2\frac{\ddot{r}}{r} + \frac{\dot{r}^2}{r^2} + \frac{1}{r^2} = 0 \tag{VII.118}$$

$$2\ddot{r}r + \dot{r}^2 = -\epsilon f^2 \tag{VII.119}$$

Substitution: $u = \dot{r}^2 \quad \dot{u} = 2\dot{r}\ddot{r}$,
mit der Logik: $r = r(\rho, c\tau) \rightsquigarrow c\tau = c\tau(\rho, r) \overset{\text{Trafo}}{\longrightarrow} u(\rho, c\tau)$

$$\frac{d(ru)}{dr} = u + r\frac{du}{dr} = \dot{r}^2 + r\frac{du}{dc\tau}\frac{dc\tau}{dr} \tag{VII.120}$$

$$= \dot{r}^2 + r\frac{\dot{u}}{\dot{r}} = \dot{r}^2 + r\frac{2\dot{r}\ddot{r}}{\dot{r}} = -\epsilon f^2 \tag{VII.121}$$

$$\frac{d(ru)}{dr} = -\epsilon f(\rho)^2 \tag{VII.122}$$

$$ru = -\epsilon f(\rho)^2 r + F(\rho) \tag{VII.123}$$

$$u(\rho, r) = -\epsilon f(\rho)^2 + \frac{F(\rho)}{r} = \dot{r}^2 \tag{VII.124}$$

$$\rightsquigarrow -\epsilon f(\rho)^2 = \dot{r}^2 - \frac{F(\rho)}{r} \tag{VII.125}$$

$$\text{man liest ab} \quad : \quad F(\rho) = -2\ddot{r}r^2 \tag{VII.126}$$

- Vorbereitend wird gebildet

$$F' = = -2\ddot{r}'r^2 - 4\ddot{r}r'r \tag{VII.127}$$

$$\frac{F'}{r'r^2} = -2\frac{\ddot{r}'}{r'} - 4\frac{\ddot{r}}{r} \tag{VII.128}$$

- (44) - 2 · (22)

$$\underbrace{-\frac{r'^2}{r^2}e^{-\lambda} + \frac{\dot{r}^2}{r^2} + \frac{1}{r^2}}_{\overset{(11)}{=} -2\frac{\ddot{r}}{r}} - 2\frac{\ddot{r}}{r} - 2\underbrace{\left(\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4}\right)}_{\overset{(14)}{=}\frac{\ddot{r}'}{r'}} = \varkappa c^2\rho_0 \tag{VII.129}$$

$$-4\frac{\ddot{r}}{r} - 2\frac{\ddot{r}'}{r'} = \varkappa c^2\rho_0 \tag{VII.130}$$

$$\rightsquigarrow \frac{F'}{r'r^2} = \varkappa c^2\rho_0 \tag{VII.131}$$

- Verbleibende Dgln für $r(\rho, \mathrm{c}\tau)$ somit

$$\dot{r}^2 - \frac{F(\rho)}{r} = -\epsilon f^2(\rho) \tag{VII.132}$$

$$r'r^2 = \frac{\varkappa c^2\rho_0}{F'(\rho)} \tag{VII.133}$$

- Integration der Dgln für $r(\rho, c\tau)$

$$\dot{r}^2 - \frac{F(\rho)}{r} = -\epsilon f^2(\rho)$$

ρ spielt nur die Rolle eines Parameters

Fallunterscheidung:

$$\epsilon = 0: \qquad r^{\frac{1}{2}}\, dr = \pm F^{\frac{1}{2}}\, dc\tau \tag{VII.134}$$

$$\frac{2}{3}\, r^{\frac{3}{2}} = \pm F^{\frac{1}{2}}\, \{c\tau - c\tau_0(\rho)\} \tag{VII.135}$$

$$\epsilon \neq 0: \quad \text{Variablentransformation} \quad c\tau \rightarrow T\,, \quad dT = \pm \frac{f}{r}\, dc\tau$$

$$\frac{\partial r}{\partial T} = \frac{\partial r}{\partial c\tau} \cdot \frac{dct}{dT} = \pm \dot{r} \frac{r}{f} \tag{VII.136}$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial T}\right)^2 \frac{f^2}{r^2} - \frac{F}{r} = -\epsilon f^2 \tag{VII.137}$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial T}\right)^2 = \frac{F \cdot r}{f^2} - \epsilon r^2 \tag{VII.138}$$

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{F}{f^2}\, r - \epsilon r^2}} = \overset{+}{(-)}\; dT \qquad \Big| \; T \overset{!}{\geq} 0 \tag{VII.139}$$

$$\epsilon = +1: \qquad \int \frac{dr}{\sqrt{-r^2 + \frac{F}{f^2} r}} = \int dT$$

$$= -\arcsin \frac{-2r + \frac{F}{f^2}}{\frac{F}{f^2}} \qquad \text{(Bronstein Nr. 241)}$$

$$= (T + T_0) \tag{VII.140}$$

$$\rightsquigarrow \quad -\frac{2f^2}{F} \cdot r + 1 = -\sin(T + T_0) \tag{VII.141}$$

$$r = \frac{F}{2f^2} \{1 + \sin(T + T_0)\} \tag{VII.142}$$

Wahl der Integrationskonstanten

$$r = 0 \text{ bei } T = 0 \quad \longrightarrow \quad T_0 = -\tfrac{\pi}{2}$$

$$r = \frac{F}{2f^2}\{1 - \cos T\} \tag{VII.143}$$

$$dc\tau = \pm\frac{r}{f}dT = \pm\frac{F}{2f^3}(1 - \cos T)dT \tag{VII.144}$$

$$c\tau - c\tau_0(\rho) = \pm\frac{F}{2f^3}(T - \sin T) \tag{VII.145}$$

$$\epsilon = -1: \qquad \int \frac{dr}{\sqrt{r^2 + \frac{F}{f^2}r}} = \int dT \tag{VII.146}$$

$$= \int \frac{dr}{\sqrt{\left(r + \frac{F}{2f^2}\right)^2 - \left(\frac{F}{2f^2}\right)^2}} \tag{VII.147}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{arch}\frac{x}{a} + \text{const} \tag{VII.148}$$

$$= \operatorname{arch}\frac{r + \frac{F}{2f^2}}{\frac{F}{2f^2}} = T + T_0 \tag{VII.149}$$

$$\rightsquigarrow r = -\frac{F}{2f^2} + \frac{F}{2f^2}\operatorname{ch}(T + T_0) \tag{VII.150}$$

Wahl der Integrationskonstanten

$$r = 0 \text{ bei } T = 0 \quad \rightarrow \quad T_0 = 0$$

$$r = \frac{F}{2f^2}(\operatorname{ch}T - 1) \tag{VII.151}$$

$$dc\tau = \pm\frac{r}{f}dT = \pm\frac{F}{2f^3}(\operatorname{ch}T - 1)dT \tag{VII.152}$$

$$c\tau - c\tau_0(\rho) = \pm\frac{F}{2f^3}(\operatorname{sh}T - T) \tag{VII.153}$$

- Zusammenstellung der Lösung
(Tolman-Lösung, 1934)

$$\epsilon = 0 \quad : \qquad r(\rho, c\tau) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} F^{\frac{1}{3}}(\rho)\left\{\pm c\tau \mp c\tau_0(\rho)\right\}^{\frac{2}{3}} \tag{VII.154}$$

$$\epsilon = 1 \quad : \qquad r(\rho, c\tau) = \frac{F(\rho)}{2f^2(\rho)}\left\{1 - \cos T\right\} \tag{VII.155}$$

$$c\tau - c\tau_0(\rho) = \pm\frac{F(\rho)}{2f^3(\rho)}\left\{T - \sin T\right\} \tag{VII.156}$$

$$\epsilon = -1 \quad : \qquad r(\rho, c\tau) = \frac{F(\rho)}{2f^2(\rho)}\left\{\mathrm{ch}T - 1\right\} \tag{VII.157}$$

$$c\tau - c\tau_0(\rho) = \pm\frac{F(\rho)}{2f^3(\rho)}\left\{\mathrm{sh}T - T\right\} \tag{VII.158}$$

$$\epsilon = 0, \pm 1 \quad : \qquad e^{\lambda(\rho, c\tau)} = \frac{r'^2}{1 - \epsilon f^2(\rho)} \tag{VII.159}$$

$$\rightsquigarrow ds^2 \;=\; r'^2\frac{d\rho^2}{1 - \epsilon f^2(\rho)} + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right) - dc\tau^2 \tag{VII.160}$$

wobei $\qquad \varkappa c^2\rho_0(\rho, c\tau) = \frac{F'}{r'r^2}$

- Tolmann-Lösung enthält 3 freie Parameter : $F(\rho)\,,\ f(\rho)\,,\ \tau_0(\rho)$

- I. A. nicht möglich $\rho_0(\rho, c\tau)$ vorzugeben und $F\,,\ f\,,\ T_0$ zu bestimmen, aber durch geeignete Wahl von $F(\rho)\,,\ f(\rho)\,,\ \tau_0(\rho)$ können sinnvolle Massenverteilungen konstruiert werden.

3 Kollabierender Stern mit räumlich konstanter Dichte

Anwendung der Tolman-Lösung auf endlichen Stern mit der Sternoberfläche ρ_S und ortsunabhängiger Massendichte im Sterninneren, also $\rho = \rho(c\tau)$ für $\rho \leq \rho_S$.

- Aussenraum $\rho > \rho_S \quad : \quad \rho_0 = 0$
  Wegen des Birkhoff-Satzes muss Lösung mit der äußeren Schwarzschildlösung übereinstimmen.
  In bewegten Koordinaten ruht die Sternoberfläche ($\rho = \rho_S$); in den üblichen Schwarzschild-Koordinaten bewegt sich die Sternenoberfläche. In den beiden Fällen erfolgt die Bewegung eines Teilchens auf der Oberfläche entlang einer radialen Geodäten.

  Schwarzschild-Metrik (IV.97) & $\varphi = const$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 &= \left(1 - \frac{r_G}{r}\right)^2 \left(\frac{dct}{d\tau}\right)^2 + c^2\,\frac{r_G}{r} - c^2 \\ \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 &= A^2 - c^2 + c^2\,\frac{r_G}{r} \end{aligned} \tag{VII.161}$$

  Tolman-Metrik (VII.132):

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 &= -\epsilon f^2(\rho) + \frac{F(\rho)}{r} \\ \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 &= -\epsilon\, c^2 f^2(\rho) + \frac{c^2\, F(\rho)}{r} \end{aligned} \tag{VII.162}$$

  Für $\rho \geq \rho_S$ müssen beide Gleichungen für beliebige τ übereinstimmen; d. h.

$$F = r_G = 2\,M = \text{const} \tag{VII.163}$$

$$\epsilon f^2 = 1 - \frac{A^2}{c^2} = \text{const.} \quad \rightsquigarrow f = \text{const} \tag{VII.164}$$

  Für $\tau_0(\rho)$ wählen wir

$$\tau_0 = 0 \tag{VII.165}$$

  und legen damit einen Zeitnullpunkt fest.

- Innenraum $\rho \leq \rho_S$ & $\rho_0 = \rho_0(c\tau)$

Ansatz : $r(\rho, c\tau) = \kappa(c\tau)\,\rho$

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow \qquad F' &= r' r^2 \varkappa c^2 \rho_0 && \text{(VII.166)}\\
F' &= \varkappa c^2 \kappa^3 \rho_0 \rho^2 && \text{(VII.167)}\\
F(\rho) &= \frac{\varkappa c^2}{3} \rho_0 \kappa^3 \rho^3 && \text{(VII.168)}\\
F(\rho) &= \frac{\varkappa M}{3} \rho^3 && \text{(VII.169)}
\end{aligned}$$

mit $M = c^2\,\rho_0(c\tau)\,\kappa^3(c\tau) = \text{const}$

Weiterhin folgt

$$\begin{aligned}
f &\propto \rho && \text{(VII.170)}\\
\tau_0 &= 0 && \text{(VII.171)}
\end{aligned}$$

Wir setzen

$$f = \rho\,, \qquad \text{(VII.172)}$$

da der Proportionalitätsfaktor in $\kappa(c\tau)$ hineingezogen werden kann.
Einsetzen in $r(\rho, c\tau)$ liefert

$\epsilon = 0$:

$$\begin{aligned}
r(\rho, c\tau) &= \kappa\rho = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\varkappa M}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \rho \left\{\pm c\tau\right\}^{\frac{2}{3}} && \text{(VII.173)}\\
\rightsquigarrow \kappa(c\tau) &= \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\varkappa M}{3}\right)^{\frac{1}{3}} (\pm c\tau)^{\frac{2}{3}} && \text{(VII.174)}\\
\kappa(c\tau) &= \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} (\varkappa M)^{\frac{1}{3}} (\pm c\tau)^{\frac{2}{3}} && \text{(VII.175)}
\end{aligned}$$

$\epsilon = 1$:

$$\begin{aligned}
r(\rho, c\tau) &= \kappa\rho = \frac{\varkappa M}{3} \rho^3 \frac{1}{2\rho^2} \left\{1 - \cos T\right\} && \text{(VII.176)}\\
\rightsquigarrow \kappa(c\tau) &= \frac{\varkappa M}{6} \left\{1 - \cos T\right\} && \text{(VII.177)}\\
c\tau &= \pm \frac{\varkappa M}{6} \left\{T - \sin T\right\} && \text{(VII.178)}\\
& && \text{(VII.179)}
\end{aligned}$$

$$\epsilon = -1: \qquad r(\rho, c\tau) = \kappa\rho = \frac{\varkappa M}{3}\rho^3 \frac{1}{2\rho^2}\{\mathrm{ch}T - 1\} \tag{VII.180}$$

$$\rightsquigarrow \kappa(c\tau) = \frac{\varkappa M}{6}\{\mathrm{ch}T - 1\} \tag{VII.181}$$

$$c\tau = \pm\frac{\varkappa M}{6}\{\mathrm{sh}T - T\} \tag{VII.182}$$

$$\tag{VII.183}$$

und die Metrik

$$ds^2 = \kappa^2(c\tau)\left\{\frac{d\rho^2}{1-\epsilon\,\rho^2} + \rho^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)\right\} - dc\tau^2 \tag{VII.184}$$

Wahl der Eigenzeit-Achse so, dass Entwicklung des Sterns für $\tau < 0$ und Kollaps bei $\tau = 0$.

Damit ergibt sich

$$\epsilon = 0: \qquad \kappa(c\tau) = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} (\varkappa M)^{\frac{1}{3}} (-c\tau)^{\frac{2}{3}} \tag{VII.185}$$

$$\epsilon = 1: \qquad \kappa(c\tau) = \frac{1}{6}\varkappa M(1 - \cos T) \tag{VII.186}$$

$$c\tau = -\frac{1}{6}\varkappa M\,(T - \sin T) \qquad (T \geq 0) \tag{VII.187}$$

$$\epsilon = -1: \qquad \kappa(c\tau) = \frac{1}{6}\varkappa M\,(\mathrm{ch}T - 1) \tag{VII.188}$$

$$c\tau = -\frac{1}{6}\varkappa M\,(\mathrm{sh}T - T) \qquad (T \geq 0) \tag{VII.189}$$

- Stetiger Übergang vom Innen- zum Aussenraum

Innen	Aussen
$F(\rho) = \frac{1}{3}\varkappa M\rho^3$	$F(\rho) = 2M = \text{const}$
$f(\rho) = \rho$	$f(\rho) = \text{const}$
$\tau_0(\rho) = 0$	$\tau_0(\rho) = 0$
wobei	wobei
$M = c^2\rho_0(c\tau)\kappa^3(c\tau) = \text{const}$	$M = \frac{1}{2}r_G = \text{const}$

Auf der Sternoberfläche ($\rho = \rho_S$) müssen F und f stetig sein ; τ_0 natürlich auch, was ohnehin erfüllt ist.
Somit folgt

$$\frac{1}{3}\varkappa c^2\rho_0\kappa^3\rho_S^3 = 2M \tag{VII.190}$$

$$f(\rho_S) = \rho_S \tag{VII.191}$$

Die Metriken im Innen- und Aussenraum können damit in eine weitgehend einheitliche Form gebracht werden. Wesentlicher Unterschied liegt in der Funktion $r(\rho, c\tau)$.
Wir erinnern an die allgemeine Form der Tolman-Lösung

$$\epsilon = 0: \qquad r(\rho, c\tau) \propto F(\rho)^{\frac{1}{3}}$$

$$\epsilon = \pm 1: \qquad r(\rho, c\tau) \propto \frac{F(\rho)}{f^2(\rho)}$$

Im Innenraum korrespondiert dies mit dem getätigten Ansatz

$$r(\rho, c\tau) = \kappa(\rho, c\tau) \cdot \rho$$

Im Aussenraum sind F und f konstant;
wegen der Stetigkeit an der Sternoberfläche sind diese Konstanten gerade $F(\rho_S)$ und $f(\rho_S)$.

Vorbereitend berechnen wir

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} F^{\frac{1}{3}}(\rho) &= \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} (\varkappa M)^{\frac{1}{3}}\ \rho \\ \frac{F(\rho)}{2\,f^2(\rho)} &= \frac{1}{6}\varkappa M\rho\end{aligned}$$

Dann folgt

Innenraum	Aussenraum
$\epsilon = 0 \;:\quad r(\rho,c\tau) = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} (\varkappa M)^{\frac{1}{3}}\,\rho\,\{-c\tau\}^{\frac{2}{3}}$	$r(\rho,c\tau) = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} (\varkappa M)^{\frac{1}{3}}\,\rho_S\,\{-c\tau\}^{\frac{2}{3}}$
$\epsilon = +1:\quad r(\rho,c\tau) = \frac{1}{6}\varkappa M\rho\,\{1-\cos T\}$ $c\tau = -\frac{1}{6}\varkappa M\,\{T-\sin T\}$	$r(\rho,c\tau) = \frac{1}{6}\varkappa M\rho_S\,\{1-\cos T\}$ $c\tau = -\frac{1}{6}\varkappa M\,\{T-\sin T\}$
$\epsilon = -1:\quad r(\rho,c\tau) = \frac{1}{6}\varkappa M\rho\,\{\mathrm{ch}T-1\}$ $c\tau = -\frac{1}{6}\varkappa M\,\{\mathrm{sh}T-T\}$	$r(\rho,c\tau) = \frac{1}{6}\varkappa M\rho_S\,\{\mathrm{ch}T-1\}$ $c\tau = -\frac{1}{6}\varkappa M\,\{\mathrm{sh}T-T\}$
$ds^2 = \kappa^2(c\tau)\left\{\frac{d\rho^2}{1-\epsilon\rho^2} + \rho^2\left(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta d\varphi^2\right)\right\}$ $-dc\tau^2$	$ds^2 = \kappa^2(c\tau)\left\{\frac{d\rho^2}{1-\epsilon{\rho_S}^2} + {\rho_S}^2\left(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta d\varphi^2\right)\right\}$ $-dc\tau^2$
mit $\kappa(c\tau) = \frac{r(\rho,c\tau)}{\rho}$	mit $\kappa(c\tau) = \frac{r(\rho,c\tau)}{\rho_S}$

Diskussion der Lösung im Innenraum

- Das Innere des Sterns ($\rho \leq \rho_S$) ist ein dreidimensionaler Raum konstanter Krümmung. Ein derartiger Raum wird im Abschnitt "Robertson-Walker-Metrik" im Kosmologie Kapitel wieder auftauchen. Dort befindet sich eine nähere Analyse.
- Ein Grosskreis auf der Sternoberfläche hat den Radius $\rho_S\,\kappa(c\tau)$. Wegen der Zeitabhängigkeit von κ expandiert oder kontrahiert der Stern. Da $r_S = \rho_S\kappa$ den Koordinatenradius darstellt, ist für die Ausdehnung des Sterns sein Umfang $2\pi r_S$ vorzuziehen. Die Abbildung skizziert die Stern-Expansion bzw. -Kontraktion.
- Besonderheiten, wenn die Sternoberfläche den Schwarzschild-Radius $r_G = \kappa(c\tau)\rho_S = 2M$ über- bzw. unterschreitet: keine!
  Erst bei $\kappa(c\tau) = 0$ wird das Innenfeld singulär.
- Wenn die Sternenoberfläche den Schwarzschild Radius r_G unterschreitet, wird der Stern für einen entfernten Beobachter unsichtbar. Kein Photon kann aus dem Bereich $< r_G$ entweichen. Vgl. dazu Diskussion der Äusseren Schwarzschild-Lösung.
  Der Stern wird zum Schwarzen Loch.

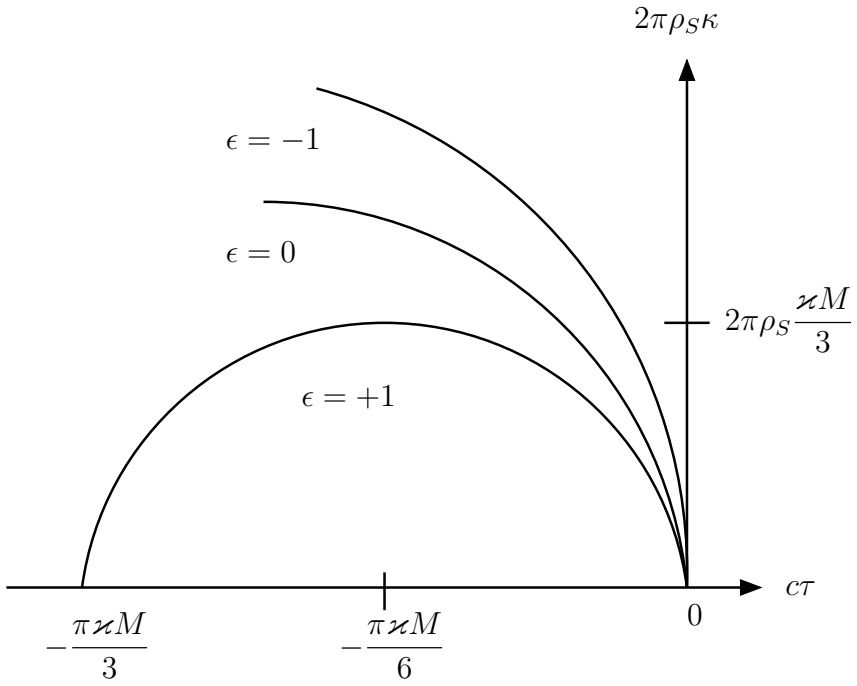


Abbildung VII.1: Zeitliche Entwicklung des Umfangs eines kollabierenden Sternes.

Kapitel VIII

Kosmologie

1 Kosmologisches Prinzip

Kosmos, Universum,Weltall $\Rightarrow$ synonym

Anwendung der ART (Einsteinschen Feldgleichung) auf Kosmos als Ganzes

Erwartung der Beschreibung der großräumigen Dynamik des Kosmos

- Expansion, Hubble - Konstante ca. 70 $\frac{km/s}{Mpc}$
- 2,7 K Hintergrundstrahlung
- Rotverschiebung des Lichtes nahezu aller Galaxien

Zahlen zum sichtbaren Universum:

- Radius des sichtbaren Universums ca 10^{10} Lj
- 10^{11} Galaxien
- Milchstraße ca 10^5 Lj

Hier: Beschreibung des sichtbaren Universums auf großer Skala, z.B. $(10^8\text{Lj})^3$; Bereich enthält viele Galaxien

Beobachtungstatsache:

- Universum im Mittel ($< x > \ 10^8$Lj) isotrop und homogen
- vgl. Moleküle eines Gases in L^3

Erhebung der Beobachtungstatsache zum Kosmologischen Prinzip

im Universum sind alle Positionen und Richtungen gleichwertig

enorme Einschränkung an die Raumstruktur des Kosmos, also die Metrik

Metrik, die der Homogenitäts- und Isotropie- Forderung des Kosmologischen Prinzips genügt, ist die Robertson - Walker - Metrik (1936)

$$\begin{aligned} ds^2 &= S^2(ct)\left\{\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)\right\} - dct^2 \\ &\text{mit} \quad k = 1, 0, -1 \end{aligned} \tag{VIII.1}$$

Verifikation im Abschnitt 7.2.

eine zeitabhängige Funktion S(ct) („Skalenfunktion“) sowie Parameter k

r offensichtlich dimensionslos, ϑ, φ dimensionslos

$\longrightarrow$ S hat Dimension einer Länge

S kann später ggf. als Weltradius interpretiert werden

2 Robertson-Walker-Metrik

Konstruktion der Metrik, die homogen und isotrop im 3-dim. Unterraum des 4-dim. Riemannschen Raumes ist

Ausgangspunkt: Zweidimensionale Räume konstanter Krümmung

- Flächen positiver Krümmung (k = +1) sind Kugeloberflächen vom Radius S mit der Metrik

$$ds^2 = S^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right), 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \vartheta \le \pi \tag{VIII.2}$$

  die man sich im 3-dim. flachen Raum eingebettet vorstellen kann

- auf dieser Kugeloberfläche ist kein Punkt und keine Richtung ausgezeichnet, d.h. dieser 2-dim. Raum ist homogen und isotrop

- Parameterdarstellung dieser Fläche

$$\left.\begin{aligned} x &= S\sin\vartheta\sin\varphi \\ y &= S\sin\vartheta\cos\varphi \\ z &= S\cos\vartheta \end{aligned}\right\} \quad x^2 + y^2 + z^2 = S^2 \tag{VIII.3}$$

  mit den Parametern ϑ und φ

- Linienelement auf dieser Fläche $d^{(2)}s^2$

$$
\begin{aligned}
d^{(2)}s^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 && \text{(VIII.4)}\\
dx &= S(\cos\vartheta \sin\varphi d\vartheta + \sin\vartheta\cos\varphi d\varphi) && \text{(VIII.5)}\\
dy &= S(\cos\vartheta\cos\varphi d\vartheta - \sin\vartheta\sin\varphi d\varphi) && \text{(VIII.6)}\\
dz &= -S\sin\vartheta d\vartheta && \text{(VIII.7)}\\
d^{(2)}s^2 &= S^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) && \text{(VIII.8)}
\end{aligned}
$$

Erweiterung dieser Vorstellung um eine Dimension:

- Beschreibung einer 3-dimensionalen Fläche (auch 3-d Hyperfläche oder 3-d Raum) mit Eigenschaften Homogenität und Isotropie
- Parameterdarstellung dieser Hyperfläche

$$
\left.\begin{aligned}
x &= S\sin\chi\sin\vartheta\sin\varphi\\
y &= S\sin\chi\sin\vartheta\cos\varphi\\
z &= S\sin\chi\cos\vartheta\\
w &= S\cos\chi
\end{aligned}\right\} w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = S^2 \qquad \text{(VIII.9)}
$$

  mit den Parametern χ, ϑ, φ

- diese Hyperfläche beschreibt die 3-dim. Oberfläche einer 4-dim. Kugel
- Linienelement auf dieser Hyperfläche: $d^{(3)}s^2$

$$
d^{(3)}s^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 \qquad \text{(VIII.10)}
$$

  mit

$$
\begin{aligned}
dx &= S(\cos\chi\sin\vartheta\sin\varphi d\chi + \sin\chi\cos\vartheta\sin\varphi d\vartheta + \sin\chi\sin\vartheta\cos\varphi d\varphi)\\
dy &= S(\cos\chi\sin\vartheta\cos\varphi d\chi + \sin\chi\cos\vartheta\cos\varphi d\vartheta - \sin\chi\sin\vartheta\sin\varphi d\varphi)\\
dz &= S(\cos\chi\cos\vartheta d\chi - \sin\chi\sin\vartheta d\vartheta)\\
dw &= S(-\sin\chi d\chi)
\end{aligned}
$$

$$
d^{(3)}s^2 = S^2(d\chi^2 + \sin^2\chi(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)) \qquad \text{(VIII.11)}
$$

- Transformation der χ Koordinate $\chi \to r$ (Vorbereitung für später)

$$
\begin{aligned}
r &= \sin\chi && \text{(VIII.12)}\\
dr &= \cos\chi d\chi && \text{(VIII.13)}\\
d\chi^2 &= \frac{dr^2}{\cos^2\chi} = \frac{dr^2}{1-r^2} && \text{(VIII.14)}\\
\to d^{(3)}s^2 &= S^2\left\{\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)\right\} && \text{(VIII.15)}
\end{aligned}
$$

Erweiterung des 3-dim. Linienelementes $d^{(3)}s^2$ auf das 4-dim. Linienelement ds unter Einarbeitung der 4. Koordiante „Zeit“

- allgemein

$$ds^2 = g_{ik}d\xi^i d\xi^k \tag{VIII.16}$$
$$ds^2 = g_{ab}d\xi^a d\xi^b + 2g_{4b}d\xi^4 d\xi^b + g_{44}(d\xi^4)^2 \tag{VIII.17}$$
$$ds^2 = d^{(3)}s^2 + 2g_{4b}dctd\xi^b + g_{44}dct^2 \tag{VIII.18}$$

- g_{4b} müssen verschwinden, damit keine Raumrichtung ausgezeichnet ist; bei $g_{4b} \neq 0$ würde Vorzeichenwechsel von $d\xi^b$ zu einem anderen ds^2 führen; damit wäre Isotropie gestört

- $g_{44}(\xi)$ muss konstant sein, damit die Eigenzeit eines ruhenden Teilchens nicht vom Ort ξ^a abhängt, denn:

  ruhendes Teilchen :

$$d\xi^a = 0 \quad ; \tag{VIII.19}$$
$$\tag{VIII.20}$$

  Eigenzeitdefinition gibt zunächst:

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = g_{44}(r,\vartheta,\varphi)\, dct^2 \tag{VIII.21}$$
$$\longrightarrow \quad g_{44} = -1 \tag{VIII.22}$$

  Damit wäre i.a. die Eigenzeit eines ruhenden Beobachters vom Ort (r,ϑ,φ) abhängig, was aber dem Kosmolgischen Prinzip widerspricht. Somit darf g_{44} nur von t abhängen. Durch Umskalierung von t kann $t = \tau$ erreicht werden.

$$ds^2 = d^{(3)}s^2 - dct^2 \tag{VIII.23}$$
$$ds^2 = S^2\left\{\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)\right\} - dct^2 \tag{VIII.24}$$

Sowohl im 2-d als auch 3-d-Fall gibt es jeweils eine negativ konstant gekrümmte Fläche bzw Hyperfläche, die ebenfalls homogen und isotrop sind:

$$d^{(2)}s^2 = S^2(d\vartheta^2 + \mathrm{sh}^2\vartheta d\varphi^2) \tag{VIII.25}$$
$$d^{(3)}s^2 = S^2(d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\chi(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)) \tag{VIII.26}$$
$$r = \mathrm{sh}\chi \tag{VIII.27}$$
$$dr = \mathrm{sh}\chi d\chi \tag{VIII.28}$$
$$d\chi^2 = \frac{dr^2}{\mathrm{ch}^2\chi} = \frac{dr^2}{1+\mathrm{sh}^2\chi} = \frac{dr^2}{1+r^2} \tag{VIII.29}$$
$$d^{(3)}s^2 = S^2\left\{\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)\right\} \tag{VIII.30}$$

Zwischen konstanter positiver und konstanter negativer Krümmung liegt noch die verschwindende Krümmung $k = 0$.

Zusammenfassung aller 3 Fälle:

$$ds^2 = S^2 \left\{ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \right) \right\} - dct^2 \tag{VIII.31}$$

$$k = \begin{cases} 1 & \text{konstante positive Krümmung} \\ 0 & \text{verschwindende Krümmung} \\ -1 & \text{konstante negative Krümmung} \end{cases} \tag{VIII.32}$$

3 Feldgleichungen für die Robertson-Walker-Metrik

$$ds^2 = S^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right\} - dct^2 \tag{VIII.33}$$

$$g_{11} = \frac{S^2}{1-kr^2}, \tag{VIII.34}$$

$$g^{11} = \frac{1-kr^2}{S^2} \tag{VIII.35}$$

$$g_{22} = S^2 r^2, \tag{VIII.36}$$

$$g^{22} = \frac{1}{S^2 r^2} \tag{VIII.37}$$

$$g_{33} = S^2 r^2 \sin^2 \vartheta, \tag{VIII.38}$$

$$g^{33} = \frac{1}{S^2 r^2 \sin^2 \vartheta} \tag{VIII.39}$$

$$g_{44} = -1, \tag{VIII.40}$$

$$g^{44} = -1 \tag{VIII.41}$$

Abkürzung:

$$\frac{\partial(\ )}{\partial ct} = (\ )_{|4} = \dot{(\ )} \tag{VIII.42}$$

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im} \left(g_{mk|l} + g_{ml|k} - g_{kl|m} \right) \tag{VIII.43}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} &= \tfrac{kr}{1-kr^2} & \qquad \Gamma^1_{22} &= -r(1-kr^2) \\ \Gamma^1_{33} &= -r(1-kr^2)\sin^2\vartheta & \qquad \Gamma^1_{44} &= 0 \\ \Gamma^1_{12} &= 0 & \qquad \Gamma^1_{13} &= 0 \\ \Gamma^1_{14} &= \tfrac{\dot{S}}{S} & \qquad \Gamma^1_{23} &= 0 \\ \Gamma^1_{24} &= 0 & \qquad \Gamma^1_{34} &= 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^2_{11} &= 0 & \Gamma^2_{22} &= 0\\
\Gamma^2_{33} &= -\sin\vartheta\cos\vartheta & \Gamma^2_{44} &= 0\\
\Gamma^2_{12} &= \tfrac{1}{r} & \Gamma^2_{13} &= 0\\
\Gamma^2_{14} &= 0 & \Gamma^2_{23} &= 0\\
\Gamma^2_{24} &= \tfrac{\dot S}{S} & \Gamma^2_{34} &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^3_{11} &= 0 & \Gamma^3_{22} &= 0\\
\Gamma^3_{33} &= 0 & \Gamma^3_{44} &= 0\\
\Gamma^3_{12} &= 0 & \Gamma^3_{13} &= \tfrac{1}{r}\\
\Gamma^3_{14} &= 0 & \Gamma^3_{23} &= \cot\vartheta\\
\Gamma^3_{24} &= 0 & \Gamma^3_{34} &= \tfrac{\dot S}{S}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^4_{11} &= \tfrac{s\dot s}{1-kr^2} & \Gamma^4_{22} &= r^2 S\dot S\\
\Gamma^4_{33} &= r^2\sin^2\vartheta S\dot S & \Gamma^4_{44} &= 0\\
\Gamma^4_{12} &= 0 & \Gamma^4_{13} &= 0\\
\Gamma^4_{14} &= 0 & \Gamma^4_{23} &= 0\\
\Gamma^4_{24} &= 0 & \Gamma^4_{34} &= 0
\end{aligned}
$$

Krümmungstensor u. Riccitensor

$$
\begin{aligned}
R^m{}_{ikp} &= \Gamma^m_{ik|p} - \Gamma^m_{ip|k} + \Gamma^r_{ik}\Gamma^m_{rp} - \Gamma^r_{ip}\Gamma^m_{rk}\\
R_{ip} &= R^m{}_{imp} = \Gamma^m_{im|p} - \Gamma^m_{ip|m} + \Gamma^r_{im}\Gamma^m_{rp} - \Gamma^r_{ip}\Gamma^m_{rm}\\
R^1{}_{i1p} &= \Gamma^1_{i1|p} - \Gamma^1_{ip|1} + \Gamma^r_{i1}\Gamma^1_{rp} - \Gamma^1_{ip}\Gamma^1_{11} - \Gamma^4_{ip}\Gamma^1_{41}\\
R^2{}_{i2p} &= \Gamma^2_{i2|p} - \Gamma^2_{ip|2} + \Gamma^r_{i2}\Gamma^2_{rp} - \Gamma^1_{ip}\Gamma^2_{12} - \Gamma^4_{ip}\Gamma^2_{42}\\
R^3{}_{i3p} &= \Gamma^3_{i3|p} - \Gamma^3_{ip|3} + \Gamma^r_{i3}\Gamma^3_{rp} - \Gamma^1_{ip}\Gamma^3_{13} - \Gamma^2_{ip}\Gamma^3_{23} - \Gamma^4_{ip}\Gamma^3_{43}\\
R^4{}_{i4p} &= \Gamma^4_{i4|p} - \Gamma^4_{ip|4} + \Gamma^r_{i4}\Gamma^4_{rp}
\end{aligned}
$$

$\underline{R^1{}_{i1p}:}$

$$
\begin{aligned}
R^1{}_{11p} &= 0 = R^1{}_{p11} \\
R^1{}_{212} &= 1 - 3kr^2 + r(1-kr^2)\frac{kr}{1-kr^2} - r^2\dot{S}S\frac{\dot{S}}{S} \\
&= 1 - 3kr^2 + kr^2 - 1 + kr^2 - r^2\dot{S}^2 = -kr^2 - \dot{S}^2r^2 \\
R^1{}_{213} &= 0 = R^1{}_{312} \\
R^1{}_{214} &= 0 = R^1{}_{412} \\
R^1{}_{313} &= (1-3kr^2)\sin^2\vartheta - (1-kr^2)\sin^2\vartheta + r(1-kr^2)\sin^2\vartheta\frac{kr}{1-kr^2} - r^2\sin^2\vartheta s\dot{s}\frac{\dot{s}}{s} \\
&= -2kr^2\sin^2\vartheta + kr^2\sin^2\vartheta - r^2\sin^2\vartheta\dot{s}^2 \\
&= -kr^2\sin^2\vartheta - r^2\sin^2\vartheta\dot{s} \\
&= -r^2\sin^2\vartheta(k+\dot{s}^2) \\
R^1{}_{314} &= 0 = R^1{}_{413} \\
R^1{}_{414} &= \frac{\ddot{S}S - \dot{S}^2}{S^2} + \frac{\dot{S}^2}{S^2} = \frac{\ddot{S}}{S}
\end{aligned}
$$

$\underline{R^2{}_{i2p}:}$

$$
\begin{aligned}
R^2{}_{121} &= -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{kr}{1-kr^2}\frac{1}{r} - \frac{S\dot{S}}{1-kr^2}\frac{\dot{S}}{S} = -\frac{k+\dot{S}^2}{1-kr^2} \\
R^2{}_{i22} &= 0 = R^2{}_{22i} \\
R^2{}_{123} &= 0 = R^2{}_{321} \\
R^2{}_{124} &= \frac{1}{r}\frac{\dot{S}}{S} - \frac{\dot{S}}{S}\frac{1}{r} = 0 = R^2{}_{321} \\
R^2{}_{324} &= 0 = R^2{}_{423} \\
R^2{}_{324} &= 0 = R^2{}_{423} \\
R^2{}_{323} &= -\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta - \cos^2\vartheta + (1-kr^2)\sin^2\vartheta - r^2\sin^2\vartheta S\dot{S}\frac{\dot{S}}{S} \\
&= -r^2\sin^2\vartheta(k+\dot{S}^2) \\
R^2{}_{324} &= 0 = R^2{}_{423} \\
R^2{}_{424} &= \frac{\ddot{S}S - \dot{S}^2}{S^2} + \frac{\dot{S}^2}{S^2} = \frac{\ddot{S}}{S}
\end{aligned}
$$

$\underline{R^3{}_{i3p}:}$

$$
\begin{aligned}
R^3{}_{131} &= -\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^2}-\frac{kr}{1-kr^2}\frac{1}{r}-\frac{S\dot{S}}{1-kr^2}\frac{\dot{S}}{S} = -\frac{k+\dot{S}^2}{1-kr^2}\\
R^3{}_{132} &= \frac{1}{r}\cot\vartheta-\frac{1}{r}\cot\vartheta = 0 = R^3{}_{231}\\
R^3{}_{i33} &= 0 = R^3{}_{33i}\\
R^3{}_{134} &= \frac{1}{r}\frac{\dot{S}}{S}-\frac{\dot{S}}{S}\frac{1}{r} = 0\\
R^3{}_{232} &= \frac{-\sin^2\vartheta-\cos^2\vartheta}{\sin^2\vartheta}+\cot^2\vartheta+r(1-kr^2)\frac{1}{r}-r^2S\dot{S}\frac{\dot{S}}{S}\\
&= -1+(1-kr^2)-r^2\dot{S}^2 = -r^2(k+\dot{S}^2)\\
R^3{}_{234} &= \cot\vartheta\frac{\dot{S}}{S}-\frac{\dot{S}}{S}\cot\vartheta = 0 = R^3{}_{432}\\
R^3{}_{434} &= \frac{\ddot{S}S-\dot{S}^2}{S^2}+\frac{\dot{S}^2}{S^2} = \frac{\ddot{S}}{S}
\end{aligned}
$$

$\underline{R^4{}_{i4p}:}$

$$
\begin{aligned}
R^4{}_{141} &= -\frac{\ddot{S}S+\dot{S}^2}{1-kr^2}+\frac{\dot{S}}{S}\frac{S\dot{S}}{1-kr^2} = -\frac{\ddot{S}S}{1-kr^2}\\
R^4{}_{142} &= 0 = R^4{}_{241}\\
R^4{}_{143} &= 0 = R^4{}_{341}\\
R^4{}_{i44} &= 0 = R^4{}_{44i}\\
R^4{}_{243} &= 0 = R^4{}_{342}\\
R^4{}_{343} &= -r^2\sin^2\vartheta(\ddot{S}S+\dot{S}^2)+\frac{\dot{S}}{S}r^2\sin^2\vartheta S\dot{S} = -r^2\sin^2\vartheta\ddot{S}S\\
R^4{}_{242} &= -r^2(\ddot{S}S+\dot{S}^2)+\frac{\dot{S}}{S}r^2S\dot{S} = -r^2\ddot{S}S
\end{aligned}
$$

Ricci - Tensor

$$
\begin{aligned}
R_{11} &= -\frac{k+\dot{S}^2}{1-kr^2} - \frac{k+\dot{S}^2}{1-kr^2} - \frac{\ddot{S}^2 S}{1-kr^2} \\
&= -\frac{S^2}{1-kr^2}\left\{\frac{\ddot{S}}{S} + 2\frac{\dot{S}^2+k}{S^2}\right\} = -g_{11}\left\{\frac{\ddot{S}}{S} + 2\frac{\dot{S}^2+k}{S^2}\right\} \\
R_{22} &= -r^2(k+\dot{S}^2) - r^2(k+\dot{S}^2) - r^2\ddot{S}S \\
&= -r^2S^2\left\{\frac{\ddot{S}}{S} + 2\frac{k+\dot{S}^2}{S^2}\right\} \\
&= -g_{22}\left\{\frac{\ddot{S}}{S} + 2\frac{k+\dot{S}^2}{S^2}\right\} \\
R_{33} &= -(k+\dot{S}^2)r^2\sin^2\vartheta - r^2\sin\vartheta(k+\dot{S}^2) - r^2\sin^2\vartheta\ddot{S}S \\
&= -r^2\sin^2\vartheta 2(k+\dot{S}^2) - r^2\sin^2\vartheta S\ddot{S} \\
&= -S^2r^2\sin^2\vartheta\left\{\frac{\ddot{S}}{S} + 2\frac{k+\dot{S}^2}{S^2}\right\} \\
&= -g_{33}\left\{\frac{\ddot{S}}{S} + 2\frac{k+\dot{S}^2}{S^2}\right\} \\
R_{44} &= \frac{\ddot{S}}{S} + \frac{\ddot{S}}{S} + \frac{\ddot{S}}{S} = 3\frac{\ddot{S}}{S} = -g_{44}4\frac{\ddot{S}}{S} \\
R_{ip} &= 0 \quad \text{für} \quad i \neq p \quad \text{, da alle} \quad R^{(m)}_{i(m)p} = 0
\end{aligned}
$$

Krümmungsskalar

$$
\begin{aligned}
R &= g^{ip}R_{ip} \\
&= -3\left\{\frac{\ddot{S}}{S} + 2\frac{k+\dot{S}^2}{S^2}\right\} - 3\frac{\ddot{S}}{S} \\
&= -6\frac{\ddot{S}}{S} - 6\frac{\dot{S}^2+k}{S^2}
\end{aligned}
$$

Einstein Tensor

$$
\begin{aligned}
G_i{}^p &= R_i{}^p - \frac{R}{2}\delta_i{}^p \\
G_1{}^1 &= g^{11}R_{11} - \frac{R}{2} = -\left\{\frac{\ddot{S}}{S} + 2\frac{k+\dot{S}^2}{S^2}\right\} + 3\frac{\ddot{S}}{S} + 3\frac{k+\dot{S}^2}{S^2} \\
G_1{}^1 &= 2\frac{\ddot{S}}{S} + \frac{k+\dot{S}^2}{S^2} \\
G_2{}^2 &= g^{22}R_{22} - \frac{R}{2} = G_1{}^1 \\
G_3{}^3 &= g^{33}R_{33} - \frac{R}{2} = G_1{}^1 \\
G_4{}^4 &= g^{44}R_{44} - \frac{R}{2} = -3\frac{\ddot{S}}{S} + 3\frac{\ddot{S}}{S} + 3\frac{k+\dot{S}^2}{S^2} \\
G_4{}^4 &= 3\frac{k+\dot{S}^2}{S^2}
\end{aligned}
$$

Energie - Impuls - Tensor

- T_{mn} muss die gleiche Symmetrie aufweisen , die im Kosmologischen Prinzip gefordert ist
- Betrachtung einer kontinuierlichen, idealen Flüssigkeit

$$T_m{}^n = \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) u_m u^n + P\delta_m^n, \tag{VIII.44}$$

wobei

$$
\begin{aligned}
\rho(r,\vartheta,\varphi,t) &= \rho(t), && \text{(VIII.45)}\\
P(r,\vartheta,\varphi,t) &= P(t) && \text{(VIII.46)}
\end{aligned}
$$

wegen Homogenität im 3-dim Unterraum

- eine Eigenbewegung der Materie, z.B. das Umkreisen eines Galaxiehaufens durch eine Galaxie verschwindet im Mittel, d.h. typische Materiebewegung ist

$$
\begin{aligned}
\xi^a &= const && \text{(VIII.47)}\\
\longrightarrow \quad u^n &= (0,0,0,c) && \text{(VIII.48)}\\
u_m &= (0,0,0,-c) && \text{(VIII.49)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_1{}^1 &= T_2{}^2 = T_3{}^3 = P && \text{(VIII.50)}\\
T_4{}^4 &= -\rho c^2 && \text{(VIII.51)}\\
T_m{}^n &= 0 \quad , \quad m \neq n && \text{(VIII.52)}
\end{aligned}
$$

Feldgleichungen mit kosmologischem Glied

$$G_m^{\ n} = -\kappa T_m^{\ n} + \Lambda g_m^{\ n} \tag{VIII.53}$$

$$\begin{matrix}1\\1\end{matrix} : \quad 2\frac{\ddot{S}}{S} + \frac{\dot{S}^2 + k}{S^2} = -\kappa P + \Lambda \tag{VIII.54}$$

$$\begin{matrix}4\\4\end{matrix} : \quad 3\frac{\dot{S}^2 + k}{S^2} = \kappa c^2 \rho + \Lambda \quad \text{(Friedmangleichung)} \tag{VIII.55}$$

$\begin{matrix}2\\2\end{matrix}$ und $\begin{matrix}3\\3\end{matrix}$ wie $\begin{matrix}1\\1\end{matrix}$

2 Dgl. für $S(t), P(t), \rho(t)$
zu ergänzen ist Zustandsgleichung $F(P, \rho) = 0$

Integrabilitätsbedingung

$$T_m^{\ n}{}_{||n} = 0 \tag{VIII.56}$$

kann alternativ zu Feldgleichungen verwendet werden

$$T_m^{\ n}{}_{||n} = \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)_{|n} u_m u^n + P_{|m} + \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) u_{m||n} u^n + \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) u_m u^n{}_{||n} = 0 \tag{VIII.57}$$

$$\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)_{|n} u^n = \left(\dot{\rho} + \frac{\dot{P}}{c^2}\right) c \tag{VIII.58}$$

$$u_{m||n} = u_{m|n} - \Gamma^i_{mn} u_i = 0 - \Gamma^4_{mn}(-c) \tag{VIII.59}$$

$$u_{m||n} u^n = c\Gamma^4_{mn} u^n = c^2 \Gamma^4_{m4} = 0 \tag{VIII.60}$$

$$u^n{}_{||n} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g} u^n)_{|n} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g} c)_{|4} \tag{VIII.61}$$

$$g = \frac{S^2}{1 - kr^2} S^2 r^2 S^2 r^2 \sin^2\vartheta (-1) = -\frac{S^6 r^4 \sin^2\vartheta}{1 - kr^2} \tag{VIII.62}$$

$$\sqrt{-g}_{|4} = \frac{3S^2 \dot{S} r^2 \sin\vartheta}{\sqrt{1 - kr^2}} = 3\frac{\dot{S}}{S}\sqrt{-g} \tag{VIII.63}$$

$$u^n{}_{||n} = 3\frac{\dot{S}}{S} c \tag{VIII.64}$$

$$T_a^{\ n}{}_{||n} = 0 \tag{VIII.65}$$

$$T_4^{\ n}{}_{||n} = \left(\dot{\rho} + \frac{\dot{P}}{c^2}\right) c(-c) + \dot{P} + \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)(-c) 3\frac{\dot{S}}{S} c = 0 \tag{VIII.66}$$

$$-c^2 \dot{\rho} - c^2 \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) 3\frac{\dot{S}}{S} = 0 \tag{VIII.67}$$

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho + \frac{P}{c^2}} = -3\frac{\dot{S}}{S} \quad \text{(IB)} \tag{VIII.68}$$

Beweis der Äquivalenz der Integrabilitätsbedingung (VIII.68) zu den Gleichungen $\frac{1}{1}$ (VIII.54) und $\frac{4}{4}$ (VIII.55):

- Differentiation von $\frac{4}{4}$

$$3\frac{2\dot{S}\ddot{S}S^2 - (\dot{S}^2+k)2S\dot{S}}{S^4} = \kappa c^2\dot{\rho} \tag{VIII.69}$$

$$6\left(\frac{\ddot{S}}{S} - \frac{\dot{S}^2+k}{S^2}\right)\frac{\dot{S}}{S} = \kappa c^2\dot{\rho} \tag{VIII.70}$$

- Rechts IB einsetzen

$$6\left(\frac{\ddot{S}}{S} - \frac{\dot{S}^2+k}{S^2}\right)\frac{\dot{S}}{S} = -3\kappa c^2\frac{\dot{S}}{S}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) \tag{VIII.71}$$

$$2\frac{\ddot{S}}{S} - 2\frac{\dot{S}^2+k}{S^2} = -\kappa c^2\rho - \kappa P \tag{VIII.72}$$

$$2\frac{\ddot{S}}{S} + \frac{\dot{S}^2+k}{S^2} = -\kappa P - \kappa c^2\rho + 3\frac{\dot{S}^2+k}{S^2} \tag{VIII.73}$$

- Rechts $\frac{4}{4}$ einsetzen liefert $\frac{1}{1}$

$$2\frac{\ddot{S}}{S} + \frac{\dot{S}^2+k}{S^2} = -\kappa P + \Lambda \quad . \tag{VIII.74}$$

Bei Vorgabe einer Zustandsgleichung $F(\rho, P) = 0$ bzw $P = P(\rho)$ kann aus der IB der Weltradius S als Funktion der Massendichte ρ bestimmt werden, danach aus $\frac{4}{4}$ das zeitliche Verhalten von S bzw. ρ .

4 Strahlungskosmos

Welt sei nur von elm. Strahlung (Photonengas) erfüllt

Situation in Frühphase des Kosmos

Das Photonengas ist formal durch den Energie-Impuls-Tensor der idealen Flüssigkeit zu beschreiben mit

$$P = \frac{1}{3}\rho c^2, \tag{VIII.75}$$

ρc^2 Energiedichte (u)

Ableitung siehe Thermodynamik-Skript

$\Lambda = 0$

Integration von IB:

$$\frac{\dot\rho}{\rho+\frac{1}{3}\rho} = \frac{3}{4}\frac{\dot\rho}{\rho} = -3\frac{\dot S}{S} \tag{VIII.76}$$

$$\frac{1}{4}\ln\rho = -\ln S + const \tag{VIII.77}$$

$$\rho c^2 S^4 = const = A \quad , \tag{VIII.78}$$

d. h. bei der Expansion oder Kontraktion des Kosmos ist die Energiedichte umgekehrt proportional zur 4 Potenz des Weltradius.

Integration von $\frac{4}{4}$

$$\dot S^2 = \frac{\kappa c^2 \rho S^2}{3} - k \tag{VIII.79}$$

$$\dot S^2 = \frac{\kappa A}{3S^2} - k \tag{VIII.80}$$

$$y = S^2, \tag{VIII.81}$$

$$dy = 2SdS \tag{VIII.82}$$

$$\frac{\dot y^2}{4S^2} = \frac{\kappa A}{3S^2} - k \tag{VIII.83}$$

$$\dot y^2 = \frac{4}{3}\kappa A - 4ky \tag{VIII.84}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{\frac{4}{3}\kappa A - 4ky}} = dct \tag{VIII.85}$$

$$k \neq 0 \quad : \quad z = \frac{4}{3}\kappa A - 4ky \ , \tag{VIII.86}$$

$$dz = -4kdy \tag{VIII.87}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = -4kdct \tag{VIII.88}$$

$$2\sqrt{z} = -4kct + const \tag{VIII.89}$$

$$\sqrt{\frac{4}{3}\kappa A - 4kS^2} = -2kct + const \tag{VIII.90}$$

- Festlegen der Integrationskonstante durch

$$S(t_0) = 0 \tag{VIII.91}$$

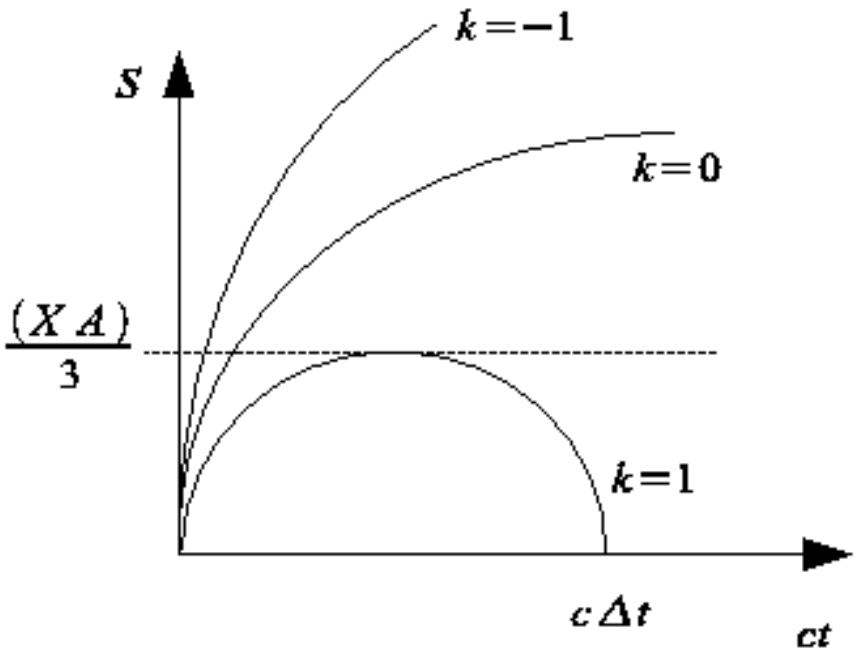
$$\sqrt{\frac{4}{3}\kappa A - 4kS^2} = -2kc(t-t_0) + \sqrt{\frac{4}{3}\kappa A} \tag{VIII.92}$$

$$\cancel{\frac{4}{3}\kappa A} - 4kS^2 = 4k^2c^2(t-t_0)^2 - 4kc(t-t_0)\sqrt{\frac{4}{3}\kappa A} + \cancel{\frac{4}{3}\kappa A} \tag{VIII.93}$$

$$S^2 = -kc^2(t-t_0)^2 + 2c\sqrt{\frac{\kappa A}{3}}(t-t_0) \tag{VIII.94}$$

Diskussion

- $t \to t_0 \Longrightarrow S \to 0$, d.h. die Abstände zweier beliebiger Punkte der Welt werden beliebig klein
- $t \to t_0$: Weltradius wird unabhängig von k, d.h. er ist für offene und geschlossene Welten gleich
- Strahlung kann aufgrund der eigenen Gravitationswechselwirkung einen geschlossenen Kosmos erzeugen (k=1) , dessen Radius von Null bis $\frac{\kappa A}{3}$ wächst und nach $\Delta t = \frac{2}{c}\sqrt{\frac{\kappa A}{3}}$ wieder auf Null zurückgeht



- Nachhall der Phase des Strahlungskosmos ist 2,7 K Hintergrundstrahlung
- Expansion des Kosmos führte zur Abkühlung
- In Frühphase ist aus der Strahlung durch Paarerzeugung massive Materie entstanden, starke WW, Plasma
- Entkopplung in späterer Phase bei ca. 3000K, vgl. Ionisationsenergien

$$1eV = k_B T \tag{VIII.95}$$

$$T = \frac{1,6 \cdot 10^{-19}\text{AsV}}{1,4 \cdot 10^{-23}\text{J/K}} \sim 10^4\text{K} \tag{VIII.96}$$

- Eigenleben der Strahlung; Abkühlung

5 Friedman - Kosmos

als Friedman-Kosmos im engeren Sinne bezeichnet man die Lösung für $P = 0$

$P = 0 \rightleftharpoons$ inkohärente Materie

- Materie hat keinen Druck, wie Staub oder Granulat
- entspricht etwa dem heutigen Weltzustand, denn es gilt:

$$P \ll \rho c^2, \quad \text{d.h.} \tag{VIII.97}$$

- Ruhmassenenergie dominiert deutlich über andere Energien, so Bewegungsenergie (Druck ist Bewegung) und Strahlung
- materie-dominierter Kosmos im Unterschied zum Frühstadium (strahlungs - dominiert)

Abschätzung von P und ρc^2 in Sonne

Daten zur Sonne
$T \approx 10^7 K$ Zentraltemperatur
$N \approx 10^{57}$ Teilchen
$R \approx 700000$ km Radius

$$\rightarrow V \approx (10^9)^3 m^3 \approx 10^{27} m^3 \tag{VIII.98}$$

$$P \approx \frac{N}{V} k_B T \approx \frac{10^{57}}{10^{27}} 10^{-23} 10^7 \approx 10^{14} Pa \tag{VIII.99}$$

$$\rho c^2 \approx \frac{N}{V} m_P c^2 = \frac{10^{57}}{10^{27}} 10^{-27} 10^{17} \approx 10^{20} Pa \tag{VIII.100}$$

$$P \ll \rho c^2 \tag{VIII.101}$$

Abschätzung von P und ρc^2 im Sonnenwind

Daten zum Sonnenwind bei 1 AU
$T \approx 10^5 K$
$n \approx 5 \cdot 10^6$ Protonen/m^3

$$\rightarrow P \approx n k_B T \approx 5 \cdot 10^6 \; 10^{-23} \; 10^5 \approx 5 \cdot 10^{-12} Pa \tag{VIII.102}$$

$$\rho c^2 \approx n m_P c^2 = 5 \cdot 10^6 \; 10^{-27} \; 10^{17} \approx 5 \cdot 10^{-4} Pa \tag{VIII.103}$$

$$P \ll \rho c^2 \tag{VIII.104}$$

$\Lambda = 0$

Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\frac{\dot{S}}{S} \tag{VIII.105}$$

$$\ln\rho = -3\ln S + const \tag{VIII.106}$$

$$\rho S^3 = const \tag{VIII.107}$$

$$\text{bzw.} \quad \frac{4\pi}{3}S^3\rho = M = const \tag{VIII.108}$$

für geschlossene Kosmen (k=1) ist M die Gesamtmasse

Einsetzen in Friedman-Gleichung

$$3\frac{\dot{S}^2+k}{S^2} = \kappa c^2\rho, \tag{VIII.109}$$

$$\kappa = \frac{8\pi}{c^4}\gamma \tag{VIII.110}$$

$$\dot{S}^2 + k = \frac{1}{3S}\kappa c^2\rho S^3 \tag{VIII.111}$$

$$= \frac{\kappa c^2}{4\pi}\frac{M}{S} = \frac{2\gamma}{c^2}\frac{M}{S}$$

$$\frac{M}{2}\dot{S}^2 - \frac{\gamma M^2}{c^2}\frac{1}{S} = -k\frac{M}{2} \tag{VIII.112}$$

Gleichung kann als Energiesatz interpretiert werden: kinet + pot. Energie = const;
auch:

$$\frac{M}{2}S^2_{|t} - \frac{\gamma M^2}{S} = -\frac{k}{2}Mc^2 \tag{VIII.113}$$

Einführung eines „ effektiven Potentials“

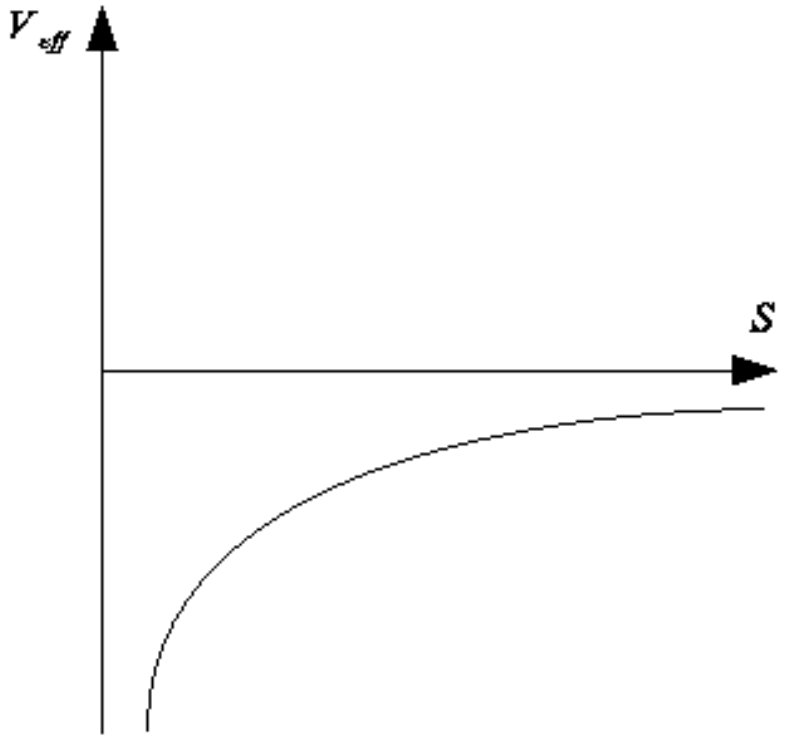
$$V_{eff}(S) = -\frac{\gamma M^2}{S} \tag{VIII.114}$$

$k = 1$: „ gebundene“ Bewegung, S endlich, geschlossener Kosmos

$k = -1$: „ ungebundene“ Bewegung, S unbegrenzt, offener Kosmos

$k = 0$: „ Grenzfall, ungebunden, offener Kosmos

Integration der Friedman-Gleichung



- Variablen Transformation

$$T = \pm \int \frac{dct}{S}, \tag{VIII.115}$$

$$dT = \pm \frac{dct}{S} \tag{VIII.116}$$

$$\dot{S} = S_{|T} \cdot T_{|ct} = \frac{S_{|T}}{S} \tag{VIII.117}$$

$$\frac{M}{2} S_{|T}^2 - \frac{\gamma M^2}{c^2} S = -\frac{k}{2} M S^2 \tag{VIII.118}$$

$$S_{|T}^2 = \frac{2\gamma M}{c^2} S - k S^2 \tag{VIII.119}$$

$$\frac{dS}{\sqrt{\frac{2\gamma M}{c^2} S - k S^2}} = dT \tag{VIII.120}$$

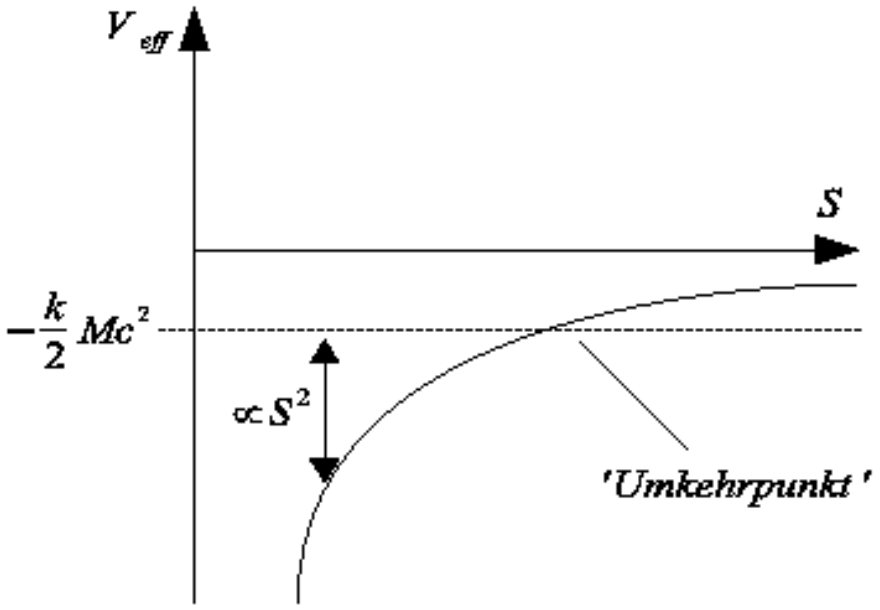


Abbildung VIII.1: k = 1

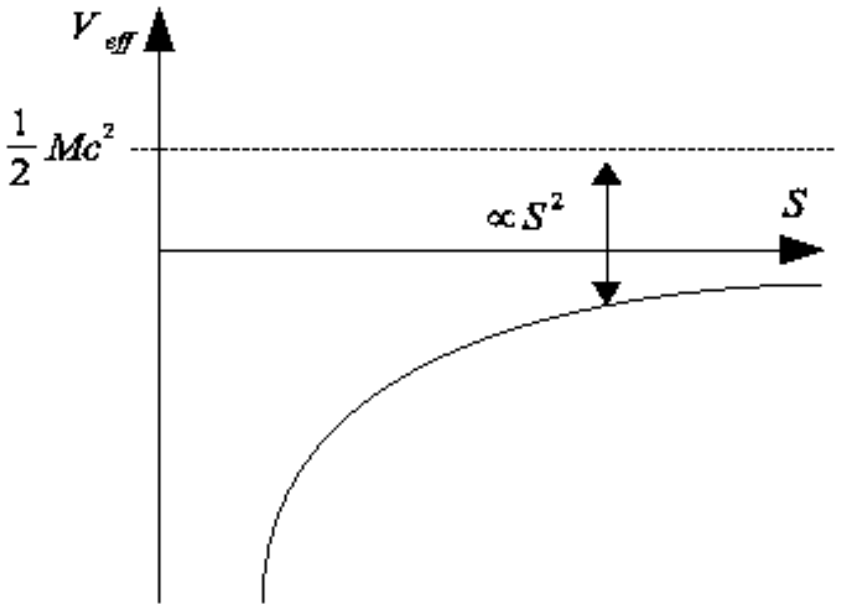


Abbildung VIII.2: k = -1

- Integration für k=0

$$\int \frac{dS}{\sqrt{\frac{2\gamma M}{c^2}}\sqrt{S}} = \int dT \tag{VIII.121}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2\gamma M}{c^2}}} 2\sqrt{S} = T + const \tag{VIII.122}$$

$$\text{Sei} \quad T = 0 \quad \text{bei} \quad S = 0 \quad : \quad const = 0 \tag{VIII.123}$$

$$S = \frac{\gamma M}{2c^2} T^2 \tag{VIII.124}$$

$$\rightarrow \quad c(t - t_0) = \pm \int S dT = \pm \frac{\gamma M}{2c^2} \frac{T^3}{3} \tag{VIII.125}$$

d.h. $S(t_0) = 0$ als Anfangsbedingung gewählt

- Parameterdarstellung der Lösung für k=0

$$S = \frac{\gamma M}{2c^2} T^2 \tag{VIII.126}$$

$$c(t - t_0) = \pm \frac{\gamma M}{6c^2} T^3 \tag{VIII.127}$$

- Integration für $k = +1$

$$\int \frac{dS}{\sqrt{-S^2 + \frac{2\gamma M}{c^2} S}} = \int dT \tag{VIII.128}$$

$$= -\arcsin \frac{-2S + \frac{2\gamma M}{c^2}}{\frac{2\gamma M}{c^2}} \tag{VIII.129}$$

$$= T + const \quad \text{(Bronstein Nr. 241)} \tag{VIII.130}$$

$$\frac{S - \frac{\gamma M}{c^2}}{\frac{\gamma M}{c^2}} = \sin(T + const) \tag{VIII.131}$$

Wahl: $S = 0$ bei $T = 0 \rightarrow const = -\frac{\pi}{2}$

$$S - \frac{\gamma M}{c^2} = \frac{\gamma M}{c^2} \sin\left(T - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\gamma M}{c^2} \cos T \tag{VIII.132}$$

$$S = \frac{\gamma M}{c^2} - \frac{\gamma M}{c^2} \cos T \tag{VIII.133}$$

$$\rightarrow \quad c(t - t_0) = \pm \int S dT = \pm \frac{\gamma M}{c^2} (T - \sin T), \tag{VIII.134}$$

d.h. $S(t_0) = 0$ als Anfangsbedingung

- Parameterdarstellung der Lösung für $k = 1$:

$$S = +\frac{\gamma M}{c^2} (1 - \cos T) \tag{VIII.135}$$

$$c(t - t_0) = \pm \frac{\gamma M}{c^2} (T - \sin T) \tag{VIII.136}$$

- Integration für $k = -1$

$$\int \frac{dS}{\sqrt{S^2 + \frac{2\gamma M}{c^2}S}} = \int dT \tag{VIII.137}$$

$$= \int \frac{dS}{\sqrt{\left(S + \frac{\gamma M}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{\gamma M}{c^2}\right)^2}} \tag{VIII.138}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = Arch\frac{x}{a} + const \tag{VIII.139}$$

$$= Arch\frac{S + \frac{\gamma M}{c^2}}{\frac{\gamma M}{c^2}} = T + const \tag{VIII.140}$$

$$S + \frac{\gamma M}{c^2} = \frac{\gamma M}{c^2} ch(T + const) \tag{VIII.141}$$

Sei $S = 0$ bei $T = 0 \Rightarrow const = 0$

$$S = \frac{\gamma M}{c^2}(chT - 1) \tag{VIII.142}$$

$$\rightarrow \quad c(t - t_0) = \pm \int SdT = \pm\frac{\gamma M}{c^2}(shT - T) \tag{VIII.143}$$

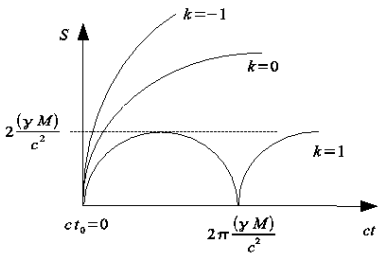
d.h. $S(t_0) = 0$ als Anfangsbedingung

- Parameterdarstellung der Lösung für $k = -1$:

$$S = \frac{\gamma M}{c^2}(chT - 1) \tag{VIII.144}$$

$$c(t - t_0) = \pm\frac{\gamma M}{c^2}(shT - T) \tag{VIII.145}$$

Diskussion der Lösungen



- Zykloide bei k = +1 , geschlossenes Modell
- k = 0 , k = -1 ständige Zunahme des Weltradius
- Weltanfang bei t_0 : $S(t_0) = 0$, d.h. Singularität

- nahe t_0 habe alle 3 Typen das gleiche Verhalten

$$S \approx \frac{\gamma M}{2c^2} T^2, \tag{VIII.146}$$

$$T = \left\{ \frac{6c^2}{\gamma M} c(t - t_0) \right\}^{\frac{1}{3}} \tag{VIII.147}$$

$$S \approx 3 \frac{\gamma M}{6c^2} \left(\frac{6c^2}{\gamma M} \right)^{\frac{2}{3}} \{c(t - t_0)\}^{\frac{2}{3}} \tag{VIII.148}$$

$$S \approx 3 \left(\frac{\gamma M}{6c^2} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \{c(t - t_0)\}^{\frac{2}{3}} \tag{VIII.149}$$

6 Kosmologische Rotverschiebung und Hubble - Konstante

Zeitabhängigkeit des Weltradius bzw. Skalenfaktors S(t) führt zu einer Rotverschiebung, der s.g. kosmologischen Rotverschiebung

- hat nichts zu tun mit einer Gravitationsrotverschiebung aufgrund des Gravitationsfeldes an Quelle oder Empfänger
- hat nichts zu tun mit Dopplerverschiebung aufgrund von Eigenbewegungen von Quelle oder Empfänger
- kosmolog. Rotverschiebung tritt in allen Robertson-Walker-Metriken auf, nicht nur im Friedman-Kosmos

Betrachtung zweier typischer Galaxien im einer RWM

$$ds^2 = S^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right\} - dct^2 \tag{VIII.150}$$

- Trajektorie der Galaxien $\xi^a = const$, also $r = const$, $\vartheta = const$, $\varphi = const$
- von erster Galaxie werde zur Zeit t_1 Licht ausgesandt, von zweiter Galaxie werde dieses Licht zur Zeit t_2 empfangen
- wegen Homogenität und Isotropie der RWM kann o.B.d.A. eine Lichttrajektorie betrachtet werden mit $d\vartheta = d\varphi = 0$

$$\rightarrow \quad 0 = ds^2 = S^2 \frac{dr^2}{1 - kr^2} - dct^2 \tag{VIII.151}$$

- Transformation $r \rightarrow \chi$ mit

$$r = \begin{cases} \sin \chi & \text{für} \quad k = 1 \\ \chi & \text{für} \quad k = 0 \\ sh\chi & \text{für} \quad k = -1 \end{cases} \tag{VIII.152}$$

- k=0:

$$dr = d\chi : \tag{VIII.153}$$
$$ds^2 = S^2 d\chi^2 - dct^2 = 0 \tag{VIII.154}$$

- k=1:

$$dr = \cos\chi d\chi : \tag{VIII.155}$$
$$ds^2 = S^2 d\chi^2 - dct^2 = 0 \tag{VIII.156}$$

- k=-1:

$$dr = ch\chi d\chi : \tag{VIII.157}$$
$$ds^2 = S^2 d\chi^2 - dct^2 = 0 \tag{VIII.158}$$

- folglich für jedes k

$$d\chi = \frac{dct}{S} \tag{VIII.159}$$

- Betrachtung zweier aufeinanderfolgender Wellenberge des Lichsignals; beide Wellenberge müssen von der Quelle zum Empfänger denselben Weg χ zurücklegen:

$$\chi = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dct}{S(ct)} = \int_{t_1+\delta t_1}^{t_2+\delta t_2} \frac{dct}{S(ct)} \tag{VIII.160}$$

- folglich

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \ldots - \int_{t_1+\delta t_1}^{t_2+\delta t_2} \ldots \tag{VIII.161}$$
$$= \left\{ \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \ldots + \int_{t_1+\delta t_1}^{t_2} \ldots \right\} - \left\{ \int_{t_1+\delta t_1}^{t_2} \ldots + \int_{t_2}^{t_2+\delta t_2} \ldots \right\} \tag{VIII.162}$$
$$= \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \frac{dct}{S} - \int_{t_2}^{t_2+\delta t_2} \frac{dct}{S} \tag{VIII.163}$$

- während der Zeitspannen δt_1 bzw. δt_2 (10^{-14}s für sichtbares Licht) ist S(ct) praktisch konstant:

$$0 = \frac{\delta t_1}{S(t_1)} - \frac{\delta t_2}{S(t_2)} \tag{VIII.164}$$

- Einführung der Frequenz $f = \frac{1}{\delta t}$

$$0 = \frac{1}{f_1 S(t_1)} - \frac{1}{f_2 S(t_2)} \tag{VIII.165}$$
$$\text{bzw:} \quad f(t)S(t) = const \tag{VIII.166}$$

Expandierender Kosmos: S wächst

→ f für vagabundierende Photonen schrumpft
→ fortgesetzte Rotverschiebung für im Kosmos vagabundierende Photonen

Definition der Rotverschiebung z wie im Abschnitt 4.6

$$z = \frac{f_1}{f_2} - 1 = \frac{f_{\text{Quelle}}}{f_{\text{Empfänger}}} - 1 \tag{VIII.167}$$

$$z = \frac{S(t_2)}{S(t_1)} - 1 = \frac{S(t_{\text{Empfang}})}{S(t_{\text{Quell}})} - 1 \quad \text{kosmolog. Rotversch.} \tag{VIII.168}$$

Expandierender Kosmos : $z > 0$

Darstellung von z mittels Wellenlänge $\lambda = \frac{c}{f}$

$$z = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{S(t_1)} \tag{VIII.169}$$

relative Dehnung der Wellenlänge wie Expansion des Kosmos

weitere Auswertung von

$$z = \frac{S(t_2)}{S(t_1)} - 1 \tag{VIII.170}$$

- Identifizierung von t_2 mit heute
- Entwicklung von $S(t)$ in Taylorreihe um t_2 :

$$S(t) = S(t_2) + S_{|t}(t_2) \cdot (t - t_2) + \frac{1}{2} S_{|t|t}(t_2)(t - t_2)^2 + \ldots \tag{VIII.171}$$

$$S(t) = S(t_2) \left\{ 1 + H(t - t_2) - \frac{q}{2} H^2 (t - t_2)^2 \ldots \right\} \tag{VIII.172}$$

mit der Hubble - Konstanten

$$H = \frac{S_{|t}(t_2)}{S(t_2)} = c \frac{\dot{S}(t_2)}{S(t_2)} \tag{VIII.173}$$

und dem Verzögerungsparameter oder auch Beschleunigungsparameter

$$q = -\frac{S_{|t|t}(t_2)}{S(t_2)} \frac{1}{H^2} = -c^2 \frac{\ddot{S}(t_2)}{S(t_2)} \frac{1}{c^2} \frac{S^2(t_2)}{\dot{S}^2(t_2)} \tag{VIII.174}$$

$$q = -\frac{\ddot{S}(t_2) S(t_2)}{\dot{S}^2(t_2)} \tag{VIII.175}$$

- Identifikation von t mit t_1

$$z = \frac{1}{1+H(t_1-t_2)-\frac{q}{2}H^2(t_1-t_2)^2+\ldots}-1 \tag{VIII.176}$$

$$z = \left\{1-H(t_1-t_2)+H^2(t_1-t_2)^2+\frac{q}{2}H^2(t_1-t_2)^2+\ldots\right\}-1$$

$$z \approx H(t_2-t_1)+\left(1+\frac{q}{2}\right)H^2(t_2-t_1)^2 \tag{VIII.177}$$

(Rotverschiebung in Abhängigkeit von Lichtlaufzeit)

Umrechnung auf Rotverschiebung-Abstands-Relation

- D sei Abstand zwischen sendender Galaxie und empfangener Galaxie
- wegen Homogenität und Isotropie wird sendende Galaxie in Ursprung der RWM positioniert, damit ist D als radialer Abstand zu berechnen ($d\vartheta = d\varphi = 0$) aus

$$ds^2 = S^2 d\chi^2 - dct^2 \;,\; dt = 0 \tag{VIII.178}$$

$$D = \int_1^2 ds = \int_1^2 S d\chi = S\chi \tag{VIII.179}$$

- χ ausdrücken durch Lichtlaufzeit über

$$\chi = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dct}{S(ct)} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dct}{S(t_2)\{1+H(t-t_2)+\ldots\}} \tag{VIII.180}$$

$$\chi = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dct}{S(t_2)} \{1+H(t-t_2)+\ldots\} \tag{VIII.181}$$

$$\chi = \frac{c(t_2-t_1)}{S(t_2)} + \frac{Hc(t_2-t_1)^2}{2S(t_2)} + \ldots \tag{VIII.182}$$

- folglich: heutiger Abstand $D(t_2)$

$$D(t_2) = S(t_2)\chi \tag{VIII.183}$$

$$D(t_2) \approx c(t_2-t_1) + \frac{Hc}{2}(t_2-t_1)^2 \tag{VIII.184}$$

- umstellen nach $t_1 - t_2$ und iterative Lösung

$$t_2 - t_1 \approx \frac{D(t_2)}{c} - \frac{H}{2}(t_2-t_1)^2 \approx \frac{D(t_2)}{c} - \frac{H}{2}\frac{D^2(t_2)}{c^2} \tag{VIII.185}$$

- Einsetzen in z liefert Rotverschiebung-Abstands-Relation

$$z \approx H\left\{\frac{D(t_2)}{c} - \frac{HD^2(t_2)}{2c^2}\right\} + \left(1+\frac{q}{2}\right)H^2\frac{D^2(t_2)}{c^2} \tag{VIII.186}$$

$$z = \frac{HD}{c} + \frac{H^2D^2}{c^2}\frac{1+q}{2} \tag{VIII.187}$$

- exp. Werte für H und q unsicher
- typisch

$$H = 50\frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} \tag{VIII.188}$$

$$0 \leq q \leq 1 \tag{VIII.189}$$

7 Kritische Massendichte

Ausgangspunkt: aus der Rotverschiebung-Abstands-Relation lassen sich H und q (im Prinzip) bestimmen

Einsetzen von

$$H = c\frac{\dot{S}}{S}, \tag{VIII.190}$$

$$q = -\frac{\ddot{S}S}{\dot{S}^2} \tag{VIII.191}$$

in die Feldgleichungen

$$2\frac{\ddot{S}}{S} + \frac{\dot{S}^2 + k}{S^2} = -\kappa p \tag{VIII.192}$$

$$3\frac{\dot{S}^2 + k}{S^2} = \kappa c^2 \rho \tag{VIII.193}$$

bzw:

$$6\frac{\ddot{S}}{S} = -\kappa(c^2\rho + 3p) \tag{VIII.194}$$

ergibt

$$6qH^2 = c^2\kappa(c^2\rho + 3p) \tag{VIII.195}$$

$$3H^2 = c^4\kappa\rho - c^2 3\frac{k}{S^2} \tag{VIII.196}$$

heutiger Kosmos: $p \ll \rho c^2$

$$6qH^2 = \kappa\rho c^4 \tag{VIII.197}$$

$$3H^2 = c^4\kappa\rho - 3\frac{k}{S^2} \tag{VIII.198}$$

$$\rightarrow \quad (2q-1)H^2 = \frac{1}{c^2}\frac{k}{S^2}, \tag{VIII.199}$$

d.h. $k = 0, \pm 1$ ist allein aus q bestimmbar:

$$\begin{aligned} q > \tfrac{1}{2} &\rightarrow k = +1, \quad \text{geschlossener Kosmos} \\ q < \tfrac{1}{2} &\rightarrow k = -1, \quad \text{offener Kosmos} \\ q = \tfrac{1}{2} &\rightarrow k = 0, \quad \text{offener Kosmos} \end{aligned} \tag{VIII.200}$$

dem Übergang vom offenen zum geschlossenen Kosmos ($q = \frac{1}{2}$) entspricht eine kritische Massendichte ρ_{krit} vermöge

$$6 \cdot \frac{1}{2} H = 3H = \kappa \rho_{krit} \tag{VIII.201}$$

$$\text{zu} \quad \rho_{krit} = \frac{3H^2}{c^4 \kappa} \tag{VIII.202}$$

allerdings: Unsicherheit für q ist noch zu groß, um q und damit k festzulegen

- wahrscheinlichste Werte

$$H = 70 \, \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}, \quad H^{-1} = 14 \cdot 10^9 yr \tag{VIII.203}$$

$$q = 1 \pm 1 \tag{VIII.204}$$

$$\rho = 3 \cdot 10^{-31} \, \text{g cm}^{-3} \quad (\text{ Faktor 10 als Unsicherheit}) \tag{VIII.205}$$

$$\rho_{krit} = 6 \cdot 10^{-30} \, \text{g cm}^{-3} \tag{VIII.206}$$

8 Einfluss der kosmologischen Konstanten

Ausgangspunkt sind die Gleichungen (VIII.54) und (VIII.55)

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{S}}{S} + \frac{1}{2} \frac{\dot{S}^2 + k}{S^2} &= -\frac{\kappa P}{2} + \frac{1}{2} \Lambda \\ \frac{\dot{S}^2 + k}{S^2} &= \frac{\kappa}{6} c^2 \rho + \frac{1}{6} \Lambda \end{aligned}$$

Differenzbildung liefert

$$\frac{\ddot{S}}{S} = -\frac{\kappa}{6} c^2 \left(\rho + \frac{3}{c^2} P \right) + \frac{1}{3} \Lambda \tag{VIII.207}$$

$$\frac{\dot{S}^2}{S^2} = -\frac{k}{S^2} + \frac{\kappa}{3} c^2 \rho + \frac{1}{3} \Lambda \tag{VIII.208}$$

Mit $\kappa = \frac{8\pi\ \gamma}{c^4}$, $K := \frac{c^2\ k}{S^2(t)}$, $a(t) := \frac{S(t)}{S(t_2)}$, $t_2 =$ heute
folgt

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi\ \gamma}{3c^3}\left(\rho + \frac{3}{c^2}P\right) + \frac{1}{3}\Lambda \tag{VIII.209}$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{1}{c^2}\ \frac{K}{a^2} + \frac{8\pi\ \gamma}{3c^2}\rho + \frac{1}{3}\Lambda \quad . \tag{VIII.210}$$

Die Kosmologische Konstante schreiben wir nun vermöge

$$\Lambda =: \frac{8\pi\ \gamma}{c^2}\rho_\Lambda \quad , \qquad P_\Lambda := -c^2\rho_\Lambda \tag{VIII.211}$$

ρ_Λ repräsentiert die kosmologische Konstante in Einheiten der Massendichte,

$$[\Lambda] = \frac{1}{\mathrm{m}^2} \quad , \qquad [\rho_\Lambda] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \quad . \tag{VIII.212}$$

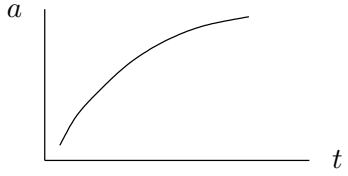
Folglich

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi\ \gamma}{3c^3}\left\{\rho + \rho_\Lambda + \frac{3}{c^2}(P + P_\Lambda)\right\} \tag{VIII.213}$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{1}{c^2}\ \frac{K}{a^2} + \frac{8\pi\ \gamma}{3c^2}(\rho + \rho_\Lambda) \quad . \tag{VIII.214}$$

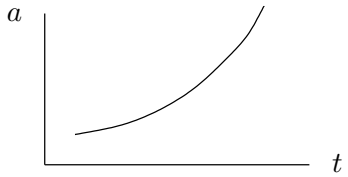
Aus der ersten Gleichung folgt:

(a) Für $\Lambda = 0$: $\ddot{a} < 0$



(b) Für $\Lambda < 0$: $\ddot{a} < 0$

(c) Für $\Lambda > 0$ und genügend groß: $\ddot{a} > 0$



Es ist insbesondere der aus einer positiven kosmologischen Konstanten folgende negative Druck P_Λ, der das Universum beschleunigt auseinander treibt!

Erinnerung: Positiver Druck führt immer zur Kontraktion, denn

$$\text{Druck} \mathrel{\hat{=}} \text{Energiedichte} \mathrel{\hat{=}} \text{Massendichte} \mathrel{\hat{=}} \text{Kontraktion} \ .$$

Expansion bedarf also immer eines negativen Drucks.

9 Massenparameter

Für weitere Umformungen wird statt der ersten Gleichung die Integrabilitätsbedingung (VIII.68) und deren Konsequenzen (VIII.78) und (VIII.107) benutzt. Wenn mit ρ_m die heutige Materiedichte (Materie im Sinne endlicher Ruhemassendichte) und ρ_r die heutige Massendichte der Strahlung bezeichnet wird, dann folgt

$$\rho(t) + \rho_\Lambda = \rho_m \; a^{-3} + \rho_r \; a^{-4} + \rho_\Lambda \quad . \tag{VIII.215}$$

Dann verbleibt

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{K}{c^2} \; a^{-2} + \frac{8\pi \; \gamma}{3c^2}(\rho_m \; a^{-3} + \rho_r \; a^{-4} + \rho_\Lambda) \tag{VIII.216}$$

Die linke Seite wird durch den Hubble-Parameter

$$H(t) = \frac{S_{|t}(t)}{S(t)} = c\frac{\dot{a}}{a}$$

ausgedrückt und liefert

$$H^2 = -Ka^{-2} + \frac{8\pi \; \gamma}{3}(\rho_m \; a^{-3} + \rho_r \; a^{-4} + \rho_\Lambda) \quad . \tag{VIII.217}$$

Es ist nun vorteilhaft normierte Dichteparameter einzuführen. Zur Normierung wird die heutige ($t = t_2,\ a(t_2) = 1,\ H(t_2) =: H_0,\ K = 0$) kritische Dichte

$$\rho_{krit}(t_2) = \frac{3 \; H_0^2}{8\pi \; \gamma} \tag{VIII.218}$$

verwendet. Dann folgt

$$\frac{H^2}{H_0^2} = -\frac{3 \; K}{8\pi \; \gamma \; \rho_{krit}} a^{-2} + \left(\frac{\rho_m}{\rho_{krit}} \; a^{-3} + \frac{\rho_r}{\rho_{krit}} \; a^{-4} + \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{krit}} \right) \quad . \tag{VIII.219}$$

Mit den konstanten Massen-Parametern

$$\Omega_m := \rho_m/\rho_{krit} \tag{VIII.220}$$

$$\Omega_r := \rho_r/\rho_{krit} \tag{VIII.221}$$

$$\Omega_\Lambda := \rho_\Lambda/\rho_{krit} \tag{VIII.222}$$

folgt

$$\frac{H^2}{H_0^2} = -\frac{3 \; K}{8\pi \; \gamma \; \rho_{krit}} a^{-2} + \left(\Omega_m \; a^{-3} + \Omega_r \; a^{-4} + \Omega_\Lambda\right) \quad . \tag{VIII.223}$$

Diese Relation wird nochmals für den heutigen Zeitpunkt $t = t_2$ aufgeschrieben zu

$$1 = -\frac{3 \; K}{8\pi \; \gamma \; \rho_{krit}} + \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda =: -\frac{3 \; K}{8\pi \; \gamma \; \rho_{krit}} + \Omega_0 \quad . \tag{VIII.224}$$

Ω_0 ist dann die Summe der heutigen Massen-Parameter; $\Omega_0 = 1$ korrespondiert zum kritischen Massen-Parameter (entspricht $K = 0$). Dies liefert

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_m \; a^{-3} + \Omega_r \; a^{-4} + (1 - \Omega_0) \; a^{-2} + \Omega_\Lambda \tag{VIII.225}$$

oder

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_m\ (1+z)^3 + \Omega_r\ (1+z)^4 + (1-\Omega_0)\ (1+z)^2 + \Omega_\Lambda \quad . \tag{VIII.226}$$

Mit dieser Beziehung kann H und damit $\dot{a}$ in die Vergangenheit (wachsende z) zurückverfolgt werden, wenn die heutige Materie-Zusammensetzung bekannt ist.

Insbesondere ist diese Beziehung geeignet, um das Weltalter t_2 seit $S(t=0)=0$ zu berechnen. Zunächst gilt

$$H = \frac{1}{S}\frac{dS}{dt} \quad , \qquad \frac{S(t)}{S(t_2)} = \frac{1}{1+z} \quad . \tag{VIII.227}$$

Dann folgt

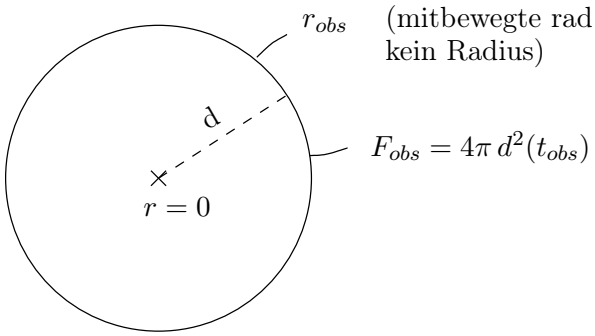
$$dt = \frac{dS}{S\,H} = -\frac{1+z}{S(t_2)\,H}\,\frac{S(t_2)\,dz}{(1+z)^2} = -\frac{dz}{(1+z)\,H(z)} \tag{VIII.228}$$

bzw.

$$t_2 = \int_0^{t_2} dt = -\int_\infty^0 \frac{dz}{(1+z)\,H(z)} = \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)\,H(z)} \quad . \tag{VIII.229}$$

10 Helligkeits-Rotverschiebungs-Beziehung

- Betrachtung zweier Galaxien ruhend in r, ϑ, φ



- Punktquelle (Galaxie) bei $r=0$ strahlt mit absoluter Helligkeit L zur Zeit t_{em} über Zeitspanne δt_{em} in Wellenlängenintervall $\delta\nu_{em}$ isotrop

- Empfänger (wir) bei r_{obs} empfängt abgestrahlte Energie zur Zeit t_{obs} über Zeitspanne δt_{obs} in Wellenlängenintervall $\delta\nu_{obs}$; abgestrahlte Energie wird als Energie L_{obs} pro Flächeneinheit empfangen

$$\rightarrow \qquad L\delta t_{em}\delta\lambda_{em} = L_{obs}\delta t_{obs}\delta\lambda_{obs}F_{obs} \tag{VIII.230}$$

- Zusammenhang von d und r_{obs}:
  Robertson-Walker-Metrik mit Mittelpunkt in abstrahlender Galaxie

$$ds^2 = S^2(t)\ \left\{\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)\right\} - c^2dt^2 \tag{VIII.231}$$

d ist der Euklidische Abstand zwischen den Koordinatenwerten $r = 0$ und r_{obs}; Euklidisch deshalb, weil die Oberfläche $F_{obs} = 4\pi\, d^2$ keine Notiz von einer eventuellen Krümmung des Raumes nimmt; vergleiche dazu den Umfang eines Kreises $U = 2\pi\, d$ für einen Kreis in der Ebene und einen Kreis auf einer Kugel; im Kugel-Fall ist d gerade nicht entlang eines Großkreises zu nehmen, sondern als ungekrümmter Abstand zwischen dem Kreismittelpunkt und dem Kreisrand auf der Kugeloberfläche, siehe folgendes Beispiel:

- Analogon: Betrachtung eines Riemann-Raumes mit zwei räumlichen Dimensionen und konstanter Krümmung

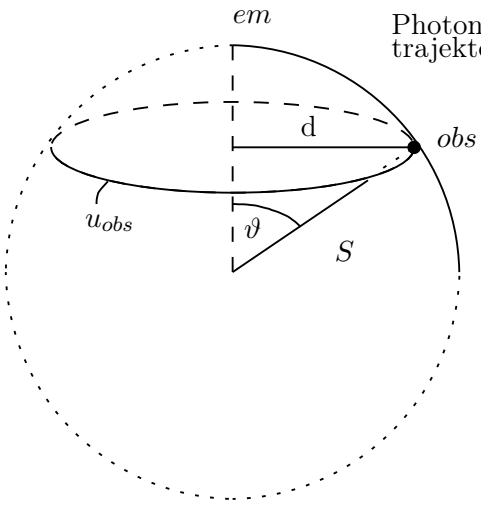
  (a) $k = +1:$ $\quad ds^2 = S^2(t)\,\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right) - dct^2$
  Die zwei räumlichen Dimensionen sind als Oberfläche einer Kugel im 3-d Raum eingebettet. ϑ Poldistanz, φ Azimut

  (b) $k = 0:$ $\quad ds^2 = dR^2 + R^2 d\varphi^2 - dct^2$
  Die zwei räumlichen Dimensionen spannen eine Ebene auf.
  R und φ sind Polarkoordinaten.
  Transformation $R \to r$ über

$$\begin{aligned} R &= S(t)\cdot r \quad , \qquad 0 \le r \le 1 \\ dR &= S dr \\ ds^2 &= S^2(t)\,\left(dr^2 + r^2 d\varphi^2\right) - dct^2 \end{aligned}$$

- Veranschaulichung der analogen 2-d Räume

  (a) $k = +1:$ $\quad \vartheta - \varphi-$Koordinatensystem wird so gelegt, das emittierende 2-d Galaxie im Nordpol liegt. Die observierende 2-d Galaxie liegt auf einem Breitenkreis.



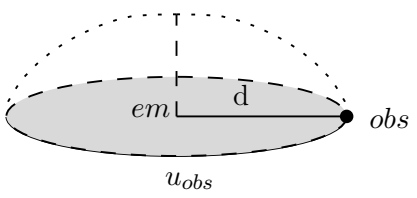
Die isotrop bei $\vartheta = 0$ emittierten Photonen erzeugen auf dem Kreis u_{obs} in jedem Punkt L_{obs}.

$$u_{obs} = 2\pi d$$

Aus geometrischen Verhältnissen liest man ab

$$d = S\sin\vartheta \quad .$$

  (b) $k = 0:$



Der Übergang von $k = 1$ zu $k = 0$ wird erreicht, indem die gekrümmte Polkappe in den schraffierten Kreis glatt gebügelt wird. d ändert sich nicht. In diesem Sinne ist d in beiden Fällen der euklidische Radius.

- Die beiden 2-d Fälle (a) und (b) sollen nun durch eine vereinheitlichte Formel erfasst werden und für d soll eine Berechnungsmöglichkeit entwickelt werden, die unabhängig von der geometrischen Vorstellung und somit auf höhere Dimensionen erweiterbar ist.

  (a) $k = +1:$ Transformation $\vartheta \to r$:

$$r = \sin\vartheta$$
$$dr = \cos\vartheta d\vartheta$$
$$d\vartheta = \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}$$
$$ds^2 = S^2\left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\varphi^2\right) - dct^2$$

  (b) $k = 0:$
$$ds^2 = S^2\left(dr^2 + r^2 d\varphi^2\right) - dct^2$$

  (a) und (b) zusammengefasst:
$$ds^2 = S^2\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\varphi^2\right) - dct^2$$

- d ist nun am einfachsten aus dem Fall (b), also $k = 0$ zu berechnen. Mit $d\varphi = 0,\ dt = 0,\ k = 0$ folgt
$$d = \int_{em}^{obs} ds = \int_0^{r_{obs}} S(t)dr = S \cdot r_{obs} \quad .$$
  Diese Berechnung von d ist direkt auf höhere Dimensionen verallgemeinerbar.

- Berechnung von d über RW-Metrik mit $k = 0$ bei $d\vartheta = d\varphi = dt = 0$ und der Definition $S(t_{obs}) =: S_0$:
$$d(t_{obs}) = \int_{'r=0'}^{'r'_{obs}} ds = \int_{r=0}^{r_{obs}} S(t_{obs})dr = S(t_{obs})\, r_{obs} = S_0\, r_{obs} \quad . \tag{VIII.232}$$
  Damit ist
$$F_{obs} = 4\pi\, S_0^2\, r_{obs}^2 \quad . \tag{VIII.233}$$

- Zusammenhang von r_{obs} und radialer Trajektorie der Photonen ($ds = 0$, $d\vartheta = 0$, $d\varphi = 0$):
$$S(t)\,\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = cdt \quad . \tag{VIII.234}$$
  Separieren der Gleichung ergibt
$$\int_0^{r_{obs}} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = c\int_{t_{em}}^{t_{obs}} \frac{dt}{S(t)} \quad . \tag{VIII.235}$$

Das linke Integral lässt sich für die drei möglichen Werte von k analytisch lösen. Wir definieren eine Hilfsfunktion $\sigma(x)$ mit

$$\sigma(x) := \begin{cases} \arcsin(x) \ ; & k = +1 \\ x \ ; & k = 0 \\ \mathrm{Arsinh}(x) \ ; & k = -1 \end{cases} \tag{VIII.236}$$

und erhalten

$$\sigma(r_{obs}) = c \int_{t_{em}}^{t_{obs}} \frac{dt}{S(t)} \quad . \tag{VIII.237}$$

Umrechnung auf Rotverschiebung z:

$$z = \frac{1}{a} - 1 = \frac{S(t_{obs})}{S(t)} - 1 =: \frac{S_0}{S(t)} - 1 \tag{VIII.238}$$

$$\begin{aligned} \sigma(r_{obs}) = c \int \frac{dt}{dS} \frac{dS}{S} &= \int \frac{1}{\frac{\dot{S}}{S} S^2} S_0 \frac{-dz}{(1+z)^2)} \\ &= -\frac{c}{S_0} \int_z^0 \frac{1}{H} dz = \frac{c}{S_0} \int_0^z \frac{dz}{H(z)} \end{aligned} \tag{VIII.239}$$

Um diese Gleichung nach r_{obs} aufzulösen invertieren wir $\sigma(r_{obs})$ für $k = \pm 1$ mittels einer weiteren Hilfsfunktion $\Sigma(x)$ mit

$$\Sigma(x) := \begin{cases} \sin(x) \ ; & k = +1 \\ x \ ; & k = 0 \\ \sinh(x) \ ; & k = -1 \end{cases} \tag{VIII.240}$$

und erhalten

$$r_{obs} = \Sigma \left(\frac{c}{S_0} \int_0^z \frac{dz}{H(z)} \right) \quad . \tag{VIII.241}$$

- Für $\Lambda = 0$ kann das Integral sogar analytisch ausgewertet werden. Es ergibt sich die Mattig-Relation (*Mattig, 1958*). Natürlich soll hier aber $\Lambda \neq 0$ betrachtet werden, da ja gerade Λ bestimmt werden soll. In diesem Fall ist das Integral numerisch auszuwerten.

- Diese Helligkeits-Rotverschiebungs-Beziehung wird nun wie folgt benutzt: Bekannt sind

L	bei Beobachtung von Standard-Kerzen (Supernovae vom Typ Ia)
L_{obs}	Beobachtungsgröße
z	Beobachtungsgröße
(H_0	Beobachtungsgröße)

  Gesucht sind

  $$\Omega_\Lambda, \ \Omega_m, \ \Omega_r, \ k, \ S_0, \ t_2 \ , (H_0)$$

- Helligkeits-Rotverschiebungs-Beziehung

$$L_{obs} = L\,\frac{\delta t_{em}}{\delta t_{obs}}\,\frac{\lambda_{em}}{\lambda_{obs}}\,\frac{1}{F_{obs}} \tag{VIII.242}$$

$$L_{obs} = L\,\frac{1}{1+z}\,\frac{1}{1+z}\,\frac{1}{4\pi S_0^2}\left\{\Sigma\left(\frac{c}{S_0}\int_0^z \frac{dz}{H(z)}\right)\right\}^2 \tag{VIII.243}$$

mit

$$H(z) = H_0\,\sqrt{\Omega_\Lambda + (1-\Omega_0)(1+z)^2 + \Omega_m(1+z^3) + \Omega_r(1+z)^4} \tag{VIII.244}$$

- Definition der Leuchtkraftentfernung d_L über

$$L_{obs} = \frac{L}{4\pi\, d_L^2} \tag{VIII.245}$$

$$\rightarrow \qquad d_L^2 = (1+z)^2\, S_0^2\, \Sigma^2\left(\frac{c}{S_0}\int_0^z \frac{dz}{H(z)}\right)$$

$$d_L = (1+z)\, S_0\, \Sigma\left(\frac{c}{S_0}\int_0^z \frac{dz}{H(z)}\right) \tag{VIII.246}$$

mit

$$S_0 = \frac{c}{H_0}\,\sqrt{\frac{k}{\Omega_0 - 1}} \tag{VIII.247}$$

- Bemerkung: bei $k = 0$ hebt sich S_0 heraus, da $\Sigma(x) = x$.

- Bei Beobachtung vieler Standard-Kerzen mit unterschiedlichen Rotverschiebungen z ergibt die Helligkeits-Rotverschiebungs-Beziehung entsprechend viele Gleichungen aus denen die gesuchten Größen durch Ausgleichsrechnung ermittelt werden. Es ergibt sich[1][2]

$$\begin{aligned}
\Omega_0 &= 1.02 \pm 0.02 \quad (K \approx 0)\\
\Omega_r &\approx 0\\
\Omega_\Lambda &\approx 0.73\\
\Omega_m &= 0.27 \pm 0.04\\
H_0 &= (71 \pm 4)\,\frac{\mathrm{km/s}}{\mathrm{Mpc}}\\
t_2 &= (13.7 \pm 0.2)\ \mathrm{Gyr}
\end{aligned}$$

- S_0 ist nicht bestimmbar wegen $K \approx 0$. Bei $k = 0$ kürzt sich S_0 innerhalb der Helligkeits-Rotverschiebungs-Beziehung weg.

[1] Je nach Methode (Helligkeits-Rotverschiebungs-Beziehung oder Analyse der kosmischen Hintergrundstrahlung) unterscheiden sich die Werte und die dazugehörigen Fehlerbalken leicht; der interessierte Leser sei daher für den aktuellen Forschungsstand an die Fachliteratur verwiesen.

[2] t_2 kann durch Gleichung (VIII.229) bei Kenntnis der anderen Parameter direkt bestimmt werden.

- Das dem nichtverschwindenden Wert Ω_Λ zugeschriebene Fluid nennt man *Dunkle Energie.*
- Der Wert $\Omega_m \approx 0.27$ kann nicht alleine durch die sichtbare baryonische Materie (Ω_b) und durch Schwarze Löcher erklärt werden. Der fehlende, heute noch nicht erklärbare Anteil, wird *Dunkle Materie* genannt (Ω_d). Dann ergibt sich

$$\Omega_m = \Omega_b + \Omega_d$$

mit

$$\Omega_b \approx 0.044 \pm 0.004$$
$$\Omega_d \approx 0.23$$

- Kandidaten sind für
  (a) Dunkle Energie die Vakuum-Fluktuationen
  (b) Dunkle Materie die WIMPs (Weakly Interacting Massive Particles) als aus der Supersymmetrie vorhergesagte aber noch nicht nachgewiesene Teilchen.

11 Flachheitsproblem

Die heute bestehende weitgehende Flachheit ($K \approx 0$) des Universums bedeutet, dass die Gesamtmassendichte $\rho(t_2)$ recht genau der heutigen kritischen Massendichte ρ_{krit} entspricht. Dieses Zusammenfallen der beiden Werte birgt allerdings ein Problem in sich. Um dieses herauszuarbeiten werden die Gleichungen des Abschnitts 'Massenparameter' umgeschrieben.

Gleichung (VIII.218) stellt die heutige kritische Massendichte dar. Gleichung (VIII.217) macht deutlich, dass zu früheren Zeiten die kritische Massendichte, die jetzt zur Vermeidung von Verwechselungen mit $\rho_{crit}(t)$ bezeichnet werden soll, bestimmt wird vermöge $K = 0$ zu

$$H^2 = \frac{8\pi\gamma}{3}\rho_{crit} \qquad \text{bzw.} \qquad \rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi\gamma} \quad . \tag{VIII.248}$$

Gleichung (VIII.217) wird jetzt für allgemeine Massendichten $\rho(t)$ umgeschrieben in

$$H^2 = -Ka^{-2} + \frac{8\pi\gamma}{3}\rho(t) \quad . \tag{VIII.249}$$

Diese Beziehung wird nun mit der zur jeweiligen Zeit t geltenden kritischen Massendichte $\rho_{crit}(t)$ normiert und es folgt

$$1 = -\frac{Ka^{-2}}{H^2} + \frac{\rho(t)}{\rho_{crit}(t)} \quad . \tag{VIII.250}$$

Es wird der Massenparameter

$$\Omega(t) := \frac{\rho(t)}{\rho_{crit}(t)} \tag{VIII.251}$$

eingeführt und H^2 aus (VIII.225) eingesetzt. Es ergibt sich

$$\Omega - 1 = \frac{K\, a^{-2}}{H_0^2\,(\Omega_\Lambda + (1-\Omega_0)a^{-2} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_r a^{-4})} \quad . \tag{VIII.252}$$

Wegen (VIII.224) gilt

$$\Omega_0 - 1 = \frac{K}{H_0^2} \quad , \tag{VIII.253}$$

woraus folgt

$$\Omega - 1 = \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_\Lambda a^2 + 1 - \Omega_0 + \Omega_m a^{-1} + \Omega_r a^{-2}} \tag{VIII.254}$$

bzw.

$$\Omega - 1 = \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_\Lambda (1+z)^{-2} + 1 - \Omega_0 + \Omega_m (1+z) + \Omega_r (1+z)^2} \quad . \tag{VIII.255}$$

Wir erinnern: $\Omega_0 = 1$ korrespondiert zur heutigen Flachheit; $\Omega = 1$ korrespondiert zur Flachheit zu beliebigen Rotverschiebungen bzw. beliebigen Zeiten.
Die heutige geringe Abweichung von der Flachheit sei $\epsilon_0 = \Omega_0 - 1$; die Abweichung von der Flachheit zu früheren Zeiten sei $\epsilon = \Omega - 1$. Somit ist die Flachheit zu früheren Zeiten

$$\epsilon = \frac{\epsilon_0}{\Omega_\Lambda a^2 + \epsilon_0 + \Omega_m a^{-1} + \Omega_r a^{-2}} \quad . \tag{VIII.256}$$

Für die Flachheit nahe dem Urknall ($a \to 0,\ \Omega_r \to 1$) ergibt sich

$$\epsilon \approx \frac{\epsilon_0}{\Omega_r a^{-2}} = \frac{\epsilon_0}{\Omega_r}\, a^2 \ll \epsilon_0 \quad . \tag{VIII.257}$$

Die Krümmung des Universums müsste demnach früher noch sehr viel kleiner gewesen sein als heute; sie wird immer winziger je jünger das Universum ist.

Abschätzungen:

(a)	$t = t_2$ (heute)	$\epsilon_0 \sim 10^{-2}$
(b)	$t \sim 1$ s (Nukleosynthese, $z \sim 10^8$)	$\epsilon \sim 10^{-18}$
(c)	$t \sim 10^{-43}$ s (Planck-Zeit, $z \sim 10^{32}$)	$\epsilon \sim 10^{-66}$

Das Kosmologische Standardmodell liefert keine Erklärung für diese extrem genaue Justierung der Massendichte auf den kritischen Wert. Erklärt wird dieses 'Flachheitsproblem' im Inflationsmodell, das hier im Rahmen der ART-Vorlesung jedoch nicht behandelt wird.

Zusammenfassung

Kosmologie

Anwendung der ART auf Kosmos als Ganzes

Kosmologisches Prinzip: Im Kosmos sind alle Positionen und Richtungen gleichwertig!

→ Raum konstanter Krümmung
→ Robertson - Walker - Metrik

$$\begin{aligned} ds^2 &= S^2(t)\left\{\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)\right\} - dct^2 \\ k &= 1, 0, -1 \end{aligned}$$

Energie - Impuls - Tensor

$$\begin{aligned} T_m^{\ n} &= \left\{\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right\} u_m u^n + P(t)\delta_m^n \\ u^n &= (0,0,0,c) \quad \text{(Ruhsystem)} \end{aligned}$$

Feldgleichungen

$$\begin{aligned} 2\frac{\ddot{S}}{S} + \frac{\dot{S}^2 + k}{S^2} &= -\kappa P \\ 3\frac{\dot{S}^2 + k}{S^2} &= \kappa c^2 \rho \end{aligned}$$

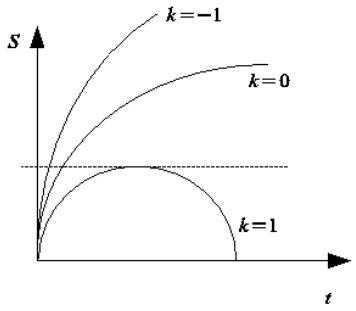
bzw.

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho + \frac{P}{c^2}} = -3\frac{\dot{S}}{S} \quad \text{(Integrabilität)}$$

Strahlungskosmos

$$\begin{aligned} P &= \frac{c^2}{3}\rho \quad \text{(Zustandsgleichung inkohär. elm. Str.)} \\ \rightarrow \quad c^2\rho S^4 &= A = const \\ S^2 &= -kc^2(t-t_0)^2 + 2c\sqrt{\frac{\kappa A}{3}}(t-t_0) \end{aligned}$$

Friedman Kosmos



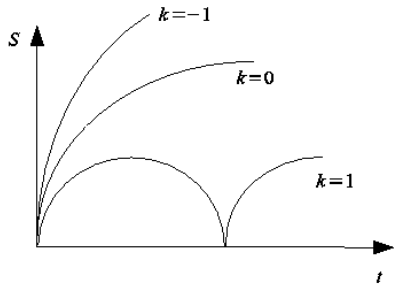
$$P = 0 \quad \text{(Zustandsgl. inkohärenter Materie)}$$

$$\rightarrow \quad \frac{4\pi}{3}\rho S^3 = M = const$$

$$k=0: \quad S = \frac{\gamma M}{2c^2}T^2; \qquad c(t-t_0) = \pm\frac{\gamma M}{6c^2}T^3$$

$$k=1: \quad S = \frac{\gamma M}{c^2}(1-\cos T); \quad c(t-t_0) = \pm\frac{\gamma M}{c^2}(T-\sin T)$$

$$k=-1: \quad S = \frac{\gamma M}{c^2}(chT-1); \quad c(t-t_0) = \pm\frac{\gamma M}{c^2}(shT-T)$$



Kosmologische Rotverschiebung

$$z = \frac{S(t_{\text{Empfang}})}{S(t_{\text{Quell}})} - 1$$

$z > 0$ für expandierenden Kosmos

$$z = \frac{HD}{c} + \frac{H^2D^2}{c^2}\frac{1+q}{2} \quad \text{(Rotverschiebungs - Abstands - Relation)}$$

mit

$$H = c\frac{\dot{S}}{S} \quad (\text{ Hubble - Konstante zu } t_{\text{Empfang}})$$

$$q = -\frac{\ddot{S}S}{\dot{S}^2} \quad (\text{Verzögerungsparameter zu } t_{\text{Empfang}})$$

Beobachtungswerte

$$\begin{aligned} H &\approx 70\ \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} \\ 0 \leq q &\leq 1 \end{aligned}$$

kritische Massendichte

$$(2q-1)H^2 = \frac{1}{c^2}\frac{k}{S^2} \rightarrow \begin{cases} q > \frac{1}{2} \ \hat{=}\ k = +1 & \text{(geschl.)} \\ q = \frac{1}{2} \ \hat{=}\ k = 0 & \text{(offen)} \\ q < \frac{1}{2} \ \hat{=}\ k = -1 & \text{(offen)} \end{cases}$$

$$q = \frac{1}{2} \ : \ \rho_{krit} \approx 6 \cdot 10^{-30} \text{g cm}^{-3}$$

Beobachtung:

$$\rho \approx 3 \cdot 10^{-31} \text{ g cm}^{-3} \text{ (Faktor 10 unsicher)}$$