Institut für Theoretische Physik
der Technischen Universität Braunschweig

Theoretische Mechanik

Skriptum zur Vorlesung

2. Auflage

Wintersemester 2003/04

Prof. Dr. U. Motschmann

Dipl.-Phys. T. Bagdonat

Braunschweig, 2002

Inhaltsverzeichnis

Satz: $\LaTeX 2_\varepsilon$

Ich danke allen, die an der Entstehung und Fehlersuche für dieses Skript mitgewirkt haben.

Braunschweig, 6. Februar 2004

Thorsten Bagdonat

Kapitel 0

Strukturierung der Mechanik

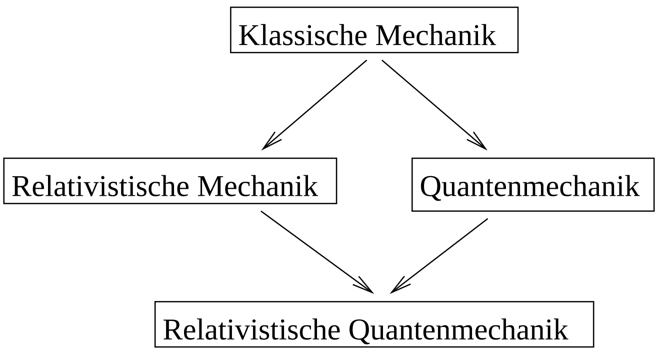
Die Mechanik ist ein Teil der Physik, der sich mit den Bewegungsgesetzen materieller Körper befaßt.

Sie ist die Disziplin der Physik, in der es zuerst und in relativ durchgängigem Maße gelang, die Zielstellung der Theoretischen Pysik zu verwirklichen,d.h.

1. die Aufstellung von Axiomen durch Verallgemeinerung von Erfahrungen und

2. die Ableitung spezieller Gesetze mit vielfältigen Erscheinungen.

1 Strukturierung nach historischen Gesichtspunkten



- Hier: Klassische Mechanik

- Grundlegung der Klassischen Mechanik durchNewton (Newtonsche Mechanik)

- Newton: Zusammenfassung der Leistungen von Galilei, Kepler, Descartes, Huygens u.a. und seiner eigenen Leistungen zu einem einheitlichen System am Ende d. 17. Jh.

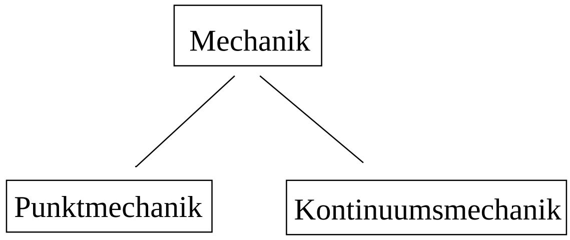
- Vielfältige Weiterentwicklung in der Folgezeit

- Annahme bis ins 19. Jh., daß gesamtes Naturgeschehen auf Newtonsche Mechanik zurückzuführen sei

- Klassischen Mechanik stieß zu Beginn des 20. Jh.an ihre Grenzen für

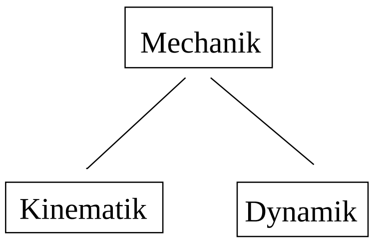
  1. große Geschwindigkeiten ($v \to c$) $\rightsquigarrow$ Relativistische Mechanik
  2. kleine Wirkung ($s \to \hbar$) $\rightsquigarrow$ Quantenmechanik

2 Strukturierung nach kompositorischen Gesichtspunkten



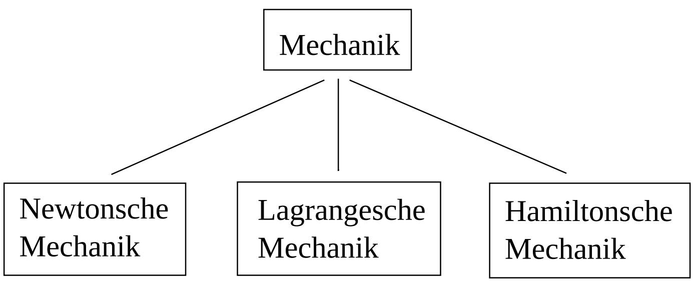
- Bewegung eines Körpers ist vollständig beschrieben, wenn die Bewegung aller seiner Teile angegeben werden kann (schwierig!)
- Einfachster Fall: Idealisierung eines Körpers zu Massenpunkt (ohne räumliche Ausdehnung, ohne innere Freiheitsgrade wie Schwingungen und Rotationen in sich)
- Zusammensetzung von Punktmassen zu Massenpunktsystemen, um kompliziertere Körper zu beschreiben (z.B. Starrer Körper) $\rightsquigarrow$ Punktmechanik (hier)
- Massenpunktmodelle für Flüssigkeiten, Gase und andere deformierbare Körper ungeeignet
- Auflösung der Massenpunkte zu einem Kontinuum $\rightsquigarrow$ Kontinuumsmechanik (hier nicht)

3 Strukturierung nach Bewegungsabläufen



- Kinematik unterscheidet Bewegungsabläufe ohne Rücksicht auf ihre Entstehung (Käfte werden nicht betrachtet)
- Dynamik: zieht Ursachen der Bewegung in Betracht
- Sonderfall der Dynamik: Statik (Ruhezustand, Gleichgewicht)

4 Struktuierung nach zugrundeliegenden Prinzipien



- Newtonsche Mechanik hier im engeren Sinne der Newtonschen Prinzipien
- Hier: Vorlesungsaufbau orientiert sich überwiegend an diesen Prinzipien

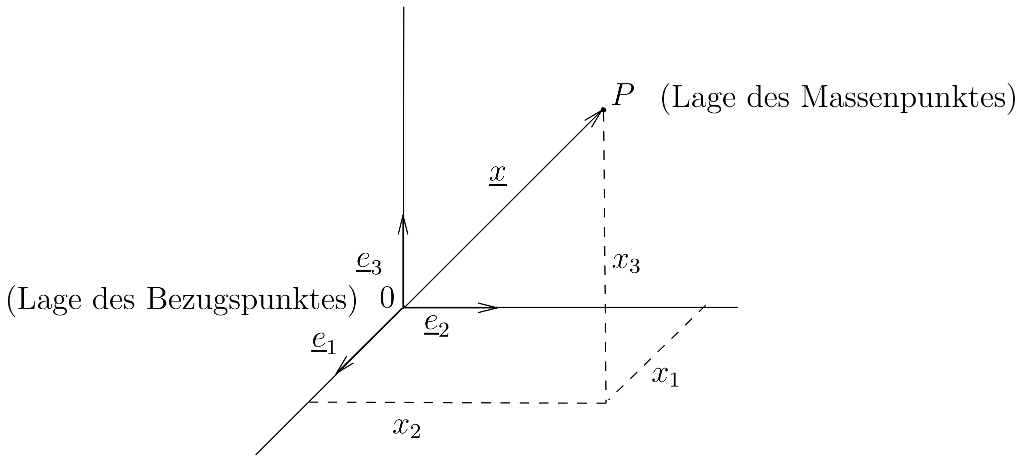
Kapitel I

Kinematik eines Massenpunktes

1 Beschreibung der Bewegung

Die Kinematik untersucht die Bewegung eines Massenpunktes ohne Rücksicht auf ihre Entstehung. Sie ist eine reine geometrische Bewegungslehre.

Vom Standpunkt der Kinematik aus ist die Bewegung eines Massenpunktes bestimmt, wenn zu jedem Zeitpunkt die Lage des Punktes relativ zu einem anderen Körper angebbar ist. Dieser andere Körper ist Bezugskörper und repräsentiert ein Bezugssystem (z.B. Labor, Erde, Sonne, etc.). In diesem Bezugssystem spannen wir ein Koordinatensystem auf. Gewählt werden können z.B. kartesische Koordinaten.



Wir definieren den Ortsvektor $\underline{x} \equiv \overrightarrow{0P}$ zu einem Massenpunkt bei P. In kartesischen Koordinaten gilt dann

$$\underline{x} \quad = \quad x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3 \tag{I.1}$$

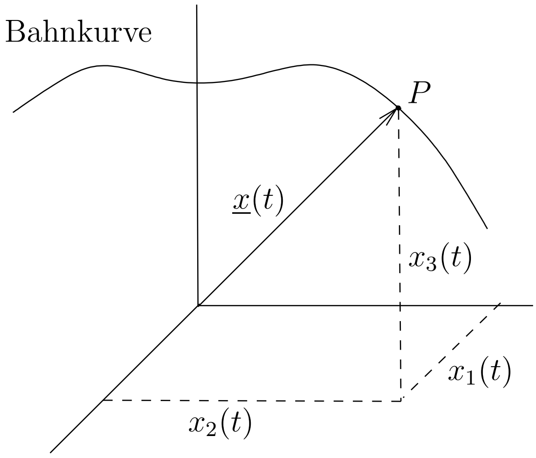
Die $\underline{e}_a$, $a = 1, 2, 3$ sind normierte Basisvektoren mit

$$\underline{e}_a\underline{e}_b \quad = \quad \delta_{ab}. \tag{I.2}$$

Die Bewegung von P wird dann durch die Zeitabhängigkeit

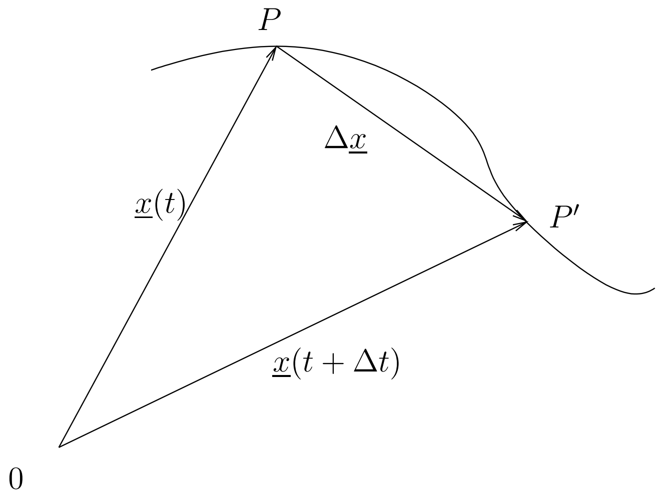
$$\underline{x}(t) = x_1(t)\underline{e}_1 + x_2(t)\underline{e}_2 + x_3(t)\underline{e}_3 \tag{I.3}$$

dargestellt. Die Bewegung ist bekannt, wenn $x_a(t)$ bekannt sind. $\underline{x}(t)$ heißt Bahnkurve oder Trajektorie.



Die Verrückung des Massenpunktes während eines Zeitintervalles Δt ist gegeben durch

$$\Delta\underline{x} \quad = \quad \overrightarrow{PP'}. \tag{I.4}$$



Die Geschwindigkeit $\underline{v}$ ist die Tangente an die Bahnkurve. Somit gilt

$$\underline{v} \quad \equiv \quad \dot{\underline{x}} \equiv \frac{d\underline{x}}{dt} \equiv d_t\underline{x} \tag{I.5}$$

$$\underline{v} \quad = \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\underline{x}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{x}(t+\Delta t) - \underline{x}(t)}{\Delta t} \tag{I.6}$$

In kartesischen Koordinaten schreiben wir

$$\underline{v} \quad = \quad \dot{\underline{x}} = d_t(x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3) \tag{I.7}$$

$$\underline{v} \quad = \quad \dot{x}_1\underline{e}_1 + \dot{x}_2\underline{e}_2 + \dot{x}_3\underline{e}_3 \tag{I.8}$$

Der Tangenteneinheitsvektor $\underline{t}$ wird über

$$\underline{v} \quad = \quad v\underline{t} \tag{I.9}$$

mit

$$|\underline{t}| \quad = \quad 1, \; v \equiv |\underline{v}| \tag{I.10}$$

eingeführt. Weiterhin definieren wir

$$s(t) \quad = \quad \int_{t_0}^{t} ds = \int_{t_0}^{t} |d\underline{x}| \tag{I.11}$$

als Bogenlänge der Bahnkurve zwischen P zur Zeit t und einem geeignet gewählten Anfangspunkt P_0 zur Zeit t_0. Anwendung der Kettenregel ergibt

$$\underline{v} \quad = \quad \frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{d\underline{x}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \tag{I.12}$$

woraus wir ablesen

$$\underline{t} \quad = \quad \frac{d\underline{x}}{ds} \tag{I.13}$$

$$v \quad = \quad \frac{ds}{dt} = d_t s. \tag{I.14}$$

Die Beschleunigung $\underline{a}$ ist definiert durch

$$\underline{a} \quad \equiv \quad \dot{\underline{v}} \equiv \ddot{\underline{x}} \equiv \frac{d^2\underline{x}}{dt^2} \equiv d_t^2 \underline{x} \tag{I.15}$$

$$\underline{a} \quad = \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{v}(t+\Delta t) - \underline{v}(t)}{\Delta t}. \tag{I.16}$$

Speziell in kartesischen Koordinaten ergibt sich

$$\underline{a} \quad = \quad \ddot{x}_1 \underline{e}_1 + \ddot{x}_2 \underline{e}_2 + \ddot{x}_3 \underline{e}_3. \tag{I.17}$$

Beachtung von Gleichung (I.9) führt auf

$$\underline{a} \quad = \quad d_t \underline{v} = d_t(v\underline{t}) \tag{I.18}$$

$$\quad = \quad \dot{v}\underline{t} + v\dot{\underline{t}}. \tag{I.19}$$

Wegen

$$\underline{t}^2 = \underline{t} \cdot \underline{t} = 1 \tag{I.20}$$

folgt bei Differentiation nach der Bogenlänge s

$$0 \quad = \quad d_s \underline{t}^2 = 2\underline{t} \cdot \frac{d\underline{t}}{ds} \tag{I.21}$$

Somit stehen $\underline{t}$ und $d_s\underline{t}$ senkrecht aufeinander,

$$\underline{t} \perp \frac{d\underline{t}}{ds}. \tag{I.22}$$

Es wird definiert

$$\kappa \quad \equiv \quad |d_s \underline{t}| \quad \text{Krümmung der Bahnkurve bei } P \tag{I.23}$$

$$R \quad = \quad \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{|d_s \underline{t}|} \quad \text{Krümmungsradius bei } P \tag{I.24}$$

$$\underline{n} \quad \equiv \quad \frac{d_s \underline{t}}{|d_s \underline{t}|} = \frac{1}{\kappa} d_s \underline{t} = R \cdot d_s \underline{t} \quad \text{Hauptnormaleneinheitsvektor.} \tag{I.25}$$

Dann folgt

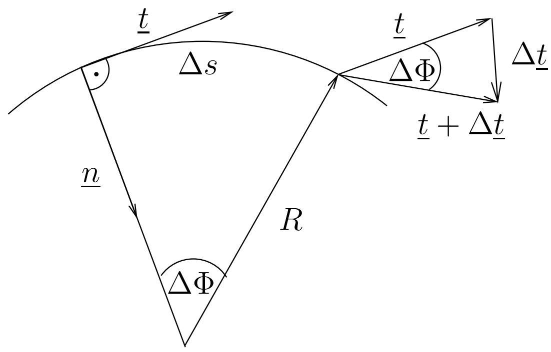
$$\dot{\underline{t}} \quad = \quad \frac{d\underline{t}}{dt} = \frac{d\underline{t}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{v}{R} \cdot \underline{n} \tag{I.26}$$

sowie

$$\underline{a} \;=\; \dot{v} \cdot \underline{t} + \frac{v^2}{R} \cdot \underline{n} \tag{I.27}$$

Die Beschleunigung enthält einen Anteil, der von der Betragsänderung der Geschwindigkeit ($\propto \dot{v}$) herrührt und einem Anteil, der von der Richtungsänderung ($\propto \kappa$) herrührt.

Erläuterung:
Bahnkurve bei P wird durch einen Kreisbogen approximiert



$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \Delta\phi = \frac{\Delta s}{R} \\[2ex] (2) & \Delta\phi = \frac{|\Delta \underline{t}|}{1} \end{array}\right\} \frac{|\Delta \underline{t}|}{\Delta s} = \left|\frac{\Delta \underline{t}}{\Delta s}\right| = \frac{1}{R} \tag{I.28}$$

$$\rightsquigarrow |d_s \underline{t}| = \frac{1}{R} = \kappa \tag{I.29}$$

Die durch $\underline{t}$ und $\underline{n}$ in P aufgespannte Ebene heißt Schmiegebene. Der Beschleunigungsvektor liegt immer in der Schmiegebene und zeigt in Richtung der konkaven Seite der Bahnkurve.

Der in P auf der Schmiegebene senkrecht stehende Einheitsvektor heißt Binormaleneinheitsvektor $\underline{b}$. Es gilt

$$\underline{b} \;\perp\; \underline{t} \quad , \quad \underline{b} \perp \underline{n} \tag{I.30}$$

$$\underline{b} \;=\; \underline{t} \times \underline{n}. \tag{I.31}$$

Die Vekoren $\{\underline{t}\ ,\ \underline{n}\ ,\ \underline{b}\}$ bilden dann das begleitende Dreibein und definiert das natürliche Koordinatensystem für $\underline{v}$ und $\underline{a}$.

Weitergehende Charakterisierungen von Bahnkurven, wie etwa die Torsion, folgen durch die Frenetsche Formeln.

2 Krummlinige Koordinatensysteme

Kartesische Koordinaten mit geraden Koordinatenlinien sind zwar besonders einfach, aber für viele Probleme sind krummlinige Koordinaten besser angepaßt. Krummlinige Koordinaten können schiefwinklig oder orthogonal sein. Wir betrachten den allgemeinen Fall schiefwinkliger krummliniger Koordinaten. In diesem allgemeinen Fall lassen sich zwei Arten von Koordinaten und Basisvektoren unterscheiden, die durch hoch- bzw. tiefgestellte Indizes unterschieden werden.

Für die folgenden Überlegungen wird davon ausgegangen, daß der Raum durch ein kartesisches KS beschrieben werden kann. Dies ist zwar nicht immer möglich, z.B. kann auf der Kugeloberfläche kein zweidimensionales kartesisches Koordinatensystem eingeführt werden, aber davon wollen wir hier absehen. Für Räume in denen dies somit möglich ist, werden jedem Punkt P die kartesischen Koordinaten x_1, x_2, x_3 zugeordnet. Weiterhin sind in jedem Punkt P die gleichen kartesischen Basisvektoren $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ und $\underline{e}_3$ definiert. Damit kann im kartesischen KS (und wir tun dies nur in diesem!) jedem Punkt P der "Ortsvektor"

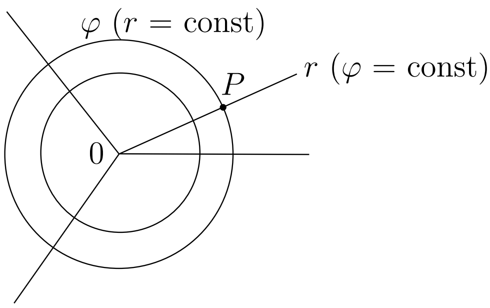
$$\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3 \tag{I.32}$$

zugeordnet werden.

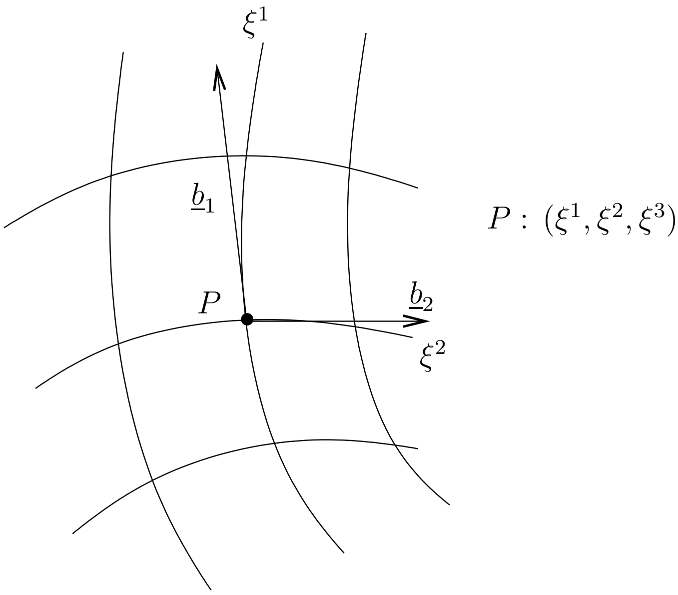
Für ein allgemeines KS, werden jedem Punkt P die Koordinaten $\{\xi^1, \xi^2, \xi^3\}$ zugeordnet. Variieren wir ξ^1 und lassen ξ^2 und ξ^3 konstant, dann entsteht eine Kurve, die wir ξ^1-Koordinatenlinie nennen (analog für ξ^2, ξ^3).

Beispiel Zylinderkoordinaten:

$$\xi^1 = \rho \quad , \quad \xi^2 = \varphi \quad , \quad \xi^3 = z. \tag{I.33}$$



2.1 Kovariante Basis und kontravariante Basis



Zwei Arten von Basisvektoren sind naheliegend.

1. Kovariante Basisvektoren $\underline{b}_a$, $a = 1, 2, 3$

$$\underline{b}_a = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \xi^a} = \sum_{b=1}^{3} \frac{\partial x_b}{\partial \xi^a} \underline{e}_b \tag{I.34}$$

   Die $\underline{b}_a$ schmiegen sich an die Koordinatenlinien an. Die $\underline{b}_a$ sind i.a. nicht normiert.
   Beispiel: Polarkoordinaten ($\xi^2 = \varphi$)

$$|\underline{b}_2| = |\frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi}| \neq 1 \tag{I.35}$$

   da $\frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi}$ längendimensioniert ist und schon aus Dimensionierungsgründen keine Normierung auf 1 vorliegen kann.

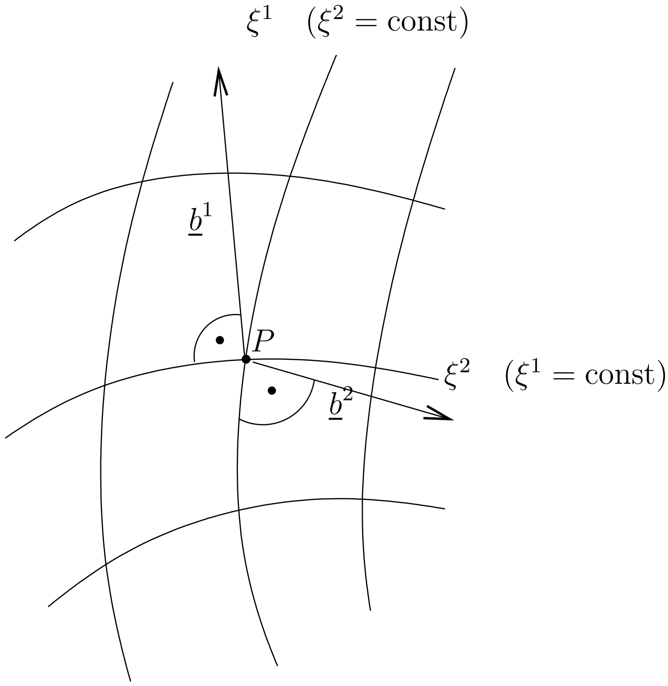
2. Kontravariante Basisvektoren $\underline{b}^a$, $a = 1, 2, 3$
   Die $\underline{b}^a$ werden durch Gradientenbildung auf der Fläche

$$\xi^a = const. \tag{I.36}$$

   durch

$$\underline{b}^a = \nabla \xi^a = \partial_{\underline{x}} \xi^a = \frac{\partial \xi^a}{\partial \underline{x}} = \sum_{b=1}^{3} \frac{\partial \xi^a}{\partial x_b} \underline{e}_b \tag{I.37}$$

   gebildet. $\underline{b}^a$ steht auf der Fläche $\xi^a = const$ senkrecht.



   Die $\underline{b}^a$ sind i.a. ebenfalls nicht normiert.

Bemerkung:

1. Für orthogonale Koordinaten gilt offenbar

$$\underline{b}^a \| \underline{b}_a. \tag{I.38}$$

2. Sowohl die $\underline{b}^a$ als auch die $\underline{b}_a$ ändern sich, wenn sich P ändert; die Betrachtungen sind immer lokal.

2.2 Metrischer Fundamentaltensor

Das Skalarprodukt

$$g_{ab} \quad \equiv \quad \underline{b}_a \cdot \underline{b}_b \tag{I.39}$$

heißt metrischer Fundamentaltensor. Offenbar gilt

$$g_{ab} = g_{ba}. \tag{I.40}$$

Desweiteren wird das Skalarprodukt

$$g^{ab} \quad \equiv \quad \underline{b}^a \cdot \underline{b}^b = g^{ba} \tag{I.41}$$

eingeführt sowie

$$g_a^b \quad \equiv \quad \underline{b}_a \cdot \underline{b}^b. \tag{I.42}$$

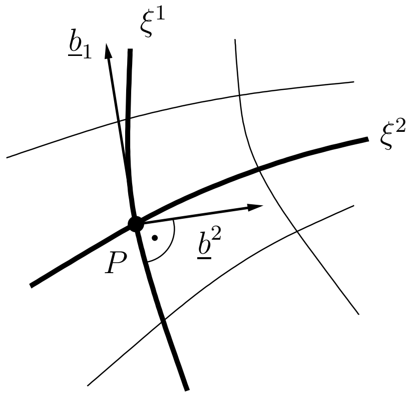
Dann gilt bei Anwendung der Kettenregel

$$g_a^b = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \xi^a} \cdot \frac{\partial \xi^b}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial \xi^b}{\partial \xi^a} = \delta_a^b \tag{I.43}$$

wobei δ_a^b das Kronecker-Symbol darstellt. Nach Konstruktion der ko- und kontravarianten Basen ist sofort klar, daß

$$\underline{b}_1 \perp \underline{b}^2$$

usw. gilt.



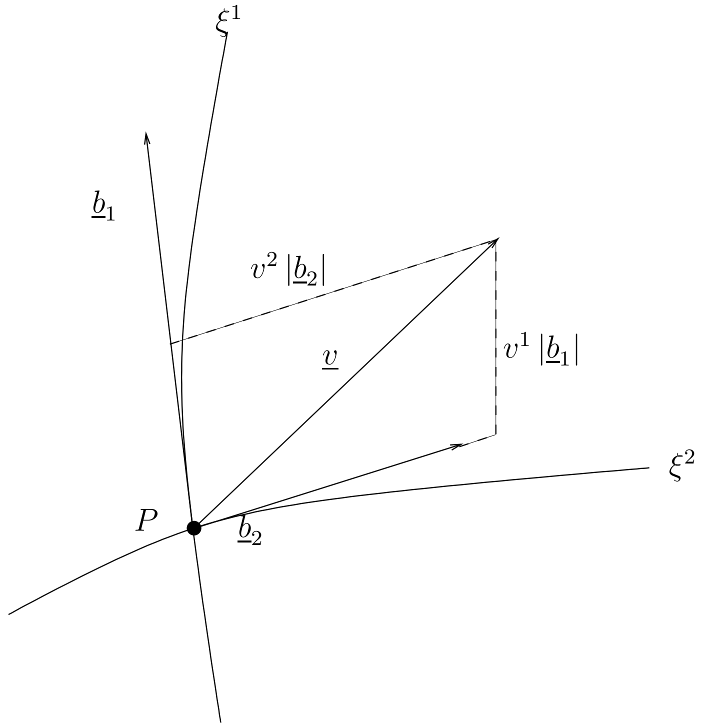
Ein beliebiger Vektor $\underline{v}$ im Punkt P kann sowohl nach der kovarianten als auch nach der kontravarianten Basis zerlegt beschrieben werden. Man schreibt:

$$\underline{v} = \sum_{a=1}^{3} v^a \cdot \underline{b}_a = \sum_{a=1}^{3} v_a \cdot \underline{b}^a \tag{I.44}$$

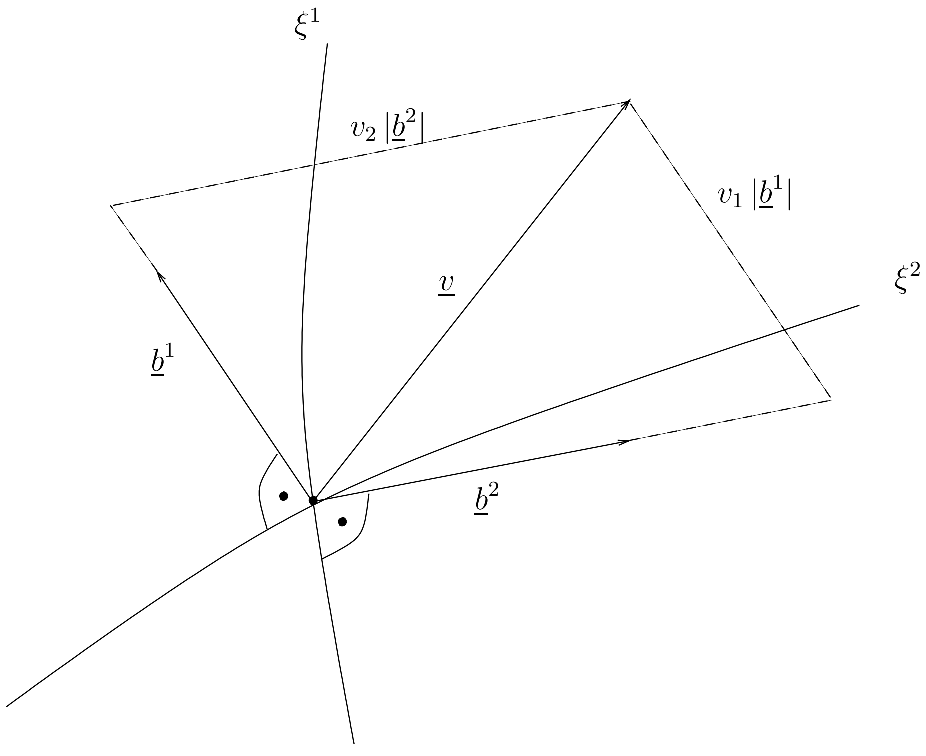
Wir vereinbaren die sog. Summenkonvention (auch Einsteinsche Summenkonvention genannt), wonach über zwei gleiche Indizes automatisch zu summieren ist ohne das Summationszeichen explizit aufzuschreiben, also

$$\underline{v} \quad = \quad v^a \cdot \underline{b}_a = v_a \cdot \underline{b}^a \tag{I.45}$$

v^a heißen die kontravarianten und v_a die kovarianten Komponenten von $\underline{v}$.



Darstellung von $\underline{v}$ in kovarianter Basis und kontravarianten Komponenten.



Darstellung von $\underline{v}$ in kontravarianter Basis und kovarianten Komponenten.

Es gilt:

$$v^a = \underline{v} \cdot \underline{b}^a \tag{I.46}$$
$$v_a = \underline{v} \cdot \underline{b}_a \tag{I.47}$$

Beweis:

$$\underline{v} \cdot \underline{b}^a = v^b \underbrace{\underline{b}_b \cdot \underline{b}^a}_{=\delta_b^a} = v^b \cdot \delta_b^a = v^a \tag{I.48}$$
$$\underline{v} \cdot \underline{b}_a = v_b \underbrace{\underline{b}^b \cdot \underline{b}_a}_{=\delta_a^b} = v_b \cdot \delta_a^b = v_a \tag{I.49}$$

Kovariante und kontravariante Komponenten eines Vektors $\underline{v}$ lassen sich ineinander umrechnen. Es gilt

$$v^a = \underline{v}\,\underline{b}^a = v_b\,\underline{b}^b\,\underline{b}^a = g^{ab}\,v_b \tag{I.50}$$

und analog

$$v_a = \underline{v}\,\underline{b}_a = v^b\,\underline{b}_b\,\underline{b}_a = g_{ab}\,v^b. \tag{I.51}$$

Damit kann man schreiben

$$\underline{v} = (\underline{v} \cdot \underline{b}^a)\,\underline{b}_a = (\underline{v} \cdot \underline{b}_a)\,\underline{b}^a. \tag{I.52}$$

Insbesondere gilt für $\underline{v} = \underline{b}^a$

$$\underline{b}^a = (\underline{b}^a \cdot \underline{b}^b)\underline{b}_b = g^{ab}\,\underline{b}_b \tag{I.53}$$

bzw. für $\underline{v} = \underline{b}_b$

$$\underline{b}_b = (\underline{b}_b \cdot \underline{b}_c)\,\underline{b}^c = g_{bc} \cdot \underline{b}^c. \tag{I.54}$$

Wegen

$$\delta_b^a = \underline{b}^a \cdot \underline{b}_b = g^{ad} \cdot \underline{b}_d \cdot g_{bc} \cdot \underline{b}^c \tag{I.55}$$
$$= g^{ad} \cdot g_{bc} \underbrace{\underline{b}_d \cdot \underline{b}^c}_{=\delta_d^c} \tag{I.56}$$
$$\delta_b^a = g^{ad} \cdot g_{bc} \cdot \delta_d^c \tag{I.57}$$
$$= g^{ac} \cdot g_{bc} \tag{I.58}$$

folgt

$$\delta_b^a = g^{ac} \cdot g_{cb}, \tag{I.59}$$

d.h. g^{ac} und g_{cb} als Matrizen aufgefaßt verhalten sich invers zueinander.

Bemerkung: Prinzip des richtigen Indexbildes

Der Indexkalkül ist so konstruiert, daß links und rechts der Gleichung das gleiche Indexbild auftreten muß. Summationsindizes ("gesättigte Indizes") sind nicht mitzuzählen, sondern nur die freien Indizes!!!

2.3 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\underline{v}$ und $\underline{w}$ im Punkt P berechnet sich zu

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = v_a \, \underline{b}^a \cdot w^b \, \underline{b}_b \tag{I.60}$$
$$\underline{v} \cdot \underline{w} = v_a \, w^b \, \delta^a_b = v_a \, w^a \tag{I.61}$$

bzw. analog

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = v^a \, w_a . \tag{I.62}$$

Dies kann auch geschrieben werden als

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = v^a \, g_{ab} \, w^b = g_{ab} \, v^a \, w^b \tag{I.63}$$

bzw. analog

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = g^{ab} \, v_a \, w_b . \tag{I.64}$$

Man beachte, daß i.a.

$$v^a \, w^a \neq \underline{v} \, \underline{w} \neq v_a \, w_a \tag{I.65}$$

gilt.

2.4 Vektorprodukt

Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\underline{v}$ und $\underline{w}$ im Punkt P ist definiert durch:

1. Der Betrag von $\underline{v} \times \underline{w}$ ist das Produkt der Längen von $\underline{v}$ und $\underline{w}$ und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels.
2. $\underline{v} \times \underline{w}$ steht senkrecht auf $\underline{v}$ und $\underline{w}$, wobei $\underline{v}$, $\underline{w}$ und $\underline{v} \times \underline{w}$ ein Rechtssystem bilden.

Die Formel

$$\underline{v} \times \underline{w} = \sqrt{g} \, \epsilon_{abc} \underline{b}^a \, v^b \, w^c \tag{I.66}$$

erfüllt gerade die Definition. Dabei sind

$$g \equiv \det(g_{ab}) \tag{I.67}$$

die Determinante des metrischen Fundamentaltensors und

$$\epsilon_{abc} = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \tag{I.68}$$

das Levi-Civita-Symbol. Es ist vollständig antisymmetrisch in den Indizes mit $\epsilon_{123} = 1$. Vollständig antisymmetrisch bedeutet, daß beim Vertauschen zweier Indizes das Vorzeichen wechselt, also z.B.

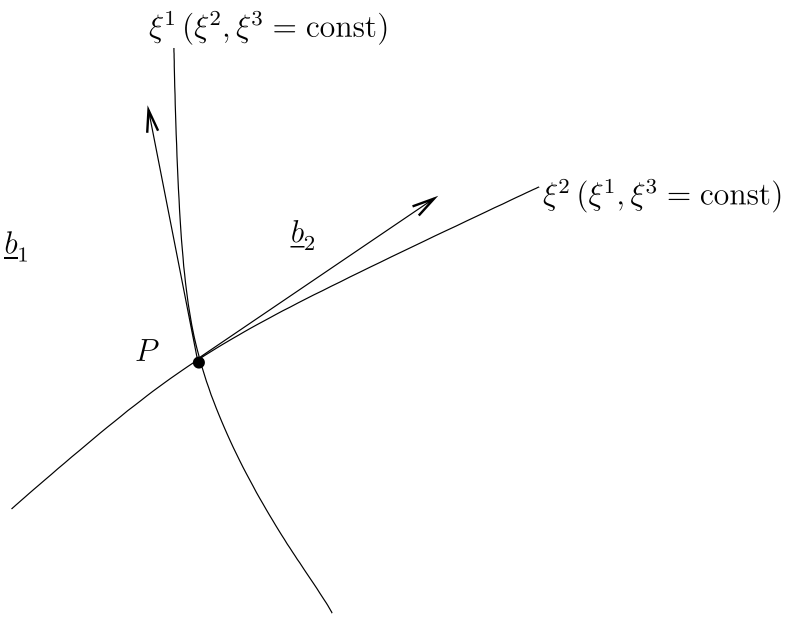
$$\epsilon_{213} = -1 \quad , \quad \epsilon_{231} = 1 \tag{I.69}$$
$$\epsilon_{113} = 0 \quad , \quad \epsilon_{222} = 0. \tag{I.70}$$

Wenn $\underline{v}$ und $\underline{w}$ selbst Basisvektoren sind, gilt z.B.:

$$\underline{v} \rightarrow \underline{b}_1 \,,\, \underline{w} \rightarrow \underline{b}_2 \tag{I.71}$$
$$\underline{b}_1 = 1 \cdot \underline{b}_1 + 0 \cdot \underline{b}_1 + 0 \cdot \underline{b}_3 \tag{I.72}$$
$$= \delta_1^c \underline{b}_c \tag{I.73}$$
$$\tag{I.74}$$

und somit

$$\underline{b}_1 \times \underline{b}_2 = \sqrt{g}\, \epsilon_{abc}\, \underline{b}^a\, \delta_1^b\, \delta_2^c \tag{I.75}$$
$$= \sqrt{g}\, \epsilon_{a12}\, \underline{b}^a \tag{I.76}$$
$$= \sqrt{g}\, \epsilon_{312} \underline{b}^3 \tag{I.77}$$
$$\underline{b}_1 \times \underline{b}_2 = \sqrt{g}\, \underline{b}^3 \tag{I.78}$$



$\underline{b}_1 \times \underline{b}_2$ zeigt in die Ebene hinein und stimmt mit der Richtung von $\underline{b}^3$ überein.

Analgog gilt

$$\underline{b}_2 \times \underline{b}_3 = \sqrt{g}\, \underline{b}^1 \tag{I.79}$$
$$\underline{b}_3 \times \underline{b}_1 = \sqrt{g}\, \underline{b}^2. \tag{I.80}$$

Weiterhin folgt

$$\underline{b}_1 \times \underline{b}_2 = \sqrt{g}\, \underline{b}^3 \quad | \cdot \underline{b}_3 \tag{I.81}$$
$$\underbrace{(\underline{b}_1 \times \underline{b}_2)\, \underline{b}_3}_{\substack{\text{Spatprodukt,} \\ \text{gemischtes Produkt}}} = \sqrt{g}\, \underline{b}^3\, \underline{b}_3 = \sqrt{g} \tag{I.82}$$

sowie analoge Formeln durch zyklische Vertauschung der Indizes. Offensichtlich handelt es sich bei $\sqrt{g}$ um das Volumen des von den kovarianten Basisvektoren aufgespannten Parallelepipeds.

Es soll zur Verifikation der Formel für das Vektorprodukt noch gezeigt werden, daß das gemischte

Produkt der kovarianten Basisvektoren tatsächlich die Wurzel aus der Determinante des metrischen Fundamentaltensors ergibt. Wir benutzen dazu die Laplacesche Multiplikationsregel für zwei gemischte Produkte

$$(\underline{a}_1 \times \underline{a}_2)\,\underline{a}_3 \cdot (\underline{b}_1 \times \underline{b}_2)\,\underline{b}_3 = \begin{vmatrix} \underline{a}_1 \cdot \underline{b}_1 & \underline{a}_1 \cdot \underline{b}_2 & \underline{a}_1 \cdot \underline{b}_3 \\ \underline{a}_2 \cdot \underline{b}_1 & \underline{a}_2 \cdot \underline{b}_2 & \underline{a}_2 \cdot \underline{b}_3 \\ \underline{a}_3 \cdot \underline{b}_1 & \underline{a}_3 \cdot \underline{b}_2 & \underline{a}_3 \cdot \underline{b}_3 \end{vmatrix} \tag{I.83}$$

Im Spezialfall $\underline{a}_c = \underline{b}_c$ folgt bereits

$$\{(\underline{b}_1 \times \underline{b}_2)\,\underline{b}_3\}^2 = |g_{ab}| \equiv \det(g_{ab}) \equiv g. \tag{I.84}$$

2.5 Gradient

$f(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = f(\xi^a)$ sei eine skalare Funktion im Punkt $P: (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$. Beim Übergang von P zu einem infinitesimal benachbartem Punkt P' mit

$$\overrightarrow{PP'} \equiv d\underline{x} \tag{I.85}$$

ändert sich f um das Differential df in P. Dann definiert die (koordinatenfreie) Relation

$$df = \frac{\partial f}{\partial \underline{x}}\,d\underline{x} \tag{I.86}$$

den Gradienten

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} \equiv \nabla f \equiv \partial_{\underline{x}} f \tag{I.87}$$

von f auf P. Andererseits gilt die (koordinatenbehaftete) Relation

$$df \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial \xi^a}\,d\xi^a. \tag{I.88}$$

Stellt man nun $d\underline{x}$ auch in Koordinaten dar, also in der kovarianten Basis, so gilt

$$d\underline{x} = \underline{b}_c\,d\xi^c. \tag{I.89}$$

Damit folgt

$$df \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial \underline{x}}\,\underline{b}_a\,d\xi^a = \frac{\partial f}{\partial \xi^a}\,d\xi^a. \tag{I.90}$$

Koeffizientenvergleich für beliebige $d\xi^b$ liefert

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{b}_a = \frac{\partial f}{\partial \xi^a}. \tag{I.91}$$

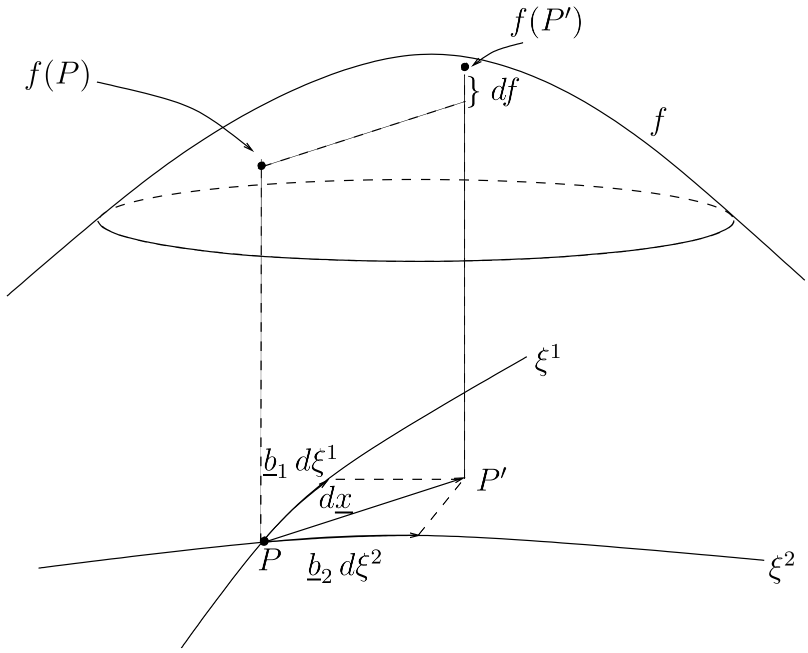
Diese Relation wird genau dann erfüllt, wenn gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = \underline{b}^c \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi^c} \tag{I.92}$$

Beweis:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}}\,\underline{b}_a = \underline{b}^c\,\frac{\partial f}{\partial \xi^c}\,\underline{b}_a = \frac{\partial f}{\partial \xi^c}\,\underbrace{\underline{b}^c\,\underline{b}_a}_{\delta^c_a} = \frac{\partial f}{\partial \xi^c}\,\delta^c_a = \frac{\partial f}{\partial \xi^a} \tag{I.93}$$

Beispiel: 2-dimensional $f(\xi^1, \xi^2)$

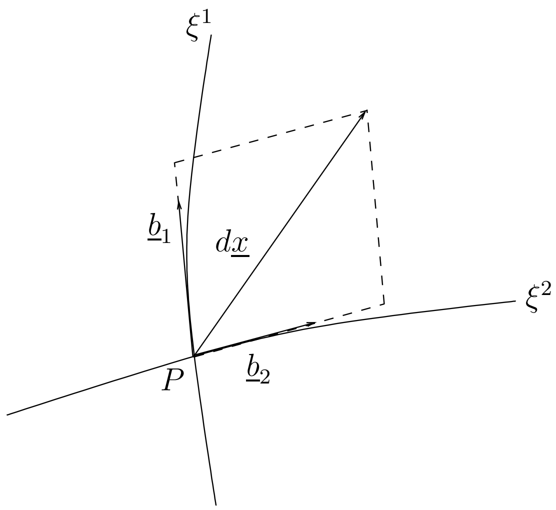


2.6 Geschwindigkeit und Beschleunigung

Für die Änderung $d\underline{x}$ des Ortes $\underline{x}$ gilt

$$d\underline{x} = \underline{b}_a \cdot d\xi^a = \underline{b}^a \, d\xi_a. \tag{I.94}$$

Die rechte Gleichung führt $d\xi_a$ ein.



Für die Bogenlänge folgt die metrische Fundamentalgleichung

$$ds^2 = d\underline{x} \cdot d\underline{x} = \underline{b}_a \cdot \underline{b}_b \, d\xi^a \, d\xi^b \tag{I.95}$$
$$ds^2 = g_{ab} \, d\xi^a \, d\xi^b \tag{I.96}$$
$$ds^2 = g^{ab} \, d\xi_a \, d\xi_b \tag{I.97}$$

Die Geschwindigkeit ergibt sich aus Gleichung (I.94) durch Division durch dt zu

$$\underline{v} = \frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{b}_a \frac{d\xi^a}{dt} = \underline{b}_a \, \dot{\xi}^a. \tag{I.98}$$

Die Beschleunigung berechnet man zu

$$\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \ddot{\xi}^a \, \underline{b}_a + \dot{\xi}^a \dot{\underline{b}}_a. \tag{I.99}$$

Die weitere Auswertung spezialisieren wir auf orthogonale Koordinaten, d.h. in jedem Punkt des Raumes gilt

$$\underline{b}_a \, \underline{b}_b \quad = \quad 0, \quad \text{für } a \neq b. \tag{I.100}$$

Wir hatten bereits festgestellt, daß für orthogonale Koordinaten außerdem

$$\underline{b}_a \quad \| \quad \underline{b}^a \tag{I.101}$$

gilt. Der metrische Fundamentaltensor wird damit diagonal, d.h.

$$g_{ab} = h_a^2 \, \delta_{ab} \tag{I.102}$$

woraus

$$ds^2 = h_1^2 \, (d\xi^1)^2 + h_2^2 \, (d\xi^2)^2 + h_3^2 \, (d\xi^3)^2 \tag{I.103}$$

folgt, wobei wir jetzt und im folgenden die Summenkonvention aufheben. Es folgt:

$$\underline{b}_a = \sum_{b=1}^{3} g_{ab} \, \underline{b}^b = h_a^2 \, \underline{b}^a. \tag{I.104}$$

Über

$$\hat{\underline{b}}_a \quad = \quad \frac{1}{h_a} \, \underline{b}_a = h_a \, \underline{b}^a = \hat{\underline{b}}^a \tag{I.105}$$

führen wir umskalierte Basisvektoren $\hat{\underline{b}}_a (= \hat{\underline{b}}^a)$ ein. Diese sind jetzt normiert, denn es gilt

$$\hat{\underline{b}}_a \cdot \hat{\underline{b}}^a \quad = \quad \frac{1}{h_a} \, \underline{b}_a \cdot h_a \, \underline{b}^a = \underline{b}_a \, \underline{b}^a = 1 \tag{I.106}$$

Für die Geschwindigkeit und Beschleunigung ergibt sich damit

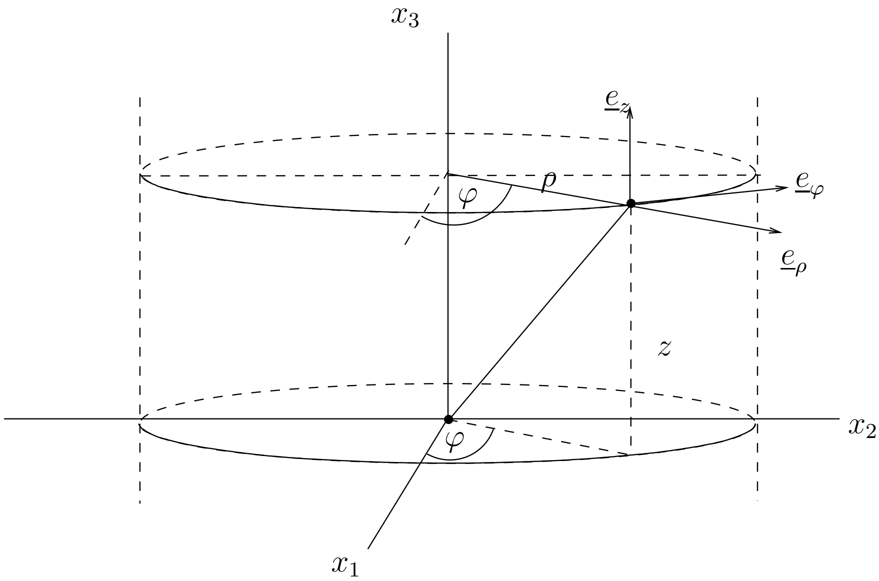
$$\underline{v} \quad = \quad \dot{\underline{x}} = \sum_{a=1}^{3} \dot{\xi}^a \, h_a \, \hat{\underline{b}}_a \tag{I.107}$$

$$\underline{a} \quad = \quad \ddot{\underline{x}} = \sum_{a=1}^{3} (d_t(\dot{\xi}^a \, h_a) \, \hat{\underline{b}}_a + \dot{\xi}^a \, h_a \dot{\hat{\underline{b}}}_a). \tag{I.108}$$

Die Berechnung der $\dot{\hat{\underline{b}}}_a$ kann auf der Basis ihrer Definitionsgleichungen erfolgen, ist aber i.a. recht umständlich. Für die unten diskutierten speziellen Koordinatensysteme greifen wir auf ihren Zusammenhang mit kartesischen Koordinaten zurück und vereinfachen damit die Berechnungen. Später werden wir mit den Lagrange-Gleichungen 2. Art eine sehr elegante Methode kennenlernen, um $\underline{a}$ in beliebigen krummlinigen Koordinaten zu berechnen.

2.7 Zylinderkoordinaten

$\xi^1 = \rho\,,\ \xi^2 = \varphi\,,\ \xi^3 = z$



Der Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten ist gegeben durch

$$x_1 = \rho\cos\varphi \tag{I.109}$$
$$x_2 = \rho\sin\varphi \tag{I.110}$$
$$x_3 = z. \tag{I.111}$$

Die Differentiale berechnen sich zu

$$dx_1 = \cos\varphi\,d\rho - \rho\,\sin\varphi\,d\varphi \tag{I.112}$$
$$dx_2 = \sin\varphi\,d\rho + \rho\,\cos\varphi \tag{I.113}$$
$$dx_3 = dz. \tag{I.114}$$

Es ergibt sich die metrische Fundamentalgleichung zu

$$ds^2 = \sum_{a=1}^{3}(dx_a)^2 = d\rho^3 + \rho^2\,d\varphi^2 + dz^2. \tag{I.115}$$

Hieraus ist abzulesen

$$h_1 = 1 \quad h_2 = \rho \quad h_3 = 1 \quad . \tag{I.116}$$

Die normierten Basisvektoren $\underline{\hat{b}}_a$ des Zylinderkoordinatensystems benennen wir um zu

$$\underline{\hat{b}}_1 \equiv \underline{e}_\rho\ ,\ \underline{\hat{b}}_2 \equiv \underline{e}_\varphi\ ,\ \underline{\hat{b}}_3 \equiv \underline{e}_z \quad . \tag{I.117}$$

Die Basisvektoren und ihre Ableitungen ergeben sich aus den Gln. (I.34) und (I.105) zu

$$\underline{e}_\rho = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \rho} = \cos\varphi\,\underline{e}_1 + \sin\varphi\underline{e}_2 \tag{I.118}$$
$$\underline{e}_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \underline{e}_\rho}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\,\underline{e}_1 + \cos\varphi\,\underline{e}_2 \tag{I.119}$$
$$\underline{e}_z = \frac{\partial \underline{x}}{\partial z} = \underline{e}_3 \tag{I.120}$$

und

$$\begin{aligned}
\dot{\underline{e}}_\rho &= -\sin\varphi\,\dot\varphi\,\underline{e}_1 + \cos\varphi\,\dot\varphi\,\underline{e}_2 = \dot\varphi\,\underline{e}_\varphi && \text{(I.121)}\\
\dot{\underline{e}}_\varphi &= -\cos\varphi\,\dot\varphi\,\underline{e}_1 - \sin\varphi\,\dot\varphi\,\underline{e}_2 = -\dot\varphi\,\underline{e}_\rho && \text{(I.122)}\\
\dot{\underline{e}}_z &= 0. && \text{(I.123)}
\end{aligned}$$

Für die Geschwindigkeit folgt aus (I.94), (I.116) und (I.117)

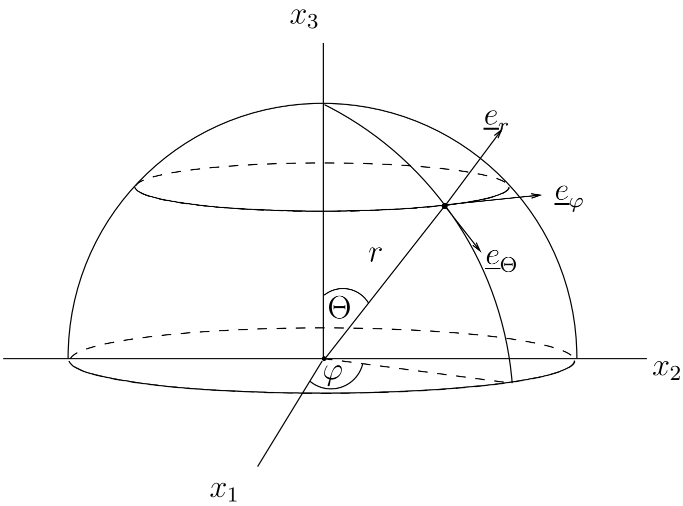
$$\underline{v} = \frac{d\underline{x}}{dt} = \dot\rho\,\underline{e}_\rho + \dot\varphi\,\rho\,\underline{e}_\varphi + \dot z\,\underline{e}_z \tag{I.124}$$

und für die Beschleunigung

$$\begin{aligned}
\underline{a} &= \dot{\underline{v}} = \ddot\rho\,\underline{e}_\rho + \dot\rho\,\dot{\underline{e}}_\rho + (\ddot\varphi\,\rho + \dot\varphi\,\dot\rho)\,\underline{e}_\varphi + \dot\varphi\,\rho\,\dot{\underline{e}}_\varphi + \ddot z\,\underline{e}_z && \text{(I.125)}\\
\underline{a} &= (\ddot\rho - \rho\,\dot\varphi^2)\,\underline{e}_\rho + (\ddot\varphi\,\rho + 2\,\dot\varphi\,\dot\rho)\,\underline{e}_\varphi + \ddot z\,\underline{e}_z. && \text{(I.126)}
\end{aligned}$$

2.8 Kugelkoordinaten

$\xi^1 = r\ ,\ \xi^2 = \theta\,,\ \xi^3 = \varphi$



Der Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\,\sin\theta\,\cos\varphi && \text{(I.127)}\\
x_2 &= r\,\sin\theta\,\sin\varphi && \text{(I.128)}\\
x_3 &= r\,\cos\theta. && \text{(I.129)}
\end{aligned}$$

Die Differentiale berechnen sich zu

$$\begin{aligned}
dx_1 &= \sin\theta\,\cos\varphi\,dr + r\,\cos\theta\cos\varphi\,d\theta - r\,\sin\theta\,\sin\varphi\,d\varphi && \text{(I.130)}\\
dx_2 &= \sin\theta\,\sin\varphi\,dr + r\,\cos\theta\sin\varphi\,d\theta + r\,\sin\theta\,\cos\varphi\,d\varphi && \text{(I.131)}\\
dx_3 &= \cos\theta\,dr - r\,\sin\theta d\theta. && \text{(I.132)}
\end{aligned}$$

Es ergibt sich die metrische Fundamentalgleichung zu

$$ds^2 = \sum_{a=1}^{3}(dx_a)^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\,\sin^2\theta\,d\varphi^2. \tag{I.133}$$

Hieraus ist abzulesen

$$h_1 \;=\; 1 \quad , \quad h_2 = r \quad , \quad h_3 = r\,\sin\theta. \tag{I.134}$$

Die normierten Basisvektoren $\underline{\hat{b}}_1 \equiv \underline{e}_r$, $\underline{\hat{b}}_2 = \underline{e}_\theta$, $\underline{\hat{b}}_3 = \underline{e}_\varphi$ und ihre Ableitungen berechnen sich wieder aus den Gln. (I.34) und (I.105) zu

$$\begin{aligned}
\underline{e}_r &= \frac{\partial \underline{x}}{\partial r} = \sin\theta\,\cos\varphi\,\underline{e}_1 + \sin\theta\,\sin\varphi\,\underline{e}_2 + \cos\theta\underline{e}_3 \quad \text{(radial gerichtet)} && \text{(I.135)}\\
\underline{e}_\theta &= \frac{1}{r}\,\frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} = \cos\theta\,\cos\varphi\,\underline{e}_1 + \cos\theta\,\sin\varphi\underline{e}_2 - \sin\theta\,\underline{e}_3 = \frac{\partial \underline{e}_r}{\partial \theta} \quad \text{(meridional gerichtet)} && \text{(I.136)}\\
\underline{e}_\varphi &= \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\,\underline{e}_1 + \cos\varphi\underline{e}_2 = \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial \underline{e}_r}{\partial \varphi} && \text{(I.137)}\\
&\quad \text{(entlang des Breitenkreises gerichtet)}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\underline{\dot{e}}_r &= (\cos\theta\,\cos\varphi\,\dot\theta - \sin\theta\,\sin\varphi\,\dot\varphi)\,\underline{e}_1 + (\cos\theta\,\sin\varphi\,\dot\theta + \sin\theta\,\cos\varphi\dot\varphi)\,\underline{e}_2 - \sin\theta\,\dot\theta\,\underline{e}_3 && \text{(I.138)}\\
&= \dot\theta\,\underline{e}_\theta + \dot\varphi\,\sin\theta\,\underline{e}_\varphi && \text{(I.139)}\\
\underline{\dot{e}}_\theta &= -\sin\theta\,\cos\varphi\,\dot\theta\,\underline{e}_1 - \cos\theta\,\sin\varphi\,\dot\varphi\,\underline{e}_1\\
&\quad -\sin\theta\,\sin\varphi\,\dot\theta\,\underline{e}_2 + \cos\theta\,\cos\varphi\,\dot\varphi\,\underline{e}_2 && \text{(I.140)}\\
&\quad -\cos\theta\,\dot\theta\,\underline{e}_3\\
&= -\dot\theta\,\underline{e}_r + \dot\varphi\,\cos\theta\,\underline{e}_\varphi && \text{(I.141)}\\
\underline{\dot{e}}_\varphi &= -\cos\varphi\,\dot\varphi\,\underline{e}_1 - \sin\varphi\,\dot\varphi\,\underline{e}_2 && \text{(I.142)}\\
&= -\dot\varphi\,\sin\theta\,\underline{e}_r - \dot\varphi\,\sin\theta\,\underline{e}_\theta. && \text{(I.143)}
\end{aligned}$$

Für die Geschwindigkeit folgt wiederum aus (I.94) und (I.134)-(I.137)

$$\underline{v} = \frac{d\underline{x}}{dt} = \dot r\,\underline{e}_r + r\,\underline{\dot{e}}_r = \dot r\,\underline{e}_r + \dot\theta\,r\,\underline{e}_\theta + \dot\varphi\,r\,\sin\theta\,\underline{e}_\varphi \tag{I.144}$$

und für die Beschleunigung

$$\begin{aligned}
\underline{a} &= \underline{\ddot{x}} = \underline{\dot{v}} = \ddot r\,\underline{e}_r + \dot r\,\underline{\dot{e}}_r + d_t(\dot\theta\,r)\,\underline{e}_\theta + \dot\theta\,r\underline{\dot{e}}_\theta + d_t(\dot\varphi\,r\,\sin\theta)\,\underline{e}_\varphi + \dot\varphi\,r\,\sin\theta\,\underline{\dot{e}}_\varphi && \text{(I.145)}\\
\underline{a} &= \ddot r\,\underline{e}_r + d_t(\dot\theta\,r)\,\underline{e}_\theta\\
&\quad + d_t(\dot\varphi\,r\,\sin\theta)\,\underline{e}_\varphi + \dot r\,(\dot\theta\,\underline{e}_\theta + \dot\varphi\,\sin\theta\underline{e}_\varphi) + \dot\theta\,r\,(-\dot\theta\,\underline{e}_r + \dot\varphi\,\cos\theta\,\underline{e}_\varphi) && \text{(I.146)}\\
&\quad + \dot\varphi\,r\,\sin\theta(-\dot\varphi\,\sin\theta\,\underline{e}_r - \dot\varphi\,\cos\theta\,\underline{e}_\theta)\\
\underline{a} &= (\ddot r - \dot\theta^2\,r - \dot\varphi^2\,r\sin^2\theta)\underline{e}_r\\
&\quad + (d_t(\dot\theta\,r) + \dot r\,\dot\theta - \dot\varphi^2\,r\cos\theta\,\sin\theta)\,\underline{e}_\theta && \text{(I.147)}\\
&\quad + (d_t(\dot\varphi\,r\,\sin\theta) + \dot r\,\dot\varphi\,\sin\theta + \dot\theta\,\dot\varphi\,r\,\cos\theta)\,\underline{e}_\varphi\\
\underline{a} &= (\ddot r - \dot\theta^2\,r - \dot\varphi^2\,r\sin^2\theta)\underline{e}_r\\
&\quad + (\ddot\theta\,r + 2\dot\theta\,\dot r - \dot\varphi^2\,r\cos\theta\,\sin\theta)\,\underline{e}_\theta && \text{(I.148)}\\
&\quad + (\ddot\varphi\,r\,\sin\theta + 2\dot\varphi\,\dot r\,\sin\theta + 2\dot\varphi\,\dot\theta\,r\cos\theta)\,\underline{e}_\varphi.
\end{aligned}$$

3 Grundlegende Typen von Bewegungen

Typische Fragestellungen in der Kinematik sind:

1. Die Bahnkurve eines Massenpunktes ist bekannt. Gesucht wird Geschwindigkeit und Beschleunigung.

2. Die Geschwindigkeit eines Massenpunktes in Abhängigkeit vom Ort und von der Zeit ist bekannt. Gesucht wird seine Bahnkurve.
3. Die Beschleunigung eines Massenpunktes in Abhängigkeit vom Ort, der Geschwindigkeit und der Zeit ist bekannt. Gesucht wird seine Bahnkurve

Die letzte Aufgabe ist die häufigste; sie schlägt bereits die Brücke zur Dynamik.

3.1 Gleichförmig geradlinige Bewegung

Es gilt

$$\dot{\underline{x}} = \underline{v} = const. \tag{I.149}$$

Somit verschwindet die Beschleunigung

$$\ddot{\underline{x}} = \underline{a} = 0. \tag{I.150}$$

Integration liefert die Bahnkurve

$$\underline{x}(t) = \underline{v}\,(t - t_0) + \underline{x}_0. \tag{I.151}$$

Es handelt sich bei der Bahn um eine Gerade.

3.2 Gleichförmig beschleunigte Bewegung

Es gilt

$$\ddot{\underline{x}} = \underline{a} = const. \tag{I.152}$$

Integration in zwei Schritten liefert

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{a}\,(t - t_0) + \underline{v}_0 \tag{I.153}$$

$$\underline{x}(t) = \frac{\underline{a}}{2}\,(t - t_0)^2 + \underline{v}_0\,(t - t_0) + \underline{x}_0 \tag{I.154}$$

Folglich liegt die Bahn in der durch $\underline{a}$ und $\underline{v}_0$ aufgespannten Ebene; die gleichförmig beschleunigte Bewegung ist eine ebene Bewegung.

Wir wollen diese ebene Bewegung in einem kartesischen Koordinatensystem beschreiben und spannen es so auf, daß seine x_1x_2-Ebene gerade die Bahnebene enthält. Außerdem drehen wir es so, daß die x_2-Achse in $\underline{a}$-Richtung zeigt. Dann gilt

$$\underline{a} = a\,\underline{e}_2 \tag{I.155}$$

$$\underline{v}_0 = v_{01}\,\underline{e}_1 + v_{02}\,\underline{e}_2. \tag{I.156}$$

Einsetzen in $\underline{x}(t)$ und Komponentenzerlegung ergibt

$$x_1 - x_{01} = v_{01}\,(t - t_0) \tag{I.157}$$

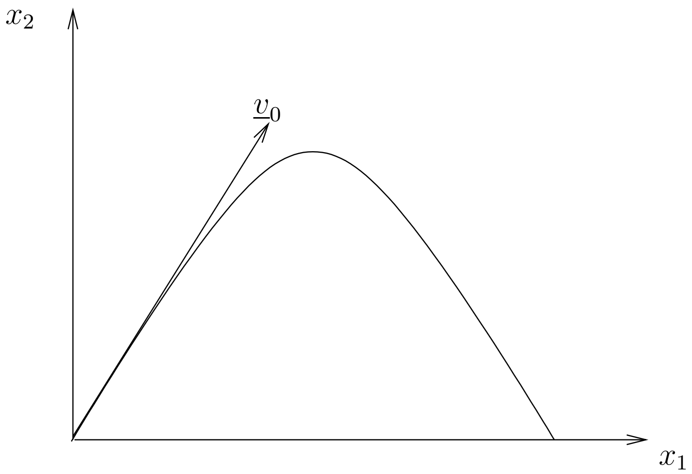
$$x_2 - x_{02} = \frac{a}{2}\,(t - t_0)^2 + v_{02}\,(t - t_0) \tag{I.158}$$

Elimination der Zeit liefert

$$x_2 - x_{02} = \frac{a}{2\,v_{01}^2}\,(x_1 - x_{01})^2 + \frac{v_{02}}{v_{01}}\,(x_1 - x_{01}) \tag{I.159}$$

Die Bahnkurve ist somit eine Parabel.

Beispiel: Wurf im Schwerefeld mit $a = -9,81\,\mathrm{m/s^2}$



Mit obigen Gleichungen lassen sich leicht folgende Größen berechnen: Steigzeit, Wurfdauer, Wurfhöhe, Wurfweite.

3.3 Gleichförmige Kreisbewegung

Eine gleichförmige Kreisbewegung ist gegeben, wenn sich der Massenpunkt auf einem Kreis mit konstantem Radius R und konstantem Geschwindigkeitsbetrag $v = |\underline{v}| = const.$ bewegt.

Wir verwenden Polarkoordinaten und legen das System so fest, daß die Kreisbahn in die Ebene $z = 0$ fällt. Die allgemeine Formel für die Geschwindigkeit in Zylinderkoordinaten (vgl. Abschnitt I.2.7)

$$\underline{v} = \dot{\rho}\,\underline{e}_\rho + \dot{\varphi}\,\rho\,\underline{e}_\varphi + \dot{z}\,\underline{e}_z \tag{I.160}$$

reduziert sich wegen $\dot{\rho} = 0$, $\dot{z} = 0$, $\rho = R$ zu

$$\underline{v} = \dot{\varphi}\,R\underline{e}_\varphi \tag{I.161}$$

$$|\underline{v}| = v = \dot{\varphi}\,R = const. \tag{I.162}$$

Folglich muß $\dot{\varphi} = \omega = const.$ gelten. ω ist die Winkelgeschwindigkeit um die z-Achse mit: $\omega = \frac{v}{R}$. Der Winkel φ berechnet sich zu

$$\varphi = \omega\,(t - t_0) + \varphi_0 \tag{I.163}$$

Die Beschleunigung

$$\underline{a} = (\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\varphi}^2)\,\underline{e}_\rho + (\ddot{\varphi}\,\rho + 2\,\dot{\varphi}\,\dot{\rho})\,\underline{e}_\varphi + \ddot{z}\,\underline{e}_z \tag{I.164}$$

reduziert sich auf

$$\underline{a} = -R\,\dot{\varphi}^2\,\underline{e}_\rho = -R\,\omega^2\,\underline{e}_\rho = -\frac{v^2}{R}\,\underline{e}_\rho. \tag{I.165}$$

Diese zum Mittelpunkt gerichtete Beschleunigung heißt Radialbeschleunigung.

Die Umlaufzeit T des Massenpunktes ist festgelegt durch $\varphi - \varphi_0 = 2\,\pi$, also

$$2\,\pi = \omega \cdot T \tag{I.166}$$

bzw.

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} = \frac{1}{f}. \tag{I.167}$$

Die Winkelgeschwindigkeit wird auch Kreisfrequenz und f Frequenz genannt.

Wir können die Geschwindigkeit $\underline{v}$ auch von der Darstellung in Zylinderkoordinaten in kartesische umrechnen. Dann gilt

$$\underline{v} = \omega\, R\, \underline{e}_\varphi = \omega\, R\, (-\sin\varphi\, \underline{e}_1 + \cos\varphi \underline{e}_2). \tag{I.168}$$

Die Komponentenzerlegung ergibt

$$\begin{aligned} v_1 &= -\omega\, R\, \sin\varphi && \text{(I.169)}\\ v_2 &= \omega\, R\, \cos\varphi, && \text{(I.170)} \end{aligned}$$

bzw.

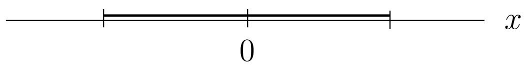
$$\begin{aligned} x_1 &= R\, \cos\varphi = R\, \cos\omega(t - t_0) && \text{(I.171)}\\ x_2 &= R\, \sin\varphi = R\, \sin\omega(t - t_0) = R\, \cos\left(t - t - \frac{\pi}{2}\right) && \text{(I.172)} \end{aligned}$$

für die Bahnkurve. Offensichtlich ist die gleichförmige Kreisbewegung eine Überlagerung zweier zueinander senkrecht stehender harmonischer Schwingungen mit der Phasendifferenz $\frac{\pi}{2}$.

3.4 Periodische Bewegungen

3.4.1 Harmonischer Oszillator

Ein Massenpunkt möge sich linear periodisch bewegen. Es wird somit nur 1 Koordinatenachse benötigt, die mit x bezeichnet wird. Die Bewegung erfolge um den Ursprung $x = 0$.



Die periodische Auslenkung ist harmonisch, wenn sie in der Form

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \alpha) \tag{I.173}$$

geschrieben werden kann. Für Geschwindigkeit und Beschleunigung folgen dann

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -A\,\omega\, \sin(\omega t + \alpha) && \text{(I.174)}\\ \ddot{x} &= -A\,\omega^2\, cos(\omega t + \alpha) = -\omega^2\, x. && \text{(I.175)} \end{aligned}$$

Die Beschleunigung ist proportional zur Auslenkung x. Somit gehorcht die harmonische Schwingung der Dgl.

$$\ddot{x} + \omega^2\, x = 0. \tag{I.176}$$

Physikalische Objekte, die harmonische Schwingungen ausführen, heißen harmonische Oszillatoren.

Häufig ist es zweckmäßig, harmonische Schwingungen komplex zu schreiben, also

$$x(t) \;=\; B\, e^{i\omega t} \quad , B = A\, e^{i\alpha}. \tag{I.177}$$

Der physikalische Prozeß wird nur vom Realteil repräsentiert (oder vom Imaginärteil). Bei linearen Überlagerungen und Prozessen setzt sich diese Repräsentation unmittelbar fort, und sie ist meist sehr vorteilhaft. Bei nichtlinearen Vorgängen werden Real- und Imaginärteile verkoppelt und es ist sorgfältig zu analysieren, welche Anteile dann den physikalischen Prozeß repräsentieren.

3.4.2 Überlagerung harmonischer Schwingungen gleicher Richtung und gleicher Frequenz

Die lineare Überlagerung der beiden Schwingungen

$$\tilde{x}(t) = \tilde{B}\, e^{i\omega t} \tag{I.178}$$

$$\tilde{\tilde{x}}(t) = \tilde{\tilde{B}}\, e^{i\omega t} \tag{I.179}$$

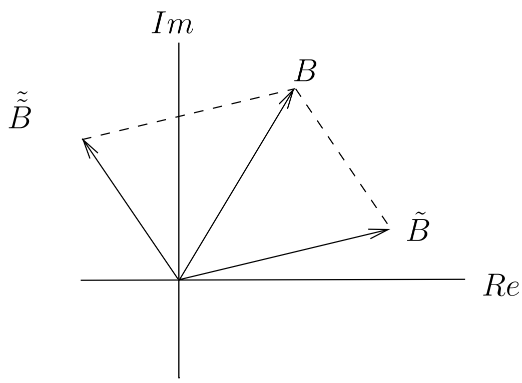
ergibt

$$x(t) = \tilde{x} + \tilde{\tilde{x}} = (\tilde{B} + \tilde{\tilde{B}})\, e^{i\omega t}. \tag{I.180}$$

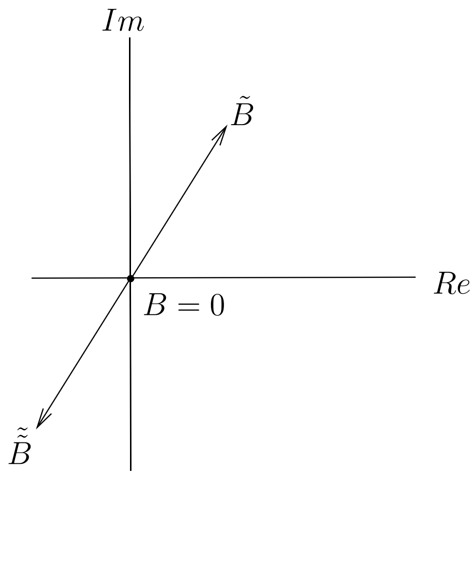
Das Resultat ist wiederum eine harmonische Schwingung mit der gleichen Frequenz ω und der komplexen Amplitude B. Die Überlagerung

$$B = \tilde{B} + \tilde{\tilde{B}} \tag{I.181}$$

folgt dem Gesetz der Addition komplexer Zahlen.



Die Ausbildung der Amplitude hängt insbesondere auch von den Phasenwinkeln ab. Bei $\tilde{A} = \tilde{\tilde{A}}$ und gegenphasiger Schwingung der einzelnen Anteile kommt es zur vollständigen Interferenz.



3.4.3 Überlagerung harmonischer Schwingungen gleicher Richtung und unterschiedlicher Frequenz

Die Überlagerung

$$x(t) \quad = \quad \tilde{B}\, e^{i\tilde{\omega}t} + \tilde{\tilde{B}}\, e^{i\tilde{\tilde{\omega}}t} \tag{I.182}$$

ist nun ein komplizierterer Vorgang. Wir führen Summen und Differenzgrößen ein:

$$\omega \quad = \quad \frac{1}{2}\,(\tilde{\omega} + \tilde{\tilde{\omega}}) \quad , \quad \Delta\omega = \frac{1}{2}\,(\tilde{\omega} - \tilde{\tilde{\omega}}), \tag{I.183}$$

$$\alpha \quad = \quad \frac{1}{2}\,(\tilde{\alpha} + \tilde{\tilde{\alpha}}) \quad , \quad \Delta\alpha = \frac{1}{2}\,(\tilde{\alpha} - \tilde{\tilde{\alpha}}). \tag{I.184}$$

Dann folgt

$$\tilde{\omega} = \omega + \Delta\omega \quad , \quad \tilde{\tilde{\omega}} = \omega - \Delta\omega, \tag{I.185}$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \Delta\alpha \quad , \quad \tilde{\tilde{\alpha}} = \alpha - \Delta\alpha. \tag{I.186}$$

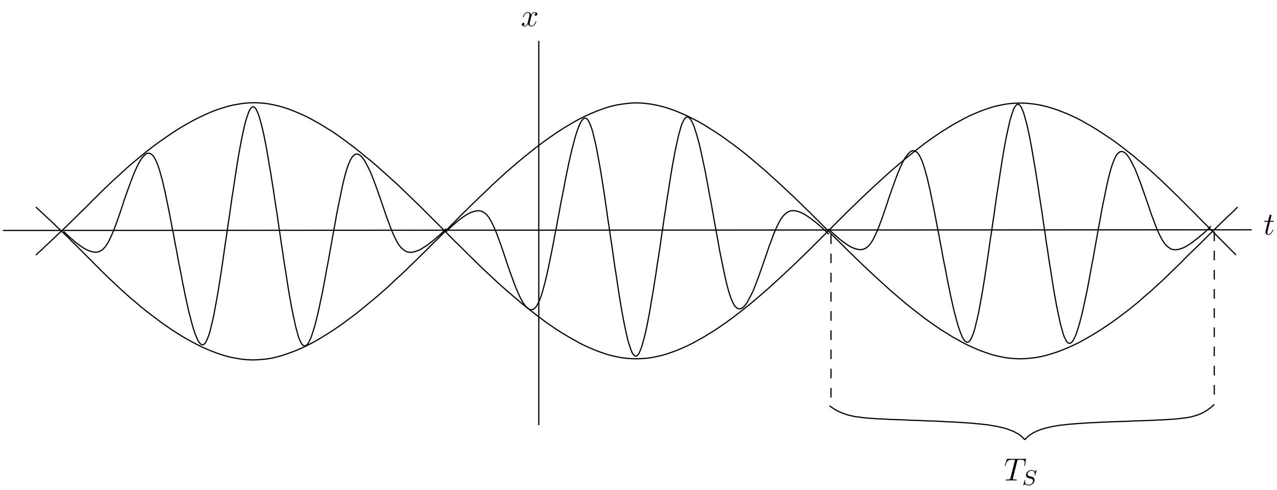
Wir beschränken uns auf den Spezialfall $\tilde{A} = \tilde{\tilde{A}}(\equiv A)$ und erhalten

$$x \quad = \quad A\left\{\mathrm{e}^{i(\omega t+\alpha+\Delta\omega t+\Delta\alpha)} + \mathrm{e}^{i(\omega t+\alpha-\Delta\omega t-\Delta\alpha)}\right\} \tag{I.187}$$

$$x \quad = \quad A\left\{\mathrm{e}^{i(\Delta\omega t+\Delta\alpha)} + \mathrm{e}^{-i(\Delta\omega t+\Delta\alpha)}\right\}\mathrm{e}^{i(\omega t+\alpha)} \tag{I.188}$$

$$x \quad = \quad 2\,A\,\cos(\Delta\omega\,t + \Delta\alpha)\,\mathrm{e}^{i\,(\omega\,t+\alpha)}. \tag{I.189}$$

Bei $\tilde{\omega} \approx \tilde{\tilde{\omega}}$, also bei $|\Delta\omega| \ll \omega$ kann der Kosinus der Amplitude zugeschlagen werden und es entsteht eine Schwebung.



Es gilt

$$T_S \Delta\omega = \pi. \tag{I.190}$$

Die Schwebungsfrequenz ω_S ergibt sich dann zu

$$\omega_S = \frac{2\,\pi}{T_S} = 2\,\Delta\omega. \tag{I.191}$$

Sind die periodischen Vorgänge noch komplizierter, ist die Darstellung unter Anwendung des Fourierschen Theorems geeignet. Wenn die Periodendauer T bzw. die Kreisfrequenz $\omega = \dfrac{2\,\pi}{T}$ ist, dann kann der periodische Vorgang in der Form einer komplexen Fourierreihe

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \, \mathrm{e}^{i\,n\,\omega\,t} \tag{I.192}$$

oder einer reellen Fourierreihe

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \, \cos n\omega t + b_n \, \sin n\omega t) \tag{I.193}$$

dargestellt werden. Man spricht auch von einer Fourierzerlegung oder Spektralzerlegung des periodischen Vorgangs.

3.4.4 Überlagerung harmonischer Schwingungen verschiedener Richtungen und gleicher Frequenz

Die x_1- und die x_2-Komponente des Ortsvektors eines Massenpunktes in der $x_1 - x_2-$ Ebene führt harmonische Schwingungen gleicher Frequenz ω aus. Dann gilt

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \, \cos(\omega t + \alpha_1), && \text{(I.194)} \\ x_2(t) &= A_2 \, \cos(\omega t + \alpha_2). && \text{(I.195)} \end{aligned}$$

Wir ermitteln nun die Bahnkurve in der $x_1 - x_2-$Ebene. Dazu wird gesetzt

$$\delta = \alpha_2 - \alpha_1 \tag{I.196}$$

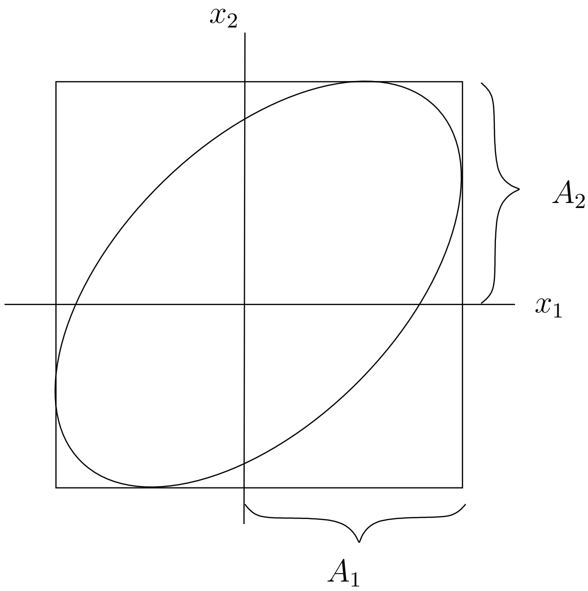
und es folgt

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{A_1} &= \cos(\omega t + \alpha_1) && \text{(I.197)} \\ \frac{x_2}{A_2} &= \cos(\omega t + \alpha_1) \, \cos\delta - \sin(\omega t + \alpha_1) \, \sin\delta && \text{(I.198)} \\ \frac{x_2}{A_2} &= \frac{x_1}{A_1} \cos\delta - \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{A_1}\right)^2} \, \sin\delta. && \text{(I.199)} \end{aligned}$$

Quadrieren ergibt

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_2}{A_2} - \frac{x_1}{A_2} \cos\delta\right)^2 &= \{1 - \left(\frac{x_1}{A_1}\right)^2\} \, \sin^2\delta && \text{(I.200)} \\ \left(\frac{x_1}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{A_2}\right)^2 &- 2\,\frac{x_1}{A_1}\,\frac{x_2}{A_2} \cos\delta = \sin^2\delta. && \text{(I.201)} \end{aligned}$$

Diese Gleichung beschreibt i.a. eine Ellipse.



In Abhängigkeit von der Phasendifferenz δ und vom Amplitudenverhältnis A_1/A_2 lassen sich eine Reihe von Extremfällen und verschiedene Umlaufrichtungen erzeugen. Die Ellipse kann zum Kreis oder zu einer Geraden entarten.

3.4.5 Überlagerung harmonischer Schwingungen unterschiedlicher Richtung und verschiedener Frequenz

Die Bahnkurven werden sehr vielfältig. Sie sind unter dem Begriff Lissajous-Figuren bekannt. Während die Parameterdarstellung der Bewegung des Massenpunktes

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \qquad \text{(I.202)}$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \qquad \text{(I.203)}$$

einfach ist, wird die Bahnkurve recht kompliziert und eine parameterfreie analytische Darstellung ist wenig sinnvoll. Wenn die Frequenzen in einem rationalen Verhältnis zueinander stehen, sind die Figuren geschlossene Kurven. Nimmt das Frequenzverhältnis einen irrationalen Wert an, sind die Figuren und damit die Bahnkurven nicht geschlossen.

Kapitel II

Newtonsche Mechanik

Im vorhergehenden Kapitel wurde die Bewegung eines Massenpunktes rein geometrisch beschrieben. Verschiedene Koordinatensysteme waren dazu ein geeignetes Hilfsmittel.

Im vorliegenden Kapitel werden die Ursachen der Bewegung mitbetrachtet; die Kinematik wird durch die Dynamik ersetzt.

1 Newtonsche Prinzipien

Prinzipien stellen die Grundgesetze des Wissenschaftsgebietes dar bzw. erlauben die unmittelbare Ableitung der Grundgesetze. Alle weiteren Gesetze folgen deduktiv aus den Grundgesetzen.

Prinzipien sind nicht ableitbar, sondern stellen das Kondensat vielfältiger Erfahrungen dar. Sie spielen die Rolle der Axiome in der Mathematik.

Newton formulierte in seinen "Principia" (1687) vier Prinzipien. Diese vier Prinzipien können komprimiert werden; das erste und das dritte können als Sonderfälle des zweiten betrachtet werden.

1.1 Trägheitsgesetz

Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, diesen Zustand zu ändern.

Bemerkungen:

1. Das Prinzip scheint im Widerspruch zu den konkreten Erfahrungen zu stehen, die wir auf der Erde machen. Noch ist jede Bewegung, die wir sich selbst überlassen zum Stillstand gekommen. Das Prinzip sagt nun, daß die scheinbar unbeeinflußte Bewegungen eben doch nicht unbeeinflußt sind und in allen solchen Fällen Kräfte nachgewiesen werden können.

2. Streng genommen ist das Prinzip in der angegebenen Formulierung unvollständig. Richtig ist zu formulieren: Es gibt Bezugssysteme, für die ein kräftefreier Körper in Ruhe oder in gleichförmig geradliniger Bewegung verharrt. Diese Bezugssysteme heißen Inertialsysteme.

1.2 Grundgesetz der Dynamik

Die auf einen Massenpunkt (eines Körpers) wirkende Kraft $\underline{F}$ ist gleich dem Produkt aus Masse m und Beschleunigung $\underline{a}$ des Massenpunktes:

$$m\,\underline{a} \quad = \quad \underline{F}. \tag{II.1}$$

Unter Benutzung des Impulses

$$\underline{p} = m\,\underline{v} = m\,\underline{\dot{x}} \tag{II.2}$$

nimmt das Grundgesetz die Form der Impulsbilanz

$$\underline{\dot{p}} \quad = \quad \underline{F} \tag{II.3}$$

an. Allerdings sind die beiden Formulierungen nur identisch, wenn die Masse m während der Bewegung als konstant angesehen werden kann:

$$\underline{\dot{p}} \quad = \quad d_t(m\,\underline{\dot{x}}) = m\,\underline{\ddot{x}} = m\,\underline{a} = \underline{F}. \tag{II.4}$$

Bei sehr großen Geschwindigkeiten, die sich der Lichtgeschwindigkeit c annähern ($v \to c$), zeigt sich, daß m nicht mehr als konstant angesehen werden kann. Dann gilt

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{II.5}$$

m_0 ist die sog. Ruhemasse. Für $v \ll c$ gilt $m \to m_0$. Für $v \to c$ verliert somit die klassische Mechanik ihre Gültigkeit, und sie muß durch die relativistische Mechanik ersetzt werden.

Auch bereits die Ruhemasse m_0 hat erstaunliche Eigenschaften (im weiteren lassen wir den Index 0 wieder weg, da wir uns auf $v \ll c$ und somit auf $m = m_0$ beschränken). Zum einen offenbart sich die Masse eines Körpers durch sein Gewicht G. Das Gewicht ist proportional zur Masse; die Masse ist festgelegt durch die Schwere des Körpers, und man nennt sie auch schwere Masse m_s. Zum anderen offenbart sich die Masse eines Körpers durch seinen Widerstand gegenüber beschleunigten Kräften, also als träge Masse m_t.

Die Erfahrung lehrt uns, daß beide Massen gleich sind:

$$m_s = m_t = m. \tag{II.6}$$

Durch diese Gleichheit wird ein Zusammenhang zwischen zwei völlig verschiedenen Eigenschaften der Materie hergestellt. Im Rahmen der klassischen Mechanik ist das höchst erstaunlich, zufällig und daher im Grunde unverständlich. Die Gleichheit von schwerer und träger Masse ist Ausgangspunkt für die Allgemeine Relativitätstheorie.

Maßeinheiten:

$[\mathrm{m}] = \mathrm{kg}$
$[\underline{a}] = \mathrm{m/s^2}$
$[\underline{\mathrm{F}}] = \mathrm{N}$ mit $1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s^2}$.

1.3 Wechselwirkungsgesetz (actio = reactio)

Die von einem Massenpunkt (eines Körpers) auf einen zweiten Massenpunkt (des gleichen oder eines anderen Körpers) ausgeübte Kraft $\underline{F}_{21}$ ist gleichgroß und entgegengesetzt der Kraft $\underline{F}_{12}$, die der zweite Massenpunkt auf den ersten Massenpunkt ausübt:

$$\underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21}. \tag{II.7}$$

Die Bedeutung dieses Prinzips wird weniger in der Mechanik eines eizelnen Massenpunktes deutlich als vielmehr in der Mechanik von Massenpunktsystemen.

1.4 Superpositionsprinzip

Unterliegt ein Massenpunkt gleichzeitig der Wirkung mehrerer Kräfte $\underline{F}_1, \underline{F}_2, \cdots$, so ist ihre Gesamtwirkung völlig gleichwertig der Wirkung ihrer vektoriellen Resultante $\underline{F}$, d.h.

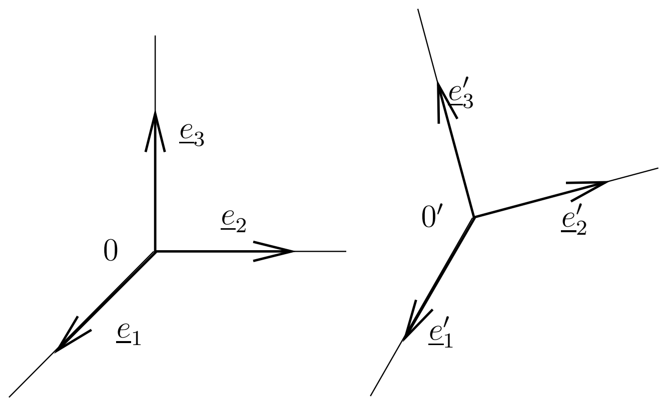
$$\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \cdots \quad . \tag{II.8}$$

2 Bewegte Bezugssysteme

Das erste Newtonsche Prinzip enthält eine Problematik. Das Trägheitsgesetz gilt nur in bestimmten Koordinatensystemen, die Inertialsysteme genannt werden. In diesem Sinne beinhaltet das Trägheitsgesetz die Existenzaussage, daß es eben solche Koordinatensysteme gibt. In diesem Abschnitt soll die Rolle von Inertialsystemen näher beleuchtet werden und zwar insbesondere dadurch, daß sie Nicht-Inertialsystemen gegenübergestellt werden.

2.1 Trägheitskräfte

Es wird angenommen Σ sei ein solches Inertialsystem und Σ' sei ein anderes System, daß sich relativ zu Σ beliebig bewegt. Wir können uns im allgemeinen unter Σ und Σ' zwei schiefwinklige Koordinatensysteme vorstellen. Da es hier aber auf die Bewegung der Koordinatensysteme zueinander ankommt, wollen wir uns die Sicht auf das Wesentliche nicht durch Schiefwinkligkeit erschweren und betrachten Σ und Σ' jeweils als kartesische Koordinatensysteme mit den Basen $\{\underline{e}_a\}$ und $\{\underline{e}'_a\}$.

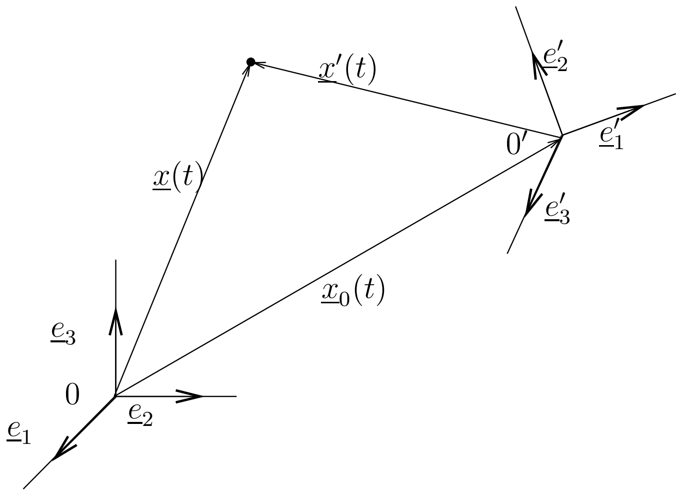


Nun wird die Bewegung eines Massenpunktes m vom einen (festen) Beobachter im Ursprung von Σ (also in 0) und von einem (festen) Beobachter im Ursprung von Σ' (also in 0') beschrieben. In Σ gelte

$$m\, d_t^2 \underline{x} = \underline{F}. \tag{II.9}$$

Herauszufinden ist das entsprechende Bewegungsgesetz in Σ'.

In Σ : Ort des Massenpunktes: $\underline{x}(t)$.
In Σ': Ort des Massenpunktes: $\underline{x}'(t)$.
Physikalisch handelt es sich natürlich um den gleichen Ort.



Es gilt:

$$\underline{x} = \underline{x}_0 + \underline{x}' \tag{II.10}$$

mit

$$\underline{x} = x_1\,\underline{e}_1 + x_2\,\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3 \tag{II.11}$$
$$\underline{x}' = x_1'\,\underline{e}_1' + x_2'\,\underline{e}_2' + x_3'\underline{e}_3' \tag{II.12}$$

Für den Beobachter in 0 läßt sich die Geschwindigkeit des Massenpunktes folgendermaßen aufschreiben:

$$d_t\underline{x} = d_t\underline{x}_0 + d_t\underline{x}' \tag{II.13}$$
$$d_t\underline{x} = d_t\underline{x}_0 + d_t(\sum_a x_a'\,\underline{e}_a') \tag{II.14}$$
$$= d_t\underline{x}_0 + \sum_a d_t x_a' \cdot \underline{e}_a' + \sum_a x_a'\,d_t\underline{e}_a'. \tag{II.15}$$

Die Basis $\{\underline{e}_a'\}$ ist natürlich mitzudifferenzieren, da sich das System Σ' für den Beobachter in 0 i.a. drehen kann. Man nennt

$$\underline{v}_{tr} \equiv d_t\underline{x}_0 \quad \text{Translationsgeschwindigkeit} \tag{II.16}$$
$$\underline{v} \equiv d_t\underline{x} \quad \text{Absolutgeschwindigkeit} \tag{II.17}$$
$$\underline{v}' = \sum_a d_t\underline{x}_a' \cdot \underline{e}_a' \quad \text{Relativgeschwindigkeit} \tag{II.18}$$

Für die Relativgeschwindigkeit schreibt man auch

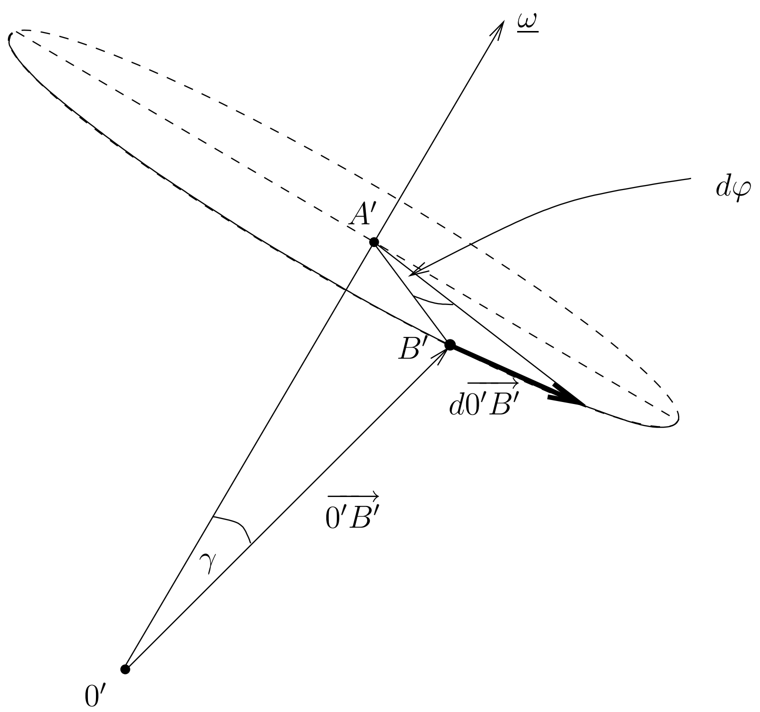
$$\underline{v}' = d_t'\underline{x}' = \sum_a d_t x_a'\underline{e}_a' \tag{II.19}$$

Der Strich am Differentiationssymbol soll zum Ausdruck bringen, daß die Basis $\{\underline{e}_a'\}$ nicht mitzudifferenzieren ist, da sie sich aus Sicht des Beobachters in 0' nicht ändert. Damit ergibt sich zunächst

$$d_t\underline{x} = d_t\underline{x}_0 + d_t'\underline{x}' + \sum_a x_a'\,d_t\underline{e}_a'. \tag{II.20}$$

Den letzten Term gilt es noch weiter zu bearbeiten. Er beschreibt eine Richtungsänderung der $\underline{e}'_a$ aus Sicht des Beobachters in 0. Diese Richtungsänderung der $\underline{e}'_a$ entspricht einer Rotation von Σ' um eine Achse durch 0'. Diese Rotation ist wie folgt zu beschreiben.

Zunächst ist der Vektor der (momentanen) Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ zu definieren. Dessen Richtung ist durch die (momentane) Drehachse im Sinne einer Rechtsschraube gegeben und der Betrag durch $\omega = |\underline{\omega}| = |\dot{\varphi}|$.



Aus der Abbildung übernehmen wir

$$|d\overrightarrow{0'B'}| = |\overrightarrow{A'B'}| \cdot d\varphi \tag{II.21}$$

$$|d\overrightarrow{0'B'}| = |\overrightarrow{0'B'}| \sin\gamma \, d\varphi \tag{II.22}$$

$$\frac{|d\overrightarrow{0'B'}|}{dt} = |\overrightarrow{0'B'}| \sin\gamma \, \frac{d\varphi}{dt} = \omega \, |\overrightarrow{0'B'}| \sin\gamma, \tag{II.23}$$

und unter Einarbeitung der genannten Richtungseigenschaft folgt

$$\frac{d\overrightarrow{0'B'}}{dt} = \underline{\omega} \times \overrightarrow{0'B'}. \tag{II.24}$$

Diese Rotation gilt für einen beliebigen Vektor in Σ', also insbesondere auch für die Basisvektoren $\underline{e}'_a$. Dann gilt

$$d_t \underline{e}'_a = \underline{\omega} \times \underline{e}'_a \tag{II.25}$$

und weiter für den oben betrachteten rechten Term:

$$\sum_a x'_a d_t \underline{e}'_a = \sum_a x'_a \, \underline{\omega} \times \underline{e}'_a \tag{II.26}$$

$$= \underline{\omega} \times \sum_a x'_a \, \underline{e}'_a \tag{II.27}$$

$$= \underline{\omega} \times \underline{x}'. \tag{II.28}$$

Dies einsetzend erhält man

$$d_t \underline{x} = d_t \underline{x}_0 + d'_t \underline{x}' + \underline{\omega} \times \underline{x}' \tag{II.29}$$

bzw.

$$\underline{v} = \underline{v}_{tr} + \underline{v}' + \underline{\omega} \times \underline{x}' \tag{II.30}$$

oder mit $\underline{x}' = \underline{x} - \underline{x}_0$

$$d_t \underline{x}' = d'_t \underline{x}' + \underline{\omega} \times \underline{x}'. \tag{II.31}$$

Wenn statt $\underline{x}'$ ein beliebiger anderer Vektor $\underline{b}' = \sum_a b'_a \, \underline{e}'_a$ betrachtet wird, ändert sich an der Herleitung obiger Formel nichts. So gilt

$$d_t \underline{b}' = d'_t \underline{b}' + \underline{\omega} \times \underline{b}' \tag{II.32}$$

Dies gilt auch, wenn $\underline{b}'$ nicht in 0', sondern in einem anderen beliebigen Punkt angreift. Die kleine Überlegung zur Bestätigung dessen, nehme der Leser selbst vor.

Insbesondere gilt für $\underline{b}' = \underline{\omega}$

$$d_t \underline{\omega} = d'_t \underline{\omega}. \tag{II.33}$$

Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit spielt eine besondere Rolle; seine zeitliche Änderung ist in Σ und Σ' gleich. Dies sollte nicht überraschen, denn $\underline{\omega}$ ist parallel zur Drehachse in Σ' und die dreht sich nicht mit.

Wichtig ist weiterhin noch die Beschleunigung. Durch Differentiation von

$$\underline{v} = \underline{v}_{tr} + \underline{v}' + \underline{\omega} \times \underline{x}' \tag{II.34}$$

folgt

$$d_t \underline{v} = d_t \underline{v}_{tr} + d_t \underline{v}' + \underline{\omega} \times d_t \underline{x}' + d_t \underline{\omega} \times \underline{x}'. \tag{II.35}$$

Nun wird ersetzt

$$d_t \underline{v}' = d'_t \underline{v}' + \underline{\omega} \times \underline{v}' \tag{II.36}$$

und

$$\underline{\omega} \times d_t \underline{x}' = \underline{\omega} \times (d'_t \underline{x}' + \underline{\omega} \times \underline{x}') = \underline{\omega} \times \underline{v}' + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{x}') \tag{II.37}$$

mit dem Ergebnis

$$d_t \underline{v} = d_t \underline{v}_{tr} + d'_t \underline{v}' + 2\, \underline{\omega} \times \underline{v}' + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{x}') + d_t \underline{\omega} \times \underline{x}'. \tag{II.38}$$

Folgende Begriffe werden verwendet:

Führungsgeschwindigkeit:	$\underline{v}_{tr} + \underline{\omega} \times \underline{x}'$
Führungsbeschleunigung:	$d_t\underline{v}_{tr} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{x}') + d_t\underline{\omega} \times \underline{x}'$
Coriolisbeschleunigung:	$-2\,\underline{\omega} \times \underline{v}'$
Zentrifugalbeschleunigung:	$-\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{x}')$

Führungsgeschwindigkeit und -beschleunigung ergeben sich aus den jeweiligen allgemeinen Formeln, wenn die Relativgeschwindigkeit formal null gesetzt wird ($\underline{v}' = 0$).

Wir kehren jetzt zu unserer ursprünglichen Annahme zurück, daß in Σ die Relation

$$m\, d_t^2\underline{x} \quad = \quad \underline{F} \tag{II.39}$$

gelte. Ersetzen wir nun $d_t^2\underline{x} = d_t\underline{v}$ durch den eben abgeleiteten Ausdruck, so folgt

$$m\,(d_t\underline{v}_{tr} + d_t'\underline{v}' + 2\,\underline{\omega} \times \underline{v}' + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{x}') + d_t\underline{\omega} \times \underline{x}') = \underline{F} \tag{II.40}$$

oder

$$m\, d_t'\underline{v}' = m d_t'^2\underline{x}' = \underline{F} - m\, d_t\underline{v}_{tr} - m\, d_t\underline{\omega} \times \underline{x}' - m\,\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{x}') - 2\,m\,\underline{\omega} \times \underline{v}' \tag{II.41}$$

bzw. mit $\underline{a}_{tr} = d_t\underline{v}_{tr}$, $d_t\underline{\omega} = d_t'\underline{\omega}$, $\underline{v}' = d_t'\underline{x}'$

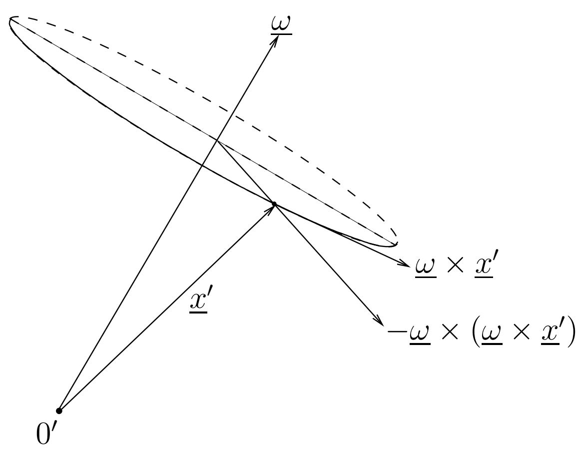
$$m\, d_t'^2\underline{x}' = \underline{F} - m\,\underline{a}_{tr} - m\, d_t'\underline{\omega} \times \underline{x}' - m\,\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{x}') - 2\,m\,\underline{\omega} \times d_t'\underline{x}'. \tag{II.42}$$

Folgerungen:

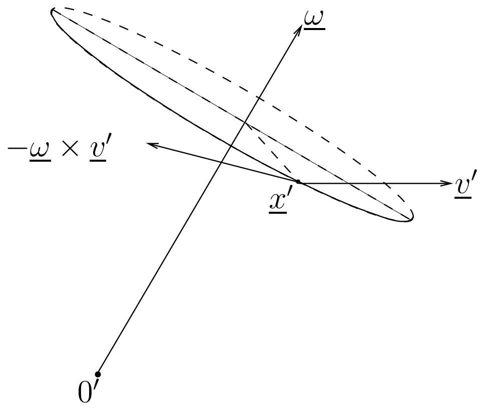
1. In einem beliebigen System Σ' ist das Grundgesetz der Mechanik in seiner ursprünglichen Form nicht mehr gültig. Außer der im Inertialsystem auftretenden Kraft $\underline{F}$ treten vier weitere Kräfte auf, die Trägheitskräfte.
   Ist speziell $\underline{F} = 0$, so wird mittels dieser vier weiteren Kräften gerade der Effekt der Trägheit eines Massenpunktes beschrieben.
2. Die Grundgleichung der Mechanik kann in jedem beliebigen System Σ' angewendet werden, wenn zur Kraft $\underline{F}$, die am Massenpunkt im Inertialsystem Σ angreift, die Trägheitskräfte addiert werden.
3. In einem Inertialsystem wirken keine Trägheitskräfte.

Zwei Trägheitskräfte haben eigene Namen:

- Zentrifugalkraft $\underline{F}_z = -m\,\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{x}')$.



- Corioliskraft $\underline{F}_c = -2\, m\, \underline{\omega} \times \underline{v}'$.



Die Kraft $\underline{F}$ wird auch als eingeprägte Kraft und die Trägheitskräfte werden als Scheinkräfte bezeichnet. Diese Bezeichnungen ergeben sich aus folgender Überlegung.
Wenn man die an einem Massenpunkt angreifende Kraft als eine objektive Realität ansieht, die von umgebenden Körpern bestimmt wird, dann kann diese von einem willkürlich eingeführten Bezugssystem nicht abhängen. Die Trägheitskräfte werden aber gerade durch das Bezugssystem hervorgerufen, also werden sie Scheinkräfte genannt im Unterschied zur eingeprägten Kraft $\underline{F}$.
Sind wir nach diesen Überlegungen nun in der Lage, ein Koordinatensystem Σ'', daß wir für eine konkrete Situation antreffen oder konstruieren danach zu beurteilen, ob es ein Inertialsystem ($\Sigma'' = \Sigma$) oder ein beschleunigtes System ($\Sigma'' = \Sigma'$) ist?
Dazu ist die Gesamtkraft zu analysieren, die auf einen Massenpunkt wirkt. Zeigt sie Eigenschaften der Trägheitskräfte, liegt kein Inertialsystem vor. Diese Beurteilung hängt natürlich auch immer mit dem Raumbereich zusammen, der von Interesse ist. Betrachten wir ein Beispiel. Ein Mensch, der in einem Raum auf der ISS "schwebt", umkreist die Erde unter dem Einfluß der Gravitation der Erde, sowie der Fliehkraft und Corioliskraft. Er bewegt sich also mit Sicherheit nicht kräftefrei und auch nicht geradlinig. Innerhalb der ISS kann er aber sehrwohl als kräftefrei betrachtet werden und in guter Näherung handelt es sich beim lokalen ISS-Koordinatensystem um ein Inertialsystem.

2.2 Galileisches Relativitätsprinzip

Das System Σ sei wiederum ein Inertialsystem. Dann gilt $m\, d_t^2 \underline{x} = \underline{F}$.
Das System Σ' bewegt sich nun nicht mehr beliebig beschleunigt in Bezug auf Σ, sondern gleichförmig geradlinig, d.h. es gilt,

$$\underline{x} = \underline{x}' + \underline{x}_0 \text{ mit } d_t \underline{x}_0 = const.\ , \ \underline{\omega} = 0, \tag{II.43}$$

bzw.

$$\boxed{\underline{x}' = \underline{x} - \underline{v}_{tr}\, t} \quad \underline{v}_{tr} = d_t \underline{x}_0. \tag{II.44}$$

Dann ergibt sich in Σ' das Grundgesetz der Mechanik in der Form

$$m\, d_t'^2 \underline{x}' \quad = \quad \underline{F}, \tag{II.45}$$

d.h. es ist forminvariant. Dann ist auch Σ' ein Inertialsystem, denn es treten keine Trägheitskräfte auf.

Schlußfolgerung: Galileisches Relativitätsprinzip
Die Grundgleichung der Mechanik ist gegenüber Galilei-Transformationen

$$\underline{x}' \quad = \quad \underline{x} - \underline{v}_{tr}\, t \ , \ \underline{v}_{tr} = const. \tag{II.46}$$

beim Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen forminvariant.

D.h. auch, wenn es *ein* Inertialsystem gibt, gibt es beliebig viele!

Ausblick:
Wir haben stillschweigend vorausgesetzt, daß in den beiden Inertialsystemen Σ und Σ'

$$t = t' \tag{II.47}$$

gilt. Das ist nicht universell gültig. Für $v_{tr} \to c$ wird $t \neq t'$. Dann ist das Galileische Relativitätsprinzip zu verallgemeinern, und an seine Stelle tritt das Einsteinsche spezielle Relativitätsprinzip. Gleichzeitig tritt an die Stelle der Galilei-Transformation die Lorentz-Transformation. Diese Situation wird in der Vorlesung “Elektrodynamik” behandelt (vgl. Skript zur Vorlesung Klassische Feldtheorie, Kapitel III).

3 Dynamik eines Massenpunktes

Das zweite Newtonsche Prinzip ermöglicht die Lösung von im wesentlichen zwei Arten von Problemen:

1. $\underline{x}(t)$ bekannt, $\underline{F}$ ist zu berechnen.
2. $\underline{F}$ bekannt, $\underline{x}(t)$ ist zu berechnen.

Aus praktischer Sicht sind beide Aufgaben gleichwertig. Aus theoretischer Sicht ist die erste Aufgabe trivial (reine Differentiation) und die zweite Aufgabe (Integration) interessant.

3.1 Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt m ist durch das zweite Newtonsche Gesetz zu

$$m\, \ddot{\underline{x}} = \underline{F} \tag{II.48}$$

gegeben. Unter $\underline{F}$ ist die Gesamtkraft zu verstehen; im Fall eines beschleunigten Bezugssystems also einschließlich der Trägheitskräfte.

In der Mechanik setzen wir die funktionalen Abhängigkeiten

$$\underline{F} = \underline{F}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}, t) \tag{II.49}$$

voraus. Eine beschleunigungsabhängige Kraft gibt es i.a nicht. Ein Ausnahmefall ist die selbstbeschleunigende Kraft auf ein Elektron, das elektromagnetische Wellen abstrahlt.

Die Bewegungsgleichungen stellen ein explizites System von drei gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen dar. In kartesischen Koordinaten nehmen sie die Form

$$m\, \dot{x}_a = F_a(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, t) \quad , a = 1, \cdots, 3 \tag{II.50}$$

an. Die allgemeine Lösung enthält sechs Integrationskonstanten, z.B. den Anfangsort $\underline{x}_0 = \underline{x}(t_0)$ und die Anfangsgeschwindigkeit $\underline{v}_0 = \dot{\underline{x}}(t_0)$.

Die Integration der Bewegungsgleichungen kann häufig mit Hilfe geeignet einzuführender Größen (wie Impuls, Energie, Drehimpuls, Rotationsenergie) erleichtert werden.

3.2 Impulsbilanz

Für einen Massenpunkt ist die Impulsbilanz trivial. Sie ist identisch mit dem Grundgesetz:

$$\dot{\underline{p}} = \underline{F} \tag{II.51}$$

mit

$$\underline{p} = m \cdot \dot{\underline{x}}. \tag{II.52}$$

Somit gilt bei $\underline{F} = 0$ die Impulserhaltung:

$$\dot{\underline{p}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{p} = const. \tag{II.53}$$

Dieses Ergebnis beinhaltet das bekannte Trägheitsgestz:

$$\underline{p} = m\,\dot{\underline{x}} = m \cdot \underline{v}_0 \tag{II.54}$$
$$\rightsquigarrow \underline{x} = m\,\underline{v}_0\,(t - t_0) + \underline{x}_0. \tag{II.55}$$

3.3 Drehimpulsbilanz

Das Grundgesetz wird vektoriell mit $\underline{x}$ multipliziert:

$$m\,\underline{x} \times \ddot{\underline{x}} = \underline{x} \times \underline{F}. \tag{II.56}$$

Wegen

$$d_t(\underline{x} \times \dot{\underline{x}}) = \dot{\underline{x}} \times \dot{\underline{x}} + \underline{x} \times \ddot{\underline{x}} = \underline{x} \times \ddot{\underline{x}} \tag{II.57}$$

folgt

$$d_t(m\,\underline{x} \times \dot{\underline{x}}) = \underline{x} \times \underline{F}. \tag{II.58}$$

Eingeführt werden das Drehmoment $\underline{M}$

$$\underline{M} = \underline{x} \times \underline{F} \tag{II.59}$$

und der Drehimpuls $\underline{L}$

$$\underline{L} = \underline{x} \times \underline{p}. \tag{II.60}$$

So folgt die Drehimpulsbilanz

$$\dot{\underline{L}} = \underline{M}. \tag{II.61}$$

Folgerungen:

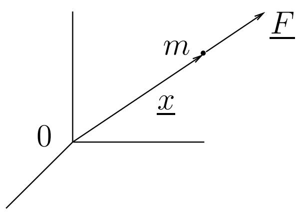
1. Drehimpulserhaltung
   Für $\underline{M} = 0$ folgt $\underline{L} = const.$
   Dies wird erzielt bei

- $\underline{F} = 0$
- $\underline{F} \parallel \underline{x}$

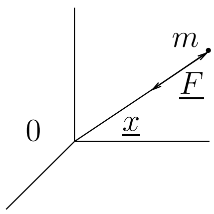
2. Zentralkäfte
   Nimmt die Kraft $\underline{F}$ die Form

$$\underline{F} = F(\underline{x}, \dot{\underline{x}}, t) \cdot \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|} \tag{II.62}$$

   an, heißt sie Zentralkraft.

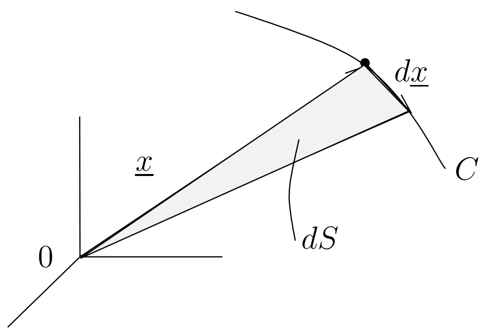


   oder



   Wenn sich der Massenpunkt unter dem Einfluß einer Zentralkraft bewegt, bleibt sein Drehimpuls erhalten.

3. Flächensatz



   Als Flächengeschwindigkeit $\dot{\underline{S}}$ wird die Größe

$$\dot{\underline{S}} = \frac{1}{2}\,\underline{x} \times \dot{\underline{x}} = \frac{1}{2\,m}\underline{L} \tag{II.63}$$

   eingeführt. Konstanter Drehimpuls $\underline{L}$ bedeutet somit konstante Flächengeschwindigkeit $\dot{\underline{S}}$. Dieser Sachverhalt heißt auch Flächensatz. Wir schlußfolgern weiter:

   (a) Die Bewegung des Massenpunktes erfolgt in einer Ebene senkrecht zum Drehimpuls.

   (b) Der Ortsvektor (Fahrstrahl, Radiusvektor) überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen;

$$dS = \frac{L}{2\,m} dt \text{ bzw. } dS \sim dt. \tag{II.64}$$

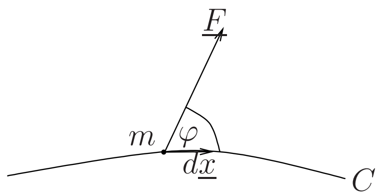
Diese Aussage beinhaltet das 2. Keplersche Gesetz. Die Aussage (a) des Flächensatzes kann auch anders formuliert werden als:

$$m\,\underline{x} \times \dot{\underline{x}} = \underline{L} \quad | \cdot \underline{x} \tag{II.65}$$
$$m\,\underline{x}\,(\underline{x} \times \dot{\underline{x}}) = \underline{x} \cdot \underline{L} = x_1\,L_1 + x_2\,L_2 + x_3\,L_3 = 0. \tag{II.66}$$

Da die L_a konstant sind, handelt es sich um eine Ebenengleichung. Der senkrecht auf der Ebene stehende Gradient ergibt sich zu:

$$\partial_{\underline{x}}\,(x_1 \cdot L_1 + x_2 \cdot L_2 + x_3 \cdot L_3) = \underline{L}. \tag{II.67}$$

3.4 Energiebilanz



Am Massenpunkt greift die Kraft $\underline{F}$ an und verschiebt ihn entlang der Kurve C. Dann heißt

$$W \equiv \int_C \underline{F} \cdot d\underline{x} \tag{II.68}$$

die von $\underline{F}$ geleistete Arbeit. Für die infinitesimale Arbeit gilt

$$dW = \underline{F} \cdot d\underline{x}. \tag{II.69}$$

$dW < 0$ bedeutet, daß gegen die wirkende Kraft Arbeit zu leisten ist, um die Verschiebung zu realisieren.
$dW > 0$ bedeutet, daß die Kraft Arbeit leistet.

Als Leistung N wird

$$N = d_t W = \underline{F} \cdot \dot{\underline{x}} \tag{II.70}$$

bezeichnet.

Multiplikation der Bewegungsgleichung mit $\dot{\underline{x}}$ ergibt

$$m\,\ddot{\underline{x}}\,\dot{\underline{x}} = \underline{F}\,\dot{\underline{x}} = d_t(\frac{1}{2}\,m\dot{\underline{x}}\,\dot{\underline{x}}). \tag{II.71}$$

Die Größe

$$T = \frac{1}{2}\,m\dot{\underline{x}}\,\dot{\underline{x}} = \frac{1}{2}\,m\,\dot{\underline{x}}^2 \tag{II.72}$$

heißt kinetische Energie des Massenpunktes. Damit gilt die Bilanzgleichung für die kinetische Energie

$$d_t T = \underline{F} \cdot \dot{\underline{x}}. \tag{II.73}$$

Zur integralen Formulierung gelangt man durch Integration über die Zeit vom Zeitpunkt t_1 zum Zeitpunkt t_2, wobei der Massenpunkt dabei von P_1 über den Weg C nach P_2 gelangt. So folgt

$$\int_{t_1}^{t_2} d_t T = T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} \underline{F} \cdot \dot{\underline{x}}\,dt = \int_C \underline{F} \cdot d\underline{x} = W. \tag{II.74}$$

Wir führen nun den Begriff des konservativen Kraftfeldes ein.

Eine Kraft $\underline{F}$ heißt konservativ, wenn

1. $\underline{F} = \underline{F}(\underline{x})$

gilt, und wenn es eine skalare Funktion $V(\underline{x})$ gibt, so daß

2. $\underline{F} = -\partial_{\underline{x}} V$

gilt. Die Funktion V heißt Potential oder potentielle Energie.

Im Abschnitt I.2.5 wurde der Gradient in beliebigen krummlinigen Koordinaten geschrieben als Differentialoperator zu

$$\partial_{\underline{x}} = \underline{b}^c \cdot \partial_{\xi^c} \tag{II.75}$$

mit der kontravarianten Basis $\{\underline{b}^c\}$ eingeführt. In kartesischen Koordinaten reduziert er sich auf

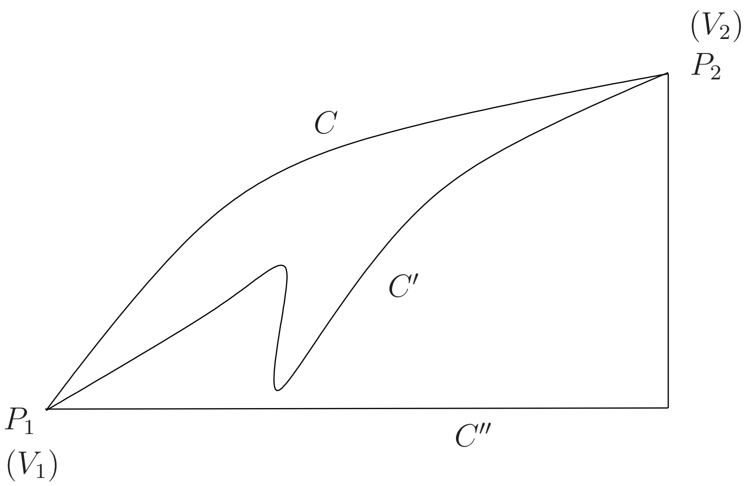
$$\partial_{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} \end{pmatrix} \tag{II.76}$$

bzw.

$$\partial_{\underline{x}} V = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} V \\ \partial_{x_2} V \\ \partial_{x_3} V \end{pmatrix} \tag{II.77}$$

und somit $\underline{F}_a = -\partial_{x_a} V$.

Konservative Kräfte haben bemerkenswerte Eigenschaften. Am wichtigsten ist wohl die Tatsache, daß die von einer konservativen Kraft geleistete Arbeit W längs der Kurve C zwischen den Punkten P_1 und P_2 unabhängig vom konkreten Weg C ist und nur vom Anfangs- und Endpunkt P_1 und P_2 abhängt.



Es gilt

$$W \quad = \quad \int_C \underline{F} \cdot d\underline{x} = -\int_C \underbrace{\partial_{\underline{x}} V \, d\underline{x}}_{\substack{\text{mit Sicherheit} \\ \text{vollst. Differential}}} = -\int_C dV = -V|_{P_1}^{P_2} = V_1 - V_2. \tag{II.78}$$

Dies ist äquivalent zu

$$\int_C \underline{F} \, d\underline{x} \quad = \quad \int_{C'} \underline{F} \, d\underline{x} = \int_{C''} \underline{F} \, d\underline{x}. \tag{II.79}$$

Insbesondere gilt für einen geschlossenen Weg C

$$W = \oint_C \underline{F} \, d\underline{x} = 0. \tag{II.80}$$

Das Potential V für konservative Kraftfelder $\underline{F}$ kann somit berechnet werden aus

$$V(\underline{x}) = V(\underline{x}_0) - \int_{\underline{x}_0}^{\underline{x}} \underline{F} \cdot d\underline{x} \quad (P_2 \hat{=} \underline{x} \, , \; P_1 \hat{=} \underline{x}_0). \tag{II.81}$$

Der Integrationsweg C ist frei wählbar, z.B. ein Haken. Das Potential ist nur bis auf eine additive Konstante bestimmt. Für konservative Kraftfelder läßt sich die Energiebilanz nun in der Form

$$d_t T = \underline{F} \cdot \dot{\underline{x}} = -\frac{\partial V}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{d\underline{x}}{dt} = -\frac{dV}{dt} \tag{II.82}$$

bzw.

$$d_t(T + V) = 0 \tag{II.83}$$

oder

$$T + V = U = const \tag{II.84}$$

schreiben. Die Integrationskonstante U ist als Summe aus kinetischer und potentieller Energie die Gesamtenergie des Massenpunktes.

Bemerkungen:

1. Konservative Kräfte sind spezielle Potentialkräfte.
2. Der Ausdruck

$$\partial_{\underline{x}} V \cdot d\underline{x} = \partial_{x_1} V \, dx_1 + \partial_{x_2} V \, dx_2 + \partial_{x_3} V \, dx_3 \tag{II.85}$$

ist ein vollständiges Differential, also in der Form

$$dV = \partial_{\underline{x}} V \cdot d\underline{x} \tag{II.86}$$

darstellbar. Der Ausdruck

$$\underline{F} \cdot d\underline{x} = F_1 \cdot dx_1 + F_2 \cdot dx_2 + F_3 \cdot dx_3 \tag{II.87}$$

ist nur dann ein vollständiges Differential, wenn die F_a in der Form

$$F_a = const. \, \partial_{x_a} V \tag{II.88}$$

darstellbar sind, also ein Potential existiert. Die Konstante wird -1 gesetzt, damit V als potentielle Energie und U als Gesamtenergie interpretierbar sind.

Dann gilt aber unter Anwendung des Schwarzschen Satzes

$$\partial_{x_a}\partial_{x_b}V = \partial_{x_b}\partial_{x_a}V \tag{II.89}$$

$$\partial_{x_a}F_b = \partial_{x_b}F_a \tag{II.90}$$

$$\partial_{x_a}F_b - \partial_{x_b}F_a = 0 \tag{II.91}$$

oder kompakt

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{F} \equiv \nabla \times \underline{F} \equiv= \operatorname{rot}\underline{F} = \operatorname{curl}\underline{F} = 0. \tag{II.92}$$

3. Konservative Kräfte sind wirbelfrei.
4. Die Aussagen
   - $\partial_{\underline{x}} \times \underline{F} = 0$ und
   - es existiert ein Potential V

   sind äquivalent.
5. Die Gleichung

$$V(\underline{x}) = const \tag{II.93}$$

   beschreibt eine Äquipotentialfläche. Für jede Äquipotentialfläche gilt

$$0 = dV = \partial_{\underline{x}}V \cdot d\underline{x}, \tag{II.94}$$

   also

$$d\underline{x} \perp \partial_{\underline{x}}V. \tag{II.95}$$

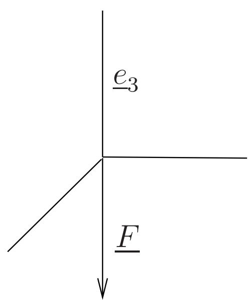
   Da $d\underline{x}$ in der Äquipotentialfläche liegt, steht der Gradient $\partial_{\underline{x}}V$ senkrecht auf der Äquipotentialfläche. Folglich gibt es keine Kraftkomponente in ihr und ein Massenpunkt bewegt sich kräftefrei in einer Äquipotentialfläche.
6. Der Stokessche Satz verbindet für einen geschlossenen Weg C die verschwindende Arbeit mit der Wirbelfreiheit:

$$0 = \int_S (\partial_{\underline{x}} \times \underline{F})\, d\underline{S} = \oint_{(S)} \underline{F} \cdot d\underline{x} = 0. \tag{II.96}$$

   Der Rand (S) der Fläche S ist dabei mit dem geschlossenen Weg C identisch.

Beispiele für konservative Kräfte:

- Homogenes Schwerefeld

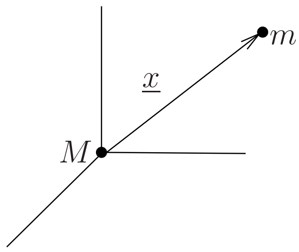


$$\underline{F} = -\, m \cdot g\, \underline{e}_3 \tag{II.97}$$
$$V = m \cdot g \cdot x_3 \tag{II.98}$$

- Gravitationskraft zwischen zwei Massenpunkten M und m

  Kraft auf m

$$\underline{F} = -\gamma \frac{M m}{|\underline{x}|^2} \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|} \tag{II.99}$$



  Gravitationskonstante γ

$$\gamma = 6,62\, 10^{-11}\mathrm{N} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}. \tag{II.100}$$

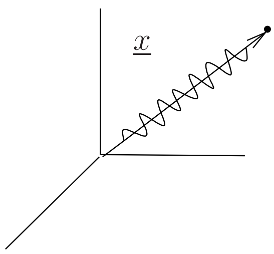
  Das Potential berechnet sich zu

$$V = -\gamma \frac{M \cdot m}{|\underline{x}|} = -\gamma \frac{M\, m}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = -\gamma \frac{M\, m}{r} \tag{II.101}$$

  Beweis:

$$F_a = -\partial_{x_a} V \tag{II.102}$$
$$\partial_{x_a} V = \gamma \frac{M\, m}{2\, \sqrt{x - 1^2 + x_2^2 + x_3^2}^3}\, 2 \cdot x_a = \gamma \frac{M\, m}{|\underline{x}|^2} \frac{x_a}{|\underline{x}|} \tag{II.103}$$

- Federkraft



$$\underline{F} = -k \cdot \underline{x} \tag{II.104}$$
$$V = \frac{k}{2}\, \underline{x}^2 \tag{II.105}$$

Nach den konservativen Kräften betrachten wir noch einige Beispiele für nichtkonservative Kraftfelder.

1. Nichtstationäre Potentialkräfte

   $\underline{F}(\underline{x}, t)$ sei ein explizit zeitabhängiges Kraftfeld, das zu jedem Zeitpunkt wirbelfrei ist, also

   $$\partial_{\underline{x}} \times \underline{F}(\underline{x}, t) = 0. \tag{II.106}$$

   Dann kann ein explizit zeitabhängiges Potential $V(\underline{x}, t)$ eingeführt werden über

   $$\underline{F}(\underline{x}, t) = -\partial_{\underline{x}} V(\underline{x}, t). \tag{II.107}$$

   Dieses Kraftfeld ist nicht konservativ, denn

   $$d_t T = \underline{F} \cdot d_t \underline{x} = -\partial_{\underline{x}} V \cdot d_t \underline{x} \tag{II.108}$$
   $$d_t T = -d_t V + \partial_t V \tag{II.109}$$

   wegen

   $$d_t V = \partial_{\underline{x}} V \cdot d_t \underline{x} + \partial_t V \tag{II.110}$$

   und somit

   $$d_t(T + V) = \partial_t V. \tag{II.111}$$

   Die Gesamtenergie des Massenpunktes bleibt nicht erhalten.

2. Eine weitere wichtige Gruppe nichtkonservativer Kräfte sind dissipative Kräfte. Sie sind nicht wirbelfrei und die Arbeit ist damit wegabhängig. Typische Vertreter sind Reibungskräfte. Wenn die Kraft zerlegt wird gemäß

   $$\underline{F} = \underline{F}^{\mathrm{CONS}} + \underline{F}^{\mathrm{DISS}} = -\partial_{\underline{x}} V + \underline{F}^{\mathrm{DISS}}, \tag{II.112}$$

   dann ergibt sich die mechanische Energiebilanz zu

   $$d_t(T + V) = \underline{F}^{\mathrm{DISS}} \cdot d_t \underline{x}, \tag{II.113}$$

   d.h. die zeitliche Veränderung der mechanischen Gesamtenergie ist gleich der Leistung der dissipativen Kräfte.

   1. Beispiel: Bewegung eines Massenpunktes im homogenen Gravitationsfeld unter dem Einfluß einer Reibungskraft

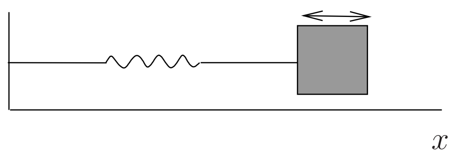
   Gravitationskraft: $\underline{F}^{\mathrm{CONS}} = -m \cdot g\, \underline{e}_3$
   Reibungskraft (z.B.): $\underline{F}^{\mathrm{DISS}} = -\alpha \cdot \dot{\underline{x}}$

   Energiebilanz:

   $$d_t\left(\frac{m}{2}\, \dot{\underline{x}}^2 + m \cdot g\, x_3\right) = -\alpha\, \dot{\underline{x}}^2 \tag{II.114}$$

   Die mechanische Energie des Massenpunktes nimmt also ständig ab. Sie wird von der Umgebung als Wärme aufgenommen.

   2. Beispiel: Gedämpfter linearer harmonischer Oszillator



Lineare Dimension: $\underline{x} = x\,\underline{e}_1$
Rücktreibende Kraft: $\underline{F}^{\mathrm{CONS}} = -k\,x\,\underline{e}_1$
Reibungskraft: $\underline{F}^{\mathrm{DISS}} = -\alpha\,\dot{x}\,\underline{e}_1$

Potential: $V = \frac{k}{2}\,x^2$
Energiebilanz: $d_t(\frac{m}{2}\,\dot{x}^2 + \frac{k}{2}\,x^2) = -\alpha\,\dot{x}^2$.

3.5 Integration der Bewegungsgleichungen bei Drehimpuls- und Energieerhaltung

Situationen, in denen Erhaltungssätze gelten, sind besonders interessant. Die Erhaltung des Impulses eines Massenpunktes ist bereits vollständig behandelt; sie führt auf das Trägheitsgesetz. Bei Drehimpuls- und Energieerhaltung läßt sich ein allgemeines Integrationsverfahren der Bewegungsgleichungen angeben.

3.5.1 Eindimensionale Bewegungen

Wenn sich der Massenpunkt nur in einer Dimension bewegt, reduziert sich die vektorielle Bewegungsgleichung auf eine skalare:

$$m\,\ddot{x} = F. \tag{II.115}$$

Drehimpulserhaltung ist hier immer garantiert, denn

$$\underline{L} = \underline{x} \times \underline{p} = m\,\underline{x} \times \underline{\dot{x}} = 0. \tag{II.116}$$

$\underline{x}$ und $\underline{\dot{x}}$ sind wegen der Eindimensionalität grundsätzlich parallel.

Damit auch die Energie erhalten wird, muß die Kraft konservativ sein und das Potential

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\,dx' \tag{II.117}$$

existieren. Dann gilt

$$d_t(T+V) = 0 \tag{II.118}$$

bzw.

$$T + V = \frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2 + V(x) = U = const. \tag{II.119}$$

Dieser Energieerhaltungssatz ist ein erstes Integral mit U als Integrationskonstante.
Es verbleibt die Dgl. 1. Ordnung

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}\,(U - V(x))} = \frac{dx}{dt}, \tag{II.120}$$

die durch Separation lösbar ist:

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\,(U - V)}} + const. \tag{II.121}$$

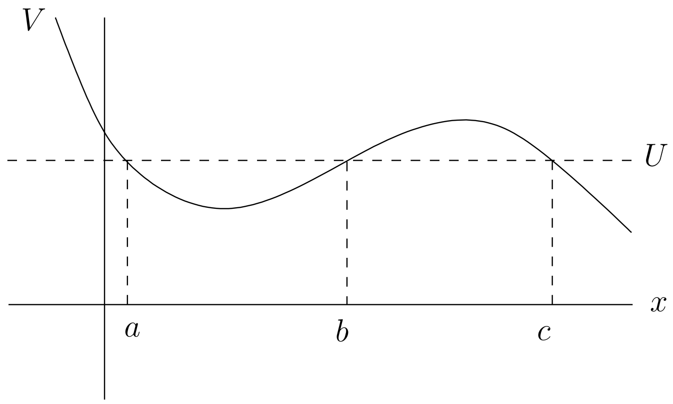
Im Ergebnis der Integration liegt $t(x)$ vor. Die Umkehrfunktion ergibt die Bahnkurve $x(t)$ als Lösung des Problems.

Das beschriebene Verfahren ist immer möglich, jedoch kann es im konkreten Fall einfacher sein, die Bewegungsgleichung direkt zu lösen, anstatt obiges Integral und danach die Umkehrfunktion $x(t)$ zu berechnen.

Unabhängig vom speziellen Potentialverlauf lassen sich einige allgemeine Aussagen zur Bewegung des Massenpunktes machen. Wegen $T > 0$ muß

$$V(x) \leq U \tag{II.122}$$

gelten. Orte x mit $V(x) > U$ sind für den Massenpunkt bei vorgegebener Gesamtenergie U nicht erreichbar.



Mögliche Positionen des Massenpunktes sind hier also

$$a \leq x \leq b \quad , \quad x \geq c. \tag{II.123}$$

Bei $x = a$ oder $x = b$ oder $x = c$ gilt $V = U$ und $T = 0$ bzw. $\dot{x} = 0$. Diese Punkte sind Umkehrpunkte, da die Geschwindigkeit ihr Vorzeichen umkehrt. Zwischen a und b ist die Bewegung periodisch. Mögliche Ruhelagen sind dort möglich, wo keine Kraft auf den Massenpunkt einwirkt, also bei

$$\partial_x V = 0, \tag{II.124}$$

sofern sie energetisch erreichbar sind. Ein Potentialmaximum entspricht einer labilen Ruhelage und ein Potentialminimum einer stabilen Ruhelage.

3.5.2 Dreidimensionale Bewegungen

Damit der Drehimpuls erhalten bleibt, muß bekanntlich

$$\underline{F} \parallel \underline{x} \tag{II.125}$$

gelten, und damit die mechanische Energie erhalten bleibt, muß das Kraftfeld konservativ, also $\underline{F}(\underline{x})$ sein. Beide Bedingungen erfordern ein konservatives Zentralkraftfeld

$$\underline{F} = F(\underline{x}) \cdot \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|}. \tag{II.126}$$

Unter einer Zentralkraft im engeren Sinne versteht man eine Zentralkraft, deren Betrag nur von $|\underline{x}|$ abhängt, also isotrop ist und somit gilt

$$\underline{F} = F(|\underline{x}|) \cdot \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|} \tag{II.127}$$

bzw. in Kugelkoordinaten

$$\underline{F} = F(r) \cdot \frac{\underline{x}}{r}. \tag{II.128}$$

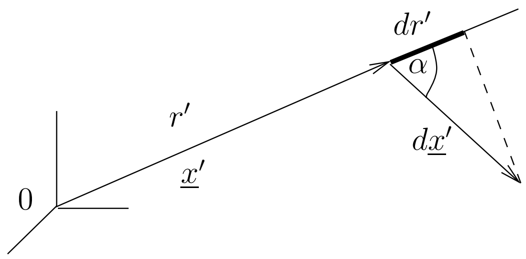
Im weiteren wollen wir Zentralkräfte im engeren Sinne betrachten. Das Potential berechnet sich dann aus

$$V(\underline{x}) = -\int^{\underline{x}} F(r')\,\frac{\underline{x}'}{r'} \cdot d\underline{x}' = -\int^{r} F(r)\,dr' = V(r), \tag{II.129}$$

da

$$\underline{x}' \cdot d\underline{x}' = |\underline{x}'| \cdot |d\underline{x}'| \cdot \cos\alpha = r' \cdot dr' \tag{II.130}$$

gilt. Die obere Integrationsgrenze $\underline{x}$ konnte durch r ersetzt werden, da der Integrand nur eine radiale Abhängigkeit ausweist und die Integration (= Summation) darüber für alle Richtungen das gleiche Ergebnis liefert und damit V ebenfalls nur radiale funktionale Abhängigkeit aufweist.



Zur Übung sei die Rekonstruktion der Kraft aus dem Potential angegeben:

$$\underline{F} = -\partial_{\underline{x}} V = -\partial_r V \cdot \partial_{\underline{x}} r. \tag{II.131}$$

Nun gilt

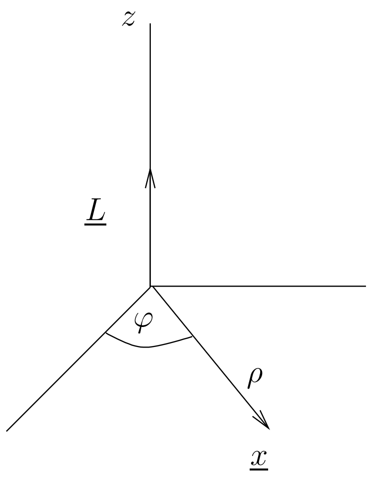
$$\partial_r V = -F(r)\ ,\ \partial_{\underline{x}} r = \frac{\underline{x}}{r} \tag{II.132}$$

und somit bestätigen wir

$$\underline{F} = F(r) \cdot \frac{\underline{x}}{r}. \tag{II.133}$$

Nun ist bekanntlich die Bewegung eines Massenpunktes im Zentralkraftfeld eben. Wir wählen Zylinderkoordinaten und positionieren das Koordinatensystem gerade so, daß die Ebene mit $z = 0$ zusammenfällt. Dann gilt

$$\underline{x} = \rho \cdot \underline{e}_\rho \tag{II.134}$$
$$\underline{\dot{x}} = \dot\rho\,\underline{e}_\rho + \rho\,\dot\varphi\,\underline{e}_\varphi. \tag{II.135}$$



Der Drehimpulserhaltungssatz liefert

$$\underline{L} = m \cdot \underline{x} \times \underline{\dot{x}} = m\,\rho^2\,\dot{\varphi}\,\underline{e}_z = const \tag{II.136}$$

und der Energieerhaltungssatz

$$U = T + V = \frac{m}{2}\,(\dot{\rho}^2 + \rho^2\,\dot{\varphi}^2) + V(\rho) = const. \tag{II.137}$$

Elimination von

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{m\rho^2} \tag{II.138}$$

liefert

$$\frac{1}{2}\,m\,\dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{2\,m\,\rho^2} + V(\rho) = U. \tag{II.139}$$

Mit dem sog. effektiven Potential

$$V_{\text{eff}}(\rho) \equiv V(\rho) + \frac{L^2}{2\,m\,\rho^2} \tag{II.140}$$

ergibt sich

$$\frac{m}{2}\,\dot{\rho}^2 + V_{\text{eff}} = U \tag{II.141}$$

und damit eine Dgl. der bereits bekannten Form

$$\dot{\rho} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\,(U - V_{\text{eff}})} \tag{II.142}$$

mit der Lösung

$$t = \pm \int \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\,(U - V_{\text{eff}})}} + const. \tag{II.143}$$

Integration liefert $t(\rho)$ und die Umkehrung $\rho(t)$.

Vermittels des Drehimpulserhaltungssatzes läßt sich $\varphi(t)$ berechnen. Anstatt $\varphi(t)$ ist auch $\varphi(\rho)$ aus

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{L}{m\,\rho^2}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\,(U - V_{\text{eff}})}} \tag{II.144}$$

zu

$$\varphi(\rho) = \frac{L}{m} \int \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{\frac{2}{m}(U - V_{\text{eff}})}} + const \tag{II.145}$$

bestimmbar.

Bemerkungen:

1. Der Radialanteil der Bewegung kann als eindimensionale Bewegung im effektiven Potential V_{eff} aufgefaßt werden.

2. Die zum Potential V hinzutretende Größe $\dfrac{L^2}{2\,m\,\rho^2}$ wird auch Zentrifugalenergie oder Zentrifugalpotential genannt.
   {ÜA vgl. mit Abschnitt II.2.1, Trägheitskräfte }.

3. Die Grenzen des radialen Bewegungsbereiches sind durch $\dot{\rho} = 0$ festgelegt. Dort gilt

$$V_{\text{eff}}(\rho_u) = V(\rho_u) + \frac{L^2}{2\,m\,\rho_u^2} = U, \tag{II.146}$$

   wobei ρ_u ein durch $\dot{\rho} = 0$ festgelegter Umkehrpunkt ist.

3.6 Spezielle Probleme

2.3.6.1 Kepler-Problem (Planetenbewegung)

Wir untersuchen die Bewegung einer punktförmigen Masse m im Gravitationsfeld einer raumfesten, punktförmigen Masse M. Dieses Problem ist grundlegend in der Himmelsmechanik und wegen seiner Analogie zum Coulomb-Feld auch für die Bewegung geladener Teilchen von Bedeutung.

Wir identifizieren M mit der Sonnenmasse und m mit einer Planetenmasse. In allen Fällen gilt

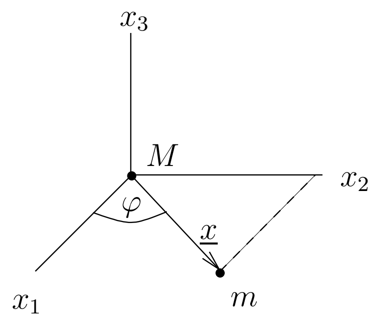
$$m \ll M, \tag{II.147}$$

und die Sonne kann in guter Näherung als ruhend angenommen und zum Ursprung des Bezugssystems gewählt werden.

Dann gilt die Bewegungsgleichung

$$m \cdot \underline{\ddot{x}} = -\gamma \frac{m \cdot M}{r^2} \cdot \frac{\underline{x}}{r}. \tag{II.148}$$

Die Gravitationskraft ist Zentralkraft und konservativ, es gelten Drehimpuls- und Energieerhaltung. Das Koordinatensystem wird wie in Abschnitt II.3.5.2 gewählt, und dann gilt



$$\underline{L} = m\,\rho^2\,\dot{\varphi}\,\underline{e}_z = const \tag{II.149}$$

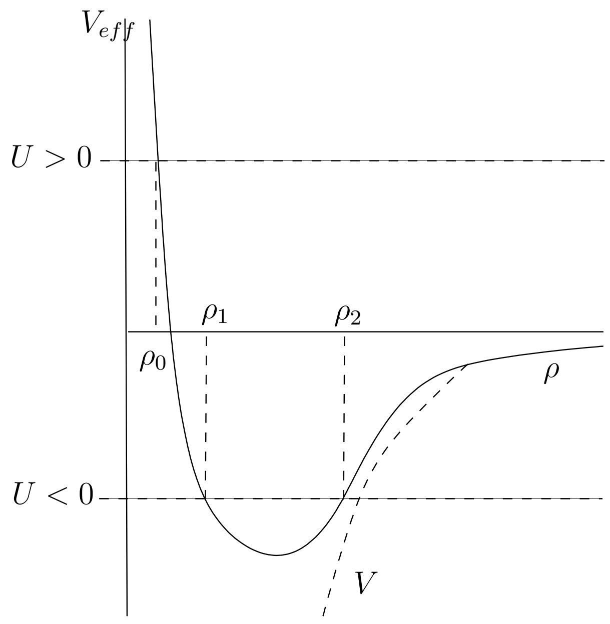
$$U = \frac{m}{2}\,(\dot{\rho}^2 + \rho^2\,\dot{\varphi}^2) - \gamma\,\frac{m\,M}{\rho} = const. \tag{II.150}$$

Elimination von $\dot{\varphi}$ liefert

$$\frac{m}{2}\,\dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{2\,m\rho^2} - \gamma\,\frac{m\,M}{\rho} = U \tag{II.151}$$

mit dem effektiven Potential

$$V_{\text{eff}}(\rho) = -\gamma\,\frac{m\,M}{\rho} + \frac{L^2}{2\,m\,\rho^2}. \tag{II.152}$$



Die Positivität der kinetischen Energie erlaubt dem Massenpunkt nur Aufenthaltsorte mit

$$V_{\text{eff}}(\rho) \leq U. \tag{II.153}$$

Somit sind gebundene Bewegungen bei $U < 0$ zwischen

$$\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2 \tag{II.154}$$

möglich sowie ungebundene Bewegungen bei $U > 0$ mit $\rho \geq \rho_0$. Die Umkehrpunkte ρ_0, ρ_1, ρ_2 bestimmen sich jeweils aus

$$V_{\text{eff}}(\rho) = U. \tag{II.155}$$

Die verbleibende obige Differentialgleichung für $\rho(t)$ kann z.B. nach dem im Abschnitt II.3.5.2 angegebenem Verfahren integriert werden. Alternativ soll hier für das spezielle Problem eine andere Lösungsmethode angegeben werden.

Wir suchen die Bahnkurve $\rho(\varphi)$ und substituieren

$$s(\varphi) = \frac{1}{\rho}, \tag{II.156}$$

woraus

$$d_\varphi s = -\frac{1}{\rho^2}\, d_\varphi \rho = -\frac{1}{\rho^2}\, \dot{\rho}\, \frac{1}{\dot{\varphi}} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho^2}\, \frac{m\, \rho^2}{L} = -\frac{\dot{\rho}\, m}{L} \tag{II.157}$$

bzw.

$$\dot{\rho} = -\frac{L}{m}\, d_\varphi s \tag{II.158}$$

folgt. Der Energieerhaltungssatz geht über in

$$\frac{L^2}{2\,m}\, (d_\varphi s)^2 + \frac{L^2}{2\,m}\, s^2 - \gamma\, m\, M\, s = U. \tag{II.159}$$

Differentiation d_φ ergibt

$$d_\varphi s \quad \cdot \quad d_\varphi^2 s + s \cdot d_\varphi s - \frac{\gamma\, m^2\, M}{L^2}\, d_\varphi s = 0 \tag{II.160}$$

$$d_\varphi^2 s \quad + \quad s = \frac{\gamma\, m^2\, M}{L^2} \equiv \frac{1}{k}. \tag{II.161}$$

Die Lösung dieser inhomogenen Dgl. 2. Ordnung setzt sich zusammen aus einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung. Als spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung wählen wir

$$s_i = \frac{1}{k}. \tag{II.162}$$

Für die homogene Gleichung

$$d_\varphi^2 s_h + s_h = 0 \tag{II.163}$$

führt der Ansatz

$$s_h = \mathrm{e}^{\lambda \cdot \varphi} \tag{II.164}$$

auf

$$\lambda^2 \quad + \quad 1 = 0 \tag{II.165}$$

$$\lambda_{1/2} \quad = \quad \pm i. \tag{II.166}$$

Die allgemeine homogene Lösung ergibt sich als Superposition der Partiallösungen zu

$$s_h = c_1 \cdot \mathrm{e}^{i\,\varphi} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-i\,\varphi} \tag{II.167}$$

mit freien Konstanten c_1 und c_2. In reeller Darstellung entspricht dies

$$s_h = d_1 \cos\varphi + d_2 \sin\varphi \tag{II.168}$$

mit entsprechend anderen Konstanten d_1 und d_2. Die Gesamtlösung schreibt sich damit als

$$s = s_h + s_i = d_1 \cos\varphi + d_2 \sin\varphi + \frac{1}{k}. \tag{II.169}$$

Eine der beiden Integrationskonstanten d_1 und d_2 legen wir durch die Forderung fest, daß der sonnennächste Punkt, also wenn s am größten ist, bei $\varphi = 0$ liegt:

$$d_\varphi s|_{\varphi=0} = d_2 = 0. \tag{II.170}$$

Somit folgt

$$s = d_1 \cos\varphi + \frac{1}{k}. \tag{II.171}$$

Da für $\varphi > 0$ s nicht zunehmen darf, ist $d_1 \geq 0$ zu fordern; darüberhinaus bleibt d_1 zunächst frei. Dann ergibt sich die Bahnkurve des Massenpunktes zu

$$\rho(\varphi) = \frac{1}{s} = \frac{1}{d_1 \cos\varphi + \frac{1}{k}} = \frac{k}{1 + \epsilon \cos\varphi}, \tag{II.172}$$

wobei d_1 durch

$$\epsilon = k \cdot d_1 \tag{II.173}$$

ersetzt wurde. ϵ kann beliebige nichtnegative Werte annehmen. Die Lösung des Problems

$$\rho = \frac{k}{1 + \epsilon \cos\varphi} \tag{II.174}$$

beschreibt Kegelschnitte als mögliche Bahnkurven, wobei bekanntlich

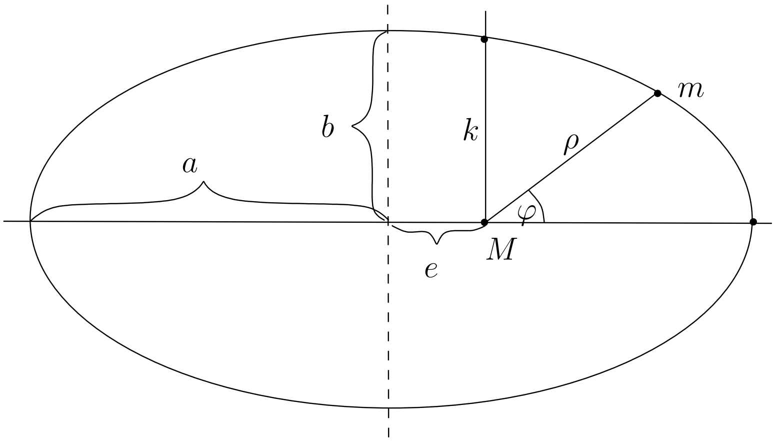
$$\begin{array}{lcl} \epsilon = 0 & : & \text{Kreis} \\ \epsilon < 1 & : & \text{Ellipse} \\ \epsilon = 1 & : & \text{Parabel} \\ \epsilon > 1 & : & \text{Hyperbel} \end{array}$$

gilt. Planetenbahnen sind offensichtlich Ellipsen, aber auch Parabeln und Hyperbeln werden von Himmelskörpern als Bahnkurven durchlaufen, z.B. von Kometen.

Die obige Darstellung der Kegelschnitte besagt, daß

- ein Brennpunkt im Ursprung (Sonne) liegt,
- a, b Halbachsen darstellen,
- ϵ die numerische Exzentrizität darstellt mit $\epsilon = \dfrac{e}{a}$,
- $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ die lineare Exzentrität darstellt,
- k der Abstand des Massenpunktes (Planeten) bei $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ ist, genannt Halbparameter,

- der Zusammenhang $k = \frac{b^2}{a^2}$ besteht.



Interssant ist natürlich noch, wie Drehimpuls L und Energie U die Bahn beeinflussen. Aus

$$k = \frac{L^2}{\gamma\, m^2\, M} \tag{II.175}$$

ist unmittelbar abzulesen, daß das Drehimpulsquadrat die "Breite" des Kegelschnittes bestimmt. Den Energieerhaltungssatz schreiben wir für den sonnennächsten Punkt der Ellipsenbahn mit

$$\rho(0) = \frac{L^2}{\gamma\, m^2\, M\,(1+\epsilon)} \quad , \quad \dot{\rho}(0) = 0 \tag{II.176}$$

zu

$$U = \frac{L^2}{2\, m\, \rho^2(0)} - \gamma\, \frac{m\, M}{\rho(0)} = \frac{\gamma\, m^2\, M\, k}{2\, m\, \rho^2(0)} - \frac{\gamma\, m\, M}{\rho(0)} \tag{II.177}$$

$$U = \gamma\, m\, M\, (\frac{k}{2\, \rho^2(0)} - \frac{1}{\rho(0)}). \tag{II.178}$$

Nun gilt

$$\rho(0) = \frac{k}{1+\epsilon} = a - e = a - \epsilon\, a = a\,(1-\epsilon) \tag{II.179}$$

bzw.

$$\frac{k}{\rho(0)} = 1 + \epsilon \tag{II.180}$$

und somit

$$U = \gamma\, m\, M\, \frac{1+\epsilon-2}{2\, \rho(0)} = \gamma\, m\, M\, \frac{\epsilon - 1}{2\, a\,(1-\epsilon)} = -\frac{\gamma\, m\, M}{2\, a}. \tag{II.181}$$

Die Energie U bestimmt die große Halbachse a ("Länge" des Kegelschnitts).

Die Umlaufzeit τ eines Planeten um die Sonne läßt sich in einfacher Weise aus dem Flächensatz berechnen. Nach Abschnitt II.3.3 gilt für die Flächengeschwindigkeit $\underline{\dot{S}}$

$$\underline{\dot{S}} = \frac{1}{2\, m}\, \underline{L} = const. \tag{II.182}$$

Dann folgt

$$S \quad = \quad \int_0^{\tau} \dot{S}\, dt = \frac{L}{2\, m} \cdot \tau. \tag{II.183}$$

Die Ellipsenfläche ist aber andererseits

$$S = \pi \cdot a \cdot b. \tag{II.184}$$

Somit ergibt sich

$$\pi\, a\, b \quad = \quad \frac{L}{2\, m}\, \tau \tag{II.185}$$

$$\frac{\tau^2}{a^3} \quad = \quad \frac{(2\, m\, \pi\, a\, b)^2}{L^2\, a^3} = \frac{2\, m\, \pi)^2\, a^2}{L^2\, a^3}\, k \cdot a = \frac{(2\, m\, \pi)^2}{L^2}\, \frac{L^2}{\gamma\, m^2\, M} \tag{II.186}$$

$$\frac{\tau^2}{a^3} \quad = \quad \frac{4\, \pi^2}{\gamma\, M} = const \quad \text{(3.Keplersches Gesetz).} \tag{II.187}$$

Zusammenfassung der Eigenschaften der Bewegung eines Massenpunktes im Gravitationspotential

$$V(\rho) = -\gamma\, \frac{m\, M}{\rho}\ : \tag{II.188}$$

- Drehimpulserhaltung
- ebene Bewegung
- Flächensatz (2. Keplersches Gesetz)
- Energieerhaltung
- Kegelschnitte (insbes. Ellipsen, 1. Keplersches Gesetz)
- $\tau^2 \sim a^3$ (3. Keplersches Gesetz).

Qualitative Diskusionen der Bewegungstypen für einen Massenpunkt im Gravitationspotential

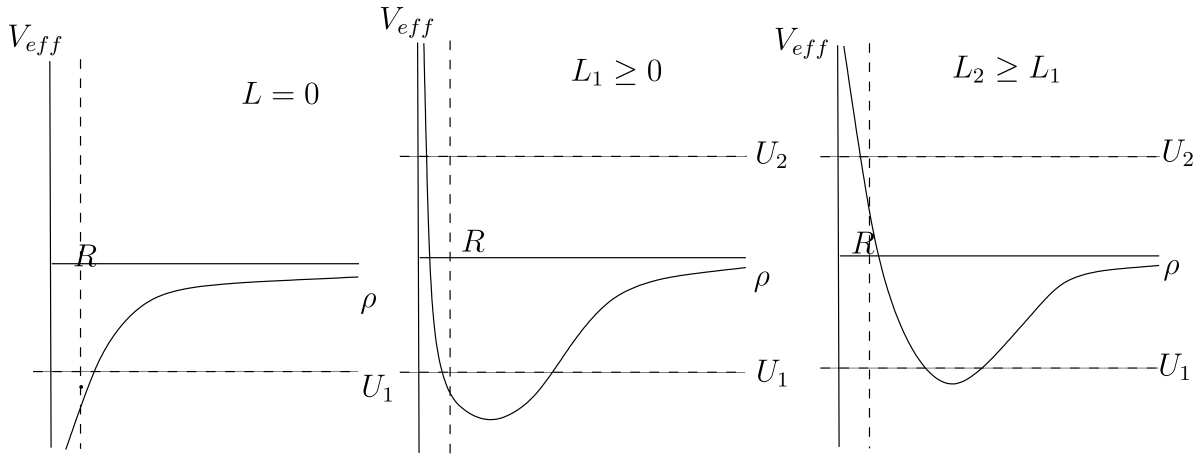
$$V(\rho) = -\gamma\, \frac{m\, M}{\rho}\ : \tag{II.189}$$

Der Energieerhaltungssatz

$$\frac{m}{2}\, \dot{\rho}^2 + V_{\text{eff}}(\rho) = U \quad , \quad V_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2\, m\, \rho^2} - \gamma \frac{m\, M}{\rho} \tag{II.190}$$

erlaubt eine anschauliche Diskusion der Bewegungstypen ähnlich wie bei der eindimensionalen Bewegung im Abschnitt II.3.5.1.

Wir wollem jetzt zur Veranschaulichung mit M die Erde (Radius R) und mit m einen Satelliten identifizieren. Betrachtet werden 3 verschiedene Drehimpulse und zwei Energiewerte ($U_1 < 0$, $U_2 > 0$).



Absturz ohne Orbit | Absturz aus dem Orbit bei U_1; Entweichen bei U_2. | Entweichen bei U_2; Orbit bei U_1.

Der Beitrag des Drehimpulses zum Potential V_{eff} wirkt wie eine abstoßende Kraft.

Kosmische Geschwindigkeiten
Um den Absturz des Satelliten zu verhindern muß

$$R < \rho(0) = \frac{k}{1+\epsilon} = \frac{L^2}{\gamma\, m^2\, M\,(1+\epsilon)} \tag{II.191}$$

bzw.

$$L > \sqrt{\gamma\, m^2\, M\,(1+\epsilon)\, R} \tag{II.192}$$

gelten. Die rechte Seite ist von der numerischen Exzentrizität ϵ abhängig und erreicht ihr Minimum offensichtlich für $\epsilon = 0$, was einer Kreisbahn des Satelliten entspricht. Im Grenzfall muß der Radius dieser Kreisbahn mindestens R betragen. Dann gilt

$$L = m\, R^2\, \dot{\varphi}. \tag{II.193}$$

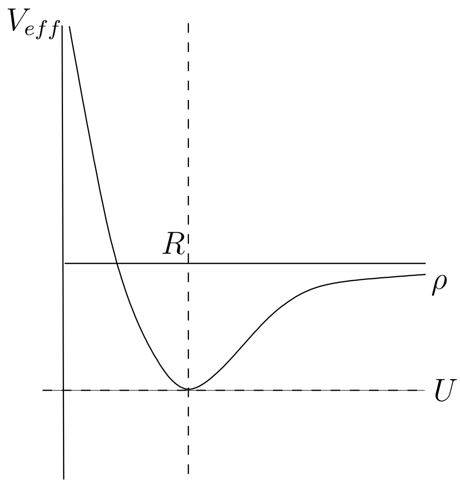
Wir führen nun über

$$v_\varphi \equiv R \cdot \dot{\varphi} \tag{II.194}$$

die Tangentialgeschwindigkeit ein und erhalten

$$v_\varphi > \sqrt{\frac{\gamma\, M}{R}} = 7,9\text{km/s}. \tag{II.195}$$

Graphisch veranschaulicht entspricht dies der dargestellten Grenzsituation.



$v_\varphi = 7,9$km/s ist die 1. Kosmische Geschwindigkeit.

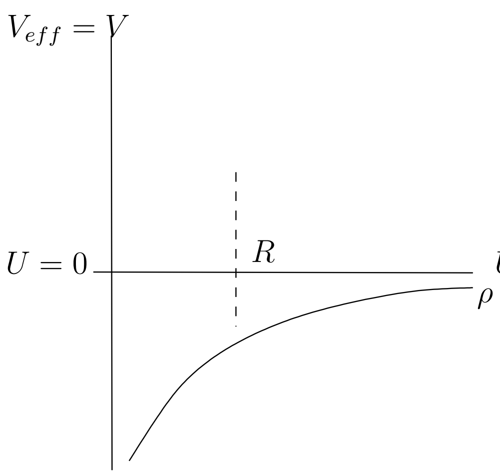
Die 2. Kosmische Geschwindigkeit ist notwendig, um die “gebundene” Bahn um die Erde zu verlassen und nach $\rho \to \infty$ zu entweichen. Dazu muß offensichtlich $U = 0$ gelten. Die Ellipsenbahn reißt in eine Parabelbahn auf; dem entspricht $\epsilon = 1$. Der Energieerhaltungssatz liefert dafür

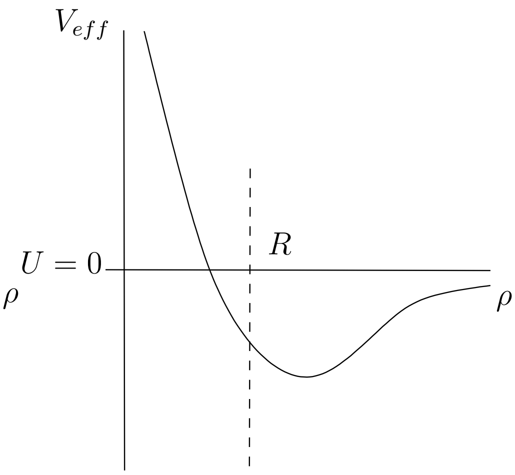
$$0 = U = \frac{m}{2}\,v^2 - \gamma\frac{m\,M}{R}, \tag{II.196}$$

woraus die 2. Kosmische Geschwindigkeit

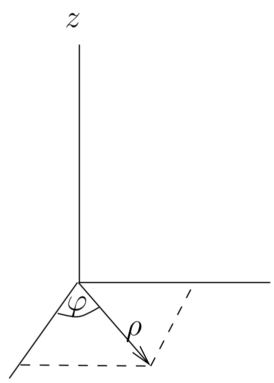
$$v_\infty = \sqrt{2\,\frac{\gamma\,M}{R}} = 11,2\text{km/s} \tag{II.197}$$

folgt. Es ist unerheblich, ob v_∞ als reine Radialkomponente $(\dot\rho)$) oder mit einer Tangentialkomponente $(\rho\,\dot\varphi)$und damit mit einem Drehimpulsanteil erzielt wird.





2.3.6.3 Freier Fall mit Reibung im homogenen Schwerefeld



Einem bewegten Körper in einem gasförmig oder flüssigem Medium tritt eine Widerstandskraft entgegen. Diese dissipative Kraft $\underline{F}^{\mathrm{D}}$ hängt erfahrungsgemäß von der Geschwindigkeit ab. Die funktionale Abhängigkeit kann recht kompliziert sein. Wir nehmen an, es gilt

$$\underline{F}^{\mathrm{D}} = f(\dot{z})\,\underline{e}_z. \tag{II.198}$$

Neben der Gravitationskraft

$$\underline{F}^{\mathrm{G}} = -m \cdot g\,\underline{e}_z \tag{II.199}$$

wirkt auf den Körper auch die Auftriebskraft

$$\underline{F}^{\mathrm{A}} = +m_m\,g\,\underline{e}_z, \tag{II.200}$$

wobei m_m die Masse des verdrängten Mediums ist. Somit gilt

$$m\,\ddot{z} = (m_m - m)\,g + f(\dot{z}) = -m\,\tilde{g} + f(\dot{z}) \tag{II.201}$$

mit $\tilde{g} = (1 - \dfrac{m_m}{m})\,g$. Mit der Substitution

$$\zeta = \dot{z} \tag{II.202}$$

folgt

$$\dot{\zeta} = -\tilde{g} + \frac{1}{m}\,f(\zeta). \tag{II.203}$$

Separation liefert

$$dt = \frac{d\zeta}{\frac{1}{m}\,f(\zeta) - \tilde{g}} \tag{II.204}$$

bzw.

$$t = \int_0^{\dot{z}} \frac{d\zeta'}{\frac{1}{m}\,f(\zeta') - \tilde{g}}. \tag{II.205}$$

Im Ergebnis der Integration folgt $t(\dot{z})$. Die Umkehrfunktion $\dot{z}(t)$ ist ein weiteres Mal zu integrieren, um $z(t)$ zu erhalten.

Wir betrachten nun zwei weitere spezielle Fälle.

1. Laminares Medium mit $f(\dot z) = -\alpha\,\dot z$,

2. Turbulentes Medium mit $f(\dot z) = +\beta\,\dot z^2 \quad (\dot z \le 0)$.

Im Fall 1. folgt

$$\begin{aligned}
t &= -\int_0^{\dot z} \frac{d\zeta'}{\Gamma\,\zeta' + \tilde g} \quad \text{mit } \Gamma = \frac{\alpha}{m} && \text{(II.206)}\\
t &= -\frac{1}{\Gamma}\,\ln(\Gamma\zeta' + \tilde g)\,|_0^{\dot z} && \text{(II.207)}\\
t &= -\frac{1}{\Gamma}\,\ln\frac{\Gamma\,\dot z + \tilde g}{\tilde g} && \text{(II.208)}\\
e^{-\Gamma\,t} &= \frac{\Gamma\,\dot z + \tilde g}{\tilde g} && \text{(II.209)}\\
\dot z &= -\frac{\tilde g}{\Gamma}\,(1 - e^{-\Gamma\,t}). && \text{(II.210)}
\end{aligned}$$

Ab $t = 0$ nimmt die Geschwindigkeit betragsmäßig zu. Für $t \to \infty$ wird die konstante Fallgeschwindigkeit

$$v_\infty = -\frac{\tilde g}{\Gamma} \qquad \text{(II.211)}$$

angenommen. Diese Bedingung korrespondiert mit $\ddot z = 0$, also $-m\,\tilde g - \alpha\,\dot z = 0$. Praktisch ist v_∞ bereits für $t \gg \frac{1}{\Gamma}$ erreicht. Die Ausführung der noch ausstehenden Integration von $\dot z$ bleibt daher dem Leser überlassen.

Im Fall 2. folgt

$$\begin{aligned}
t &= -\frac{1}{\tilde g}\int_0^{\dot z} \frac{d\zeta'}{1 - \kappa^2\,\zeta^2} \quad \text{mit } \kappa^2 = \frac{\beta}{m\,\tilde g} && \text{(II.212)}\\
t &= -\frac{1}{2\,\tilde g}\int_0^{\dot z}\left(\frac{1}{1+\kappa\,\zeta'} + \frac{1}{1-\kappa\,\zeta'}\right) d\zeta' && \text{(II.213)}\\
t &= -\frac{1}{2\,\tilde g\,\kappa}\,\ln\frac{1+\kappa\,\dot z}{1-\kappa\,\dot z} && \text{(II.214)}\\
\frac{1+\kappa\,\dot z}{1-\kappa\,\dot z} &= e^{-2\,\tilde g\,\kappa\,t} && \text{(II.215)}\\
1+\kappa\,\dot z &= e^{-2\,\tilde g\,\kappa\,t} - \kappa\,\dot z\,e^{-2\,\tilde g\,\kappa\,t} && \text{(II.216)}\\
\dot z &= \frac{1}{\kappa}\,\frac{-1 + e^{-2\,\tilde g\,\kappa\,t}}{1 + e^{-2\,\tilde g\,\kappa\,t}} = -\frac{1}{\kappa}\,\frac{e^{\tilde g\,\kappa\,t} - e^{-\tilde g\,\kappa\,t}}{e^{\tilde g\,\kappa\,t} + e^{-\tilde g\,\kappa\,t}} && \text{(II.217)}\\
\dot z &= -\frac{1}{\kappa}\,\tanh(\tilde g\,\kappa\,t). && \text{(II.218)}
\end{aligned}$$

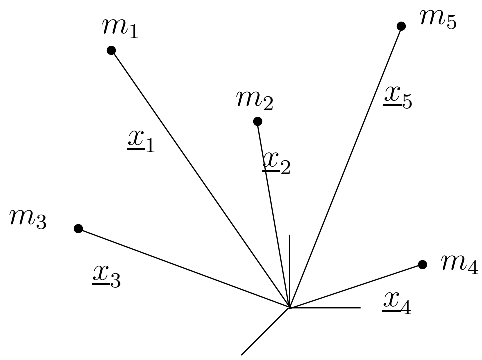
Für $t \gg \frac{1}{\tilde g\,\kappa}$ stellt sich wiederum eine konstante Geschwindigkeit

$$v_\infty = -\frac{1}{\kappa} = -\sqrt{\frac{\tilde g\,m}{\beta}} \qquad \text{(II.219)}$$

ein, was natürlich sofort am Kraftgesetz verifiziert werden kann.

4 Dynamik eines Massenpunktsystems

Wir betrachten ein System von N Körpern, wobei jeder einzelne Körper als ein Massenpunkt aufgefaßt werden kann. Die Masse des ν-ten Körpers ist m_ν, sein Ortsvektor sei $\underline{x}_\nu$.



Auf den Massenpunkt ν wirkt die Kraft $\underline{F}_\nu$.

4.1 Bewegungsgleichungen

Für jeden einzelnen Massenpunkt (Körper) gilt das Grundgesetz der Dynamik (2. Newtonsches Prinzip):

$$m_\nu \, \dot{\underline{x}}_\nu = \underline{F}_\nu; \quad \nu = 1, 2, \ldots, N. \tag{II.220}$$

Die Kräfte $\underline{F}_\nu$ sind im allgemeinen nicht nur vom ν-ten Massenpunkt und damit von $\underline{x}_\nu, \dot{\underline{x}}_\mu$ abhängig, sondern auch von allen anderen Massenpunkten ν. Wir schreiben dies in der Form

$$\underline{F}_\nu = \underline{F}_\nu(\underline{x}_1, \dot{\underline{x}}_1, \underline{x}_2, \dot{\underline{x}}_2, \ldots, \underline{x}_N, \dot{\underline{x}}_N, t) \tag{II.221}$$

oder kurz

$$\underline{F}_\nu = \underline{F}_\nu(\underline{x}_\mu, \dot{\underline{x}}_\mu, t). \tag{II.222}$$

Somit stellen die Bewegungsgleichungen ein System von $3N$ verkoppelten Differentialgleichungen dar, die es zu lösen gilt.

Häufig ist es zweckmäßig, die Kräfte $\underline{F}_\nu$ in zwei Klassen zu unterteilen,

1. in äußere Kräfte $\underline{F}_\nu^{\text{ext}}$, die von außen auf das betrachtete Massenpunktsystem einwirken und
2. in innere Kräfte $\underline{F}_{\nu\mu}$, die zwischen zwei Massenpunkten ν und μ wirken.

Dann ergibt sich die Gesamtkraft $\underline{F}_\nu$ auf den Massenpunkt ν aus

$$\underline{F}_\nu = \underline{F}_\nu^{\text{ext}} + \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{N} \underline{F}_{\nu\mu}. \tag{II.223}$$

Vereinbaren wir eine Größe $\underline{F}_{\nu\nu} = 0$, so kann man kürzer schreiben

$$\underline{F}_\nu = \underline{F}_\nu^{\text{ext}} + \sum_{\mu=1}^{N} \underline{F}_{\nu\mu} \tag{II.224}$$

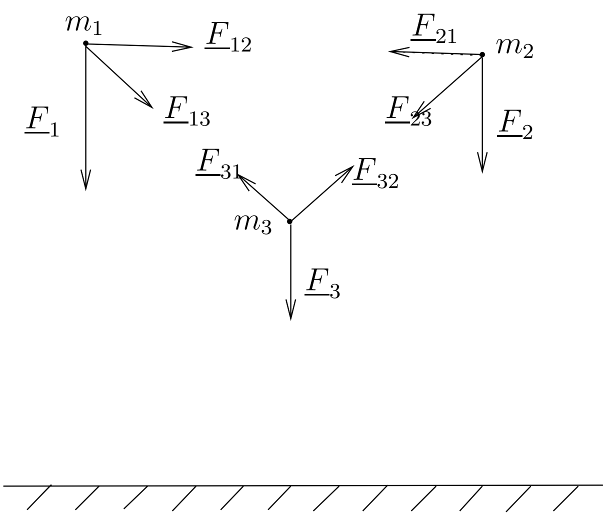
bzw.

$$m_\nu \, \underline{\ddot{x}}_\nu = \underline{F}_\nu^{\text{ext}} + \sum_{\mu=1}^{N} \underline{F}_{\nu\mu}. \tag{II.225}$$

Nach dem 3. Newtonschen Prinzip gilt

$$\underline{F}_{\nu\mu} = -\underline{F}_{\mu\nu}. \tag{II.226}$$

Beispiel: Interne und externe Gravitationskräfte



Große Masse, die externes Gravitationsfeld erzeugt.

In sehr vielen Fällen sind die inneren Kräfte Zentralkräfte und es gilt

$$\underline{F}_{\nu\mu} = F_{\nu\mu} \cdot \frac{\underline{x}_\nu - \underline{x}_\mu}{|\underline{x}_\nu - \underline{x}_\mu|}. \tag{II.227}$$

4.2 Impulsbilanz (Massenmittelpunktsatz)

Die Bewegungsgleichungen werden über alle ν aufsummiert, und es folgt

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \, \underline{\ddot{x}}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \underline{F}_\nu^{\text{ext}} + \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{N} \underline{F}_{\nu\mu}. \tag{II.228}$$

In der echten Doppelsumme treten alle Kombinationen von μ und ν auf, also z.B. $F_{12} + F_{21}$. Nun gilt aber nach dem 3. Newtonschen Prinzip

$$F_{12} + F_{21} = 0. \tag{II.229}$$

Damit verschwindet die gesamte Doppelsumme.

Folgende Größen werden eingeführt:

Gesamtimpuls: $\underline{P} = \sum_{\nu=1}^{N} \underline{p}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \, \underline{\dot{x}}_\nu$

Gesamtkraft: $\underline{F}^{\mathrm{ext}} = \sum_{\nu=1}^{N} \underline{F}_\nu^{\mathrm{ext}}.$

Damit folgt aus obiger summierten Gleichung die Gesamtimpulsbilanz

$$\dot{\underline{P}} = \underline{F}^{\mathrm{ext}}, \tag{II.230}$$

d.h. die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses eines Massenpunktsystems ist gleich der Resultante der äußeren Kräfte.

Ein Massenpunktsystem heißt abgeschlossen, wenn keine äußeren Kräfte wirken, also wenn

$$\underline{F}_\nu^{\mathrm{ext}} = 0 \tag{II.231}$$

und damit

$$\underline{F}^{\mathrm{ext}} = 0 \tag{II.232}$$

gilt. Dann bleibt der Gesamtdrehimpuls erhalten:

$$\dot{\underline{P}} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \underline{P} = const. \tag{II.233}$$

Der Erhaltungssatz entspricht den drei 1. Integralen, die im Gegensatz zum einzelnen Massenpunkt nicht trivial sind.

Der Massenmittelpunkt $\underline{X}$ (Schwerpunkt) eines Massenpunktsystems wird definiert durch

$$\underline{X} = \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \, \underline{x}_\nu \tag{II.234}$$

mit der Gesamtmasse

$$m = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu. \tag{II.235}$$

Offensichtlich gilt

$$\underline{P} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \cdot \dot{\underline{x}}_\nu = m\dot{\underline{X}}. \tag{II.236}$$

Die Gesamtimpulsbilanz schreibt sich dann in der Form

$$\dot{\underline{P}} = m\ddot{\underline{X}} = \underline{F}^{\mathrm{ext}}, \tag{II.237}$$

d.h. der Massenmittelpunkt bewegt sich so, als ob in ihm die gesamte Masse des Systems konzentriert wäre und an ihm die Resultante der äußeren Kräfte wirkt.

Folglich führt in einem abgeschlossenen System der Massenmittelpunkt eine gleichförmige geradlinige Bewegung aus.

4.3 Drehimpulsbilanz

Wir definieren für den ν-ten Massenpunkt den Drehimpuls

$$\underline{L}_\nu = \underline{x}_\nu \times \underline{p}_\nu \tag{II.238}$$

und das Drehmoment

$$\underline{M}_\nu = \underline{x}_\nu \times \underline{F}_\nu. \tag{II.239}$$

Aus

$$\dot{\underline{p}}_\nu = \underline{F}_\nu \tag{II.240}$$

folgt durch vektorielle Multiplikation mit $\underline{x}_\nu$ die Drehimpulsbilanz des ν-ten Massenpunktes

$$\dot{\underline{L}}_\nu = \underline{M}_\nu. \tag{II.241}$$

Wir summieren über alle ν zu

$$\sum_{\nu=1}^{N} \dot{\underline{L}}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \underline{M}_\nu \tag{II.242}$$

und definieren den Gesamtdrehimpuls

$$\underline{L} = \sum_{\nu=1}^{N} \underline{L}_\nu \tag{II.243}$$

sowie das Gesamtdrehmoment

$$\underline{M} = \sum_{\nu=1}^{N} \underline{M}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \underline{x}_\nu \times \underline{F}_\nu. \tag{II.244}$$

Letzteres läßt sich umformen zu

$$\underline{M} = \sum_{\nu=1}^{N} \underline{x}_\nu \times \left(\underline{F}_\nu^{\text{ext}} + \sum_{\mu=1}^{N} \underline{F}_{\nu\mu} \right) \tag{II.245}$$

$$\underline{M} = \sum_{\nu=1}^{N} \underline{x}_\nu \times \underline{F}_\nu^{\text{ext}} + \sum_{\nu,\mu=1}^{N} \underline{x}_\nu \times \underline{F}_{\nu\mu}. \tag{II.246}$$

Die Doppelsumme ergibt

$$\sum_{\nu,\mu=1}^{N} \underline{x}_\nu \times \underline{F}_{\nu\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\nu,\mu=1}^{N} \left(\underline{x}_\nu \times \underline{F}_{\nu\mu} + \underline{x}_\mu \times \underline{F}_{\mu\nu} \right) \tag{II.247}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\nu,\mu=1}^{N} \left(\underline{x}_\nu \times \underline{F}_{\nu\mu} - \underline{x}_\mu \times \underline{F}_{\nu\mu} \right) \tag{II.248}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\nu,\mu=1}^{N} \left(\underline{x}_\nu - \underline{x}_\mu \right) \times \underline{F}_{\nu\mu}. \tag{II.249}$$

Wir setzen nun voraus, daß die inneren Kräfte zwischen den Massenpunkten Zentralkräfte der Form

$$\underline{F}_{\nu\mu} = F_{\nu\mu} \cdot \frac{\underline{x}_\nu - \underline{x}_\mu}{|\underline{x}_\nu - \underline{x}_\mu|} \tag{II.250}$$

sind. Damit verschwindet die Doppelsumme, und es verbleibt

$$\underline{M} = \sum_{\nu=1}^{N} \underline{x}_\nu \times \underline{F}_\nu^{\text{ext}}, \tag{II.251}$$

d.h. das Gesamtdrehmoment ist die Resultante der Drehmomente der äußeren Kräfte.

Die Gesamtdrehimpulsbilanz folgt dann zu

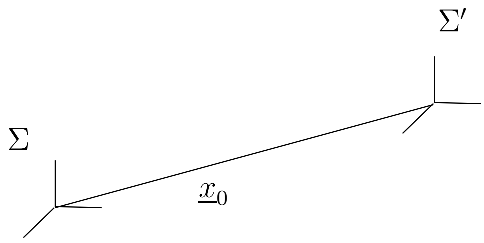
$$\dot{\underline{L}} = \underline{M} = \sum_{\nu=1}^{N} \underline{x}_\nu \times \underline{F}_\nu^{\mathrm{ext}}. \tag{II.252}$$

Die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses ist gleich dem Gesamtdrehmoment der äußeren Kräfte, wenn die inneren Kräfte Zentralkräfte sind.

Der Gesamtdrehimpuls bleibt erhalten, wenn keine äußeren Kräfte wirken oder wenn die Resultante ihrer Drehmomente verschwindet.

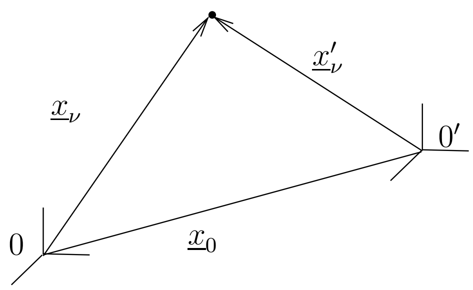
Einfluß des Bezugssytems auf den Drehimpuls

Der Drehimpuls hängt i.a. von der Wahl des Bezugssystems ab. Wir betrachten zwei Bezugssysteme Σ und Σ'.



Zunächst betrachten wir den Fall, daß sich Σ und Σ' nicht gegeneinander bewegen, also $\dot{\underline{x}}_0 = 0$ gilt. Für jeden Massenpunkt ν gilt

$$\underline{x}_\nu = \underline{x}_0 + \underline{x}'_\nu. \tag{II.253}$$



Für die Gesamtdrehimpulse $\underline{L}$ und $\underline{L}'$ in Σ und Σ' folgt der Zusammenhang

$$\underline{L} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \, \underline{x}_\nu \times \dot{\underline{x}}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \, (\underline{x}'_\nu + \underline{x}_0) \times \dot{\underline{x}}'_\nu \tag{II.254}$$

$$\underline{L} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \, \underline{x}'_\nu \times \dot{\underline{x}}'_\nu + \underline{x}_0 \times \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \underline{x}'_\nu \tag{II.255}$$

$$\underline{L} = \underline{L}' + \underline{x}_0 \times \underline{P}'. \tag{II.256}$$

Der Drehimpuls ist also von der Wahl des Bezugssystems abhängig. Er wird unabhängig vom Bezugssystem, wenn der Gesamtdrehimpuls $\underline{P}'$verschwindet, also wenn der Massenmittelpunkt in Σ' ruht.

Wir betrachten nun den Fall gegenseitiger Bewegung von Σ und Σ', ohne daß die Systeme gegeneinander rotieren ($\underline{\omega} = 0$). Die relative Bewegung wird also durch $\underline{x}_0(t)$ beschrieben. Dann gilt

$$\underline{L} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \, (\underline{x}'_\nu + \underline{x}_0) \times (\underline{\dot{x}}'_\nu + \underline{\dot{x}}_0) \tag{II.257}$$

$$\underline{L} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \, \underline{x}'_\nu \times \underline{\dot{x}}'_\nu + \underline{x}_0 \times \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \, \underline{\dot{x}}'_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \, \underline{x}'_\nu \times \underline{\dot{x}}_0 + \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \, \underline{x}_0 \times \underline{\dot{x}}_0 \tag{II.258}$$

$$\underline{L} = \underline{L}' + \underline{x}_0 \times \underline{P}' + m \, \underline{X}' \times \underline{\dot{x}}_0 + m \underline{x}_0 \times \underline{\dot{x}}_0 . \tag{II.259}$$

Besonders interessant ist nun der Fall, wenn Σ' gerade das Schwerpunktsystem (Massenmittelpunktsystem) darstellt. Dann liegt der Massenmittelpunkt im Ursprung 0' von Σ' und es gilt

$$\underline{X}' = 0 \quad , \quad \underline{P}' = 0 \quad , \quad \underline{X} = \underline{x}_0 , \tag{II.260}$$

woraus

$$\underline{L} = \underline{L}' + m \underline{X} \times \underline{\dot{X}} = \underline{L}' + \underline{X} \times \underline{P} \tag{II.261}$$

folgt. Im Nicht-Schwerpunktsystem Σ ist der Drehimpuls $\underline{L}$ gleich dem Drehimpuls im Schwerpunktsystem $\underline{L}'$ plus dem Drehimpuls der Schwerpunktbewegung.

4.4 Energiebilanz

Ausgangspunkt sind die Bewegungsgleichungen für einen Massenpunkt ν. Die Gleichungen

$$m_\nu \, \underline{\ddot{x}}_\nu = \underline{F}_\nu \tag{II.262}$$

werden skalar mit $\underline{\dot{x}}_\nu$ multipliziert und es folgt

$$d_t \left(\frac{m_\nu}{2} \, \underline{\dot{x}}_\nu^2 \right) = \underline{F}_\nu \cdot \underline{\dot{x}}_\nu . \tag{II.263}$$

Mit

$$T_\nu = \frac{m_\nu}{2} \, \underline{\dot{x}}_\nu^2 \tag{II.264}$$

ergibt sich

$$d_t T_\nu = \underline{F}_\nu \cdot \underline{\dot{x}}_\nu . \tag{II.265}$$

Summation über alle Massenpunkte liefert

$$d_t T = \sum_{\nu=1}^{N} \underline{F}_\nu \cdot \underline{\dot{x}}_\nu \tag{II.266}$$

mit

$$T = \sum_{\nu=1}^{N} T_\nu \tag{II.267}$$

als kinetischer Gesamtenergie.

Sind die Kräfte $\underline{F}_\nu$ <u>konservativ</u>, d.h.

$$\underline{F}_\nu = \underline{F}_\nu(\underline{x}_\nu) , \tag{II.268}$$

$$\partial_{\underline{x}_\nu} \times \underline{F}_\nu = 0 , \tag{II.269}$$

dann existiert ein Potential

$$V(\underline{x}_\nu) \equiv V(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_N), \tag{II.270}$$

so daß

$$\underline{F}_\nu = -\partial_{\underline{x}_\nu} V \tag{II.271}$$

gilt. Für die totale zeitliche Änderung von V ergibt sich nun

$$d_t V(\underline{x}_1(t), \underline{x}_2(t), \ldots, \underline{x}_N(t)) = \sum_{\nu=1}^{N} \partial_{\underline{x}_\nu} V \cdot d_t \underline{x}_\nu = -\sum_{\nu=1}^{N} \underline{F}_\nu \cdot \dot{\underline{x}}_\nu \tag{II.272}$$

und die Bilanz der kinetischen Energie schreibt sich in der Form

$$d_t T = -d_t V \tag{II.273}$$

$$d_t(T + V) = 0 \tag{II.274}$$

$$T + V = U = const. \tag{II.275}$$

Für konservative Systeme gilt Erhaltung der mechanischen Gesamtenergie U.

Die Struktur des Potentials $V(\underline{x}_\mu)$ soll noch etwas genauer analysiert werden. Die auf den Massenpunkt ν wirkende konservative Kraft $\underline{F}_\nu$ zerlegen wir gemäß Abschnitt II.4.1 in externe und innere Anteile, wobei letztere Zentralkräfte im engeren Sinne sein sollen. Dann gilt

$$\underline{F}_\nu = \underline{F}_\nu^{\text{ext}} + \sum_{\mu=1}^{N} \underline{F}_{\nu\mu}(|\underline{x}_\nu - \underline{x}_\mu|) \cdot \frac{\underline{x}_\nu - \underline{x}_\mu}{|\underline{x}_\nu - \underline{x}_\mu|}. \tag{II.276}$$

Das Gesamtpotential V kann dann in ein äußeres Potential V^{ext} und das Wechselwirkungspotential V^{int} zerlegt werden, wobei gilt

$$V = V^{\text{ext}} + V^{\text{int}} \tag{II.277}$$

$$V = \sum_{\kappa=1}^{N} V_\kappa(\underline{x}_\kappa) + \frac{1}{2} \sum_{\kappa,\mu=1}^{N} V_{\kappa\mu}(|\underline{x}_\kappa - \underline{x}_\mu|) \tag{II.278}$$

mit

$$\underline{F}_\nu^{\text{ext}} = -\partial_{\underline{x}_\nu} V_\nu, \tag{II.279}$$

$$\underline{F}_{\nu\mu} = -\partial_{\underline{x}_\nu} V_{\nu\mu}, \tag{II.280}$$

$$V_{\nu\mu} = V_{\mu\nu}. \tag{II.281}$$

Es sei betont, daß die Schreibweise $V_\kappa(\underline{x}_\kappa)$ besagt, daß der äußere Potentialanteil V_κ des κ-ten Massenpunktes auch nur von genau dessen Ortsvektor $\underline{x}_\kappa$ abhängt. Analoges gilt für $V_{\kappa\mu}(|\underline{x}_\kappa - \underline{x}_\mu|)$.

Zum Beweis der Richtigkeit obiger Darstellung von V bilden wir einfach

$$\underline{F}_\nu = -\partial_{\underline{x}_\nu} V. \tag{II.282}$$

Die Differentiation nach $\underline{x}_\nu$ selektiert aus dem äußeren Anteil V^{ext} sofort den gewünschten Term $\underline{F}_\nu^{\text{ext}}$. Für den inneren Anteil gilt

$$\partial_{\underline{x}_\nu} V^{\text{int}} = \partial_{\underline{x}_\nu} \frac{1}{2} \sum_{\kappa,\mu=1}^{N} V_{\kappa\mu}(|\underline{x}_\kappa - \underline{x}_\mu|). \tag{II.283}$$

Die Doppelsumme auf der rechten Seite bricht in zwei Einfachsummen zusammen, da nur Terme mit $\nu = \kappa$ oder $\nu = \mu$ nichtverschwindene Anteile ergeben. So folgt

$$\partial_{\underline{x}_\nu} V^{\mathrm{int}} = \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{N} \partial_{\underline{x}_\nu} V_{\nu\mu} + \frac{1}{2}\sum_{\kappa=1}^{N} \partial_{\underline{x}_\nu} V_{\kappa\nu}. \tag{II.284}$$

Unter Ausnutzung der Symmetrie der Potentiale ($V_{\nu\mu} = V_{\mu\nu}$) und Umbenennung des Summationsindex erhält man

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{x}_\nu} V^{\mathrm{int}} &= \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{N} \partial_{\underline{x}_\nu} V_{\nu\mu} + \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{N} \partial_{\underline{x}_\nu} V_{\nu\mu} & \text{(II.285)} \\ &= \sum_{\mu=1}^{N} \partial \underline{x}_\nu V_{\nu\mu} = -\sum_{\mu=1}^{N} \underline{F}_{\nu\mu}. & \text{(II.286)} \end{aligned}$$

Damit ist die Darstellung

$$\underline{F}_\nu = -\partial_{\underline{x}_\nu}(V^{\mathrm{ext}} + V^{\mathrm{int}}) \tag{II.287}$$

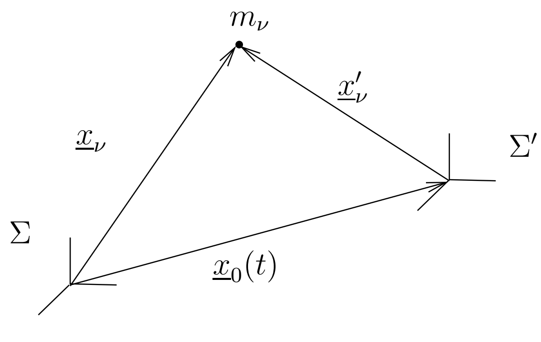
bestätigt.

Bemerkung:

In einem abgeschlossenen System ($\underline{F}_\nu^{\mathrm{ext}} = 0$) gibt es nur innere Kräfte. Diese sind in der Regel Zentralkräfte. Für sie existiert ein Potential $V = V^{\mathrm{int}}$ und das System ist konservativ. Dies bestätigt die Erfahrungstatsache, daß abgeschlossene Systeme die Gesamtenergie erhalten.

Einfluß des Bezugssystems auf die kinetische Energie

Die kinetische Energie hängt i.a. von der Wahl des Bezugssystems ab. Wir betrachten zwei Bezugssysteme Σ und Σ', die sich gegeneinander translatorisch bewegen, aber nicht gegeneinander rotieren.



Mit $\underline{x}_\nu(t) = \underline{x}_0(t) + \underline{x}'_\nu(t)$ berechnet sich die kinetische Energie in Σ zu

$$\begin{aligned} T &= \sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu}{2}\,\dot{\underline{x}}_\nu^2 = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu}{2}\,(\dot{\underline{x}}_0 + \dot{\underline{x}}_\nu)^2 & \text{(II.288)} \\ T &= \sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu}{2}\,\dot{\underline{x}}_0^2 + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu}{2}\,\dot{\underline{x}}_\nu'^2 + \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\,\dot{\underline{x}}_0\,\dot{\underline{x}}'_\nu & \text{(II.289)} \\ T &= \frac{m}{2}\,\dot{\underline{x}}_0^2 + T' + \dot{\underline{x}}_0 \cdot \underline{P}'. & \text{(II.290)} \end{aligned}$$

Wählen wir nun speziell Σ' als Schwerpunktsystem, dann gilt

$$\underline{X}' = 0 \quad , \quad \underline{P}' = 0 \quad , \quad \underline{X} = \underline{x}_0 \quad , \quad \dot{\underline{X}} = \dot{\underline{x}}_0 \tag{II.291}$$

und somit

$$T = T' + \frac{m}{2}\,\dot{\underline{X}}^2 . \tag{II.292}$$

Die kinetische Energie des Massenpunktes setzt sich also zusammen aus der kinetischen Energie im Schwerpunktsystem plus der kinetischen Energie der Translationsbewegung des im Schwerpunkt vereinigt gedachten Systems.

4.5 Virialsatz

Bei Bewegungsvorgängen von Massenpunkten und Massenpunktsystemen findet ständig eine Umwandlung von kinetischer in potentielle Energie statt. Der Virialsatz macht eine Aussage wie groß im zeitlichen Mittel die Beiträge von kinetischer und potentieller Energie zur Gesamtenergie sind.

Das Virial des Massenpunktsystems ist definiert als das zeitliche Mittel des Terms

$$\sum_{\nu=1}^{N} \underline{x}_\nu \cdot \partial_{\underline{x}_\nu} V . \tag{II.293}$$

Offensichtlich muß ein Potential V existieren, also

$$\underline{F}_\nu = -\partial_{\underline{x}_\nu} V . \tag{II.294}$$

Zur Ableitung des Virialsatzes multipliziere man die Bewegungsgleichung des ν-ten Massenpunktes skalar mit $\underline{x}_\nu$; es ergibt sich

$$m_\nu\, \underline{x}_\nu \cdot \ddot{\underline{x}}_\nu \quad = \quad \underline{x}_\nu \cdot \underline{F}_\nu \tag{II.295}$$

$$d_t(m_\nu\, \underline{x}_\nu \cdot \dot{\underline{x}}_\nu) - m_\nu\, \dot{\underline{x}}_\nu^2 \quad = \quad -\underline{x}_\nu \cdot \partial_{\underline{x}_\nu} V . \tag{II.296}$$

Summation liefert

$$\sum_{\nu=1}^{N} d_t(m_\nu\, \underline{x}_\nu \cdot \dot{\underline{x}}_\nu) - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\, \dot{\underline{x}}_\nu^2 = -\sum_{\nu=1}^{N} \underline{x}_\nu \cdot \partial_{\underline{x}_\nu} V . \tag{II.297}$$

Wir definieren nun den zeitlichen Mittelwert $< f >$ einer zeitabhängigen Größe $f(t)$ als

$$< f >= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t)\, dt \tag{II.298}$$

und bilden

$$< \sum_{\nu=1}^{N} d_t(m_\nu\, \underline{x}_\nu \cdot \dot{\underline{x}}_\nu) >= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\, \underline{x}_\nu\, \dot{\underline{x}}_\nu |_0^\tau . \tag{II.299}$$

Wir beschränken uns auf gebundene Bewegungen, für die $m_\nu \cdot \underline{x}_\nu \cdot \dot{\underline{x}}_\nu$ stets endlich bleibt; dann verschwindet die rechte Seite. Die verbleibenden Terme obiger Formel ergeben nach Mittlung den Virialsatz

$$< \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\, \dot{\underline{x}}_\nu^2 >=< \sum_{\nu=1}^{N} \underline{x}_\nu \cdot \partial_{\underline{x}_\nu} V > \tag{II.300}$$

bzw.

$$< T >= \frac{1}{2} < \sum_{\nu=1}^{N} \underline{x}_\nu \cdot \partial_{\underline{x}_\nu} V > . \tag{II.301}$$

Die zeitlich gemittelte kinetische Energie ist gleich dem halben Virial des Massenpunktsystems.

Der Virialsatz läßt sich weiter vereinfachen, wenn das Potential eine homogene Funktion vom Grade k ist.

W ist eine homogene Funktion vom Grade k, wenn die Ähnlichkeitsrelation

$$W(\alpha\, x_1, \alpha\, x_2, \ldots, \alpha\, x_n) = \alpha^k\, W(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{II.302}$$

gilt.

Beispiele:

1. Beispiel:

$$\begin{aligned} W(x) &= x^2 && \text{(II.303)}\\ W(\alpha\, x) &= (\alpha\, x)^2 = \alpha^2\, x^2 = \alpha^2\, W(x) && \text{(II.304)}\\ \rightsquigarrow k &= 2. && \text{(II.305)} \end{aligned}$$

2. Beispiel

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{1}{x} && \text{(II.306)}\\ W(\alpha\, x) &= \frac{1}{\alpha\, x} = \alpha^{-1}\, W(x) && \text{(II.307)}\\ \rightsquigarrow k &= -1. && \text{(II.308)} \end{aligned}$$

Für homogene Funktionen gilt der Eulersche Satz:

$$\sum_{a=1}^{N} x_a \cdot \partial_{x_a} W = k \cdot W. \tag{II.309}$$

Beweisidee:Definition nach α ableiten und $\alpha = 1$ setzen.

Wir nehmen an, $V(\underline{x}_\nu)$ ist eine homogene Funktion vom Grade k. Dann schreibt sich nach dem Eulerschen Satz

$$\sum_{\nu=1}^{N} \underline{x}_\nu \cdot \partial_{\underline{x}_\nu} V = k \cdot V \tag{II.310}$$

und der Virialsatz vereinfacht sich zu

$$< T >= \frac{k}{2} < V > . \tag{II.311}$$

Wegen $< T > + < V >=< U >= U$ folgt

$$< T >= \frac{k}{k+2} U \quad , \quad < V >= \frac{2}{k+2} U. \tag{II.312}$$

Beispiele:

1. System harmonischer Oszillatoren

   Das Potential ist eine homogene Funktion vom Grade $k = 2$. Dann gilt

$$< T >=< V >= \frac{1}{2} U. \tag{II.313}$$

2. System gravitativ wechselwirkender Massenpunkte

   Das Potential ist eine homogene Funktion vom Grade $k = -1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} < T > &= -\frac{1}{2} < V > && \text{(II.314)} \\ < T > &= -U && \text{(II.315)} \\ < V > &= 2U && \text{(II.316)} \end{aligned}$$

Bemerkungen:

1. Der Virialsatz gilt auch für $N = 1$.

2. Plausibilität für das Kepler-Problem und harmonische Oszillator (selbst!).

4.6 Integration der Bewegungsgleichungen bei Impulserhaltung, Drehimpulserhaltung und Energieerhaltung

Für einen einzigen Massenpunkt können im Fall der Drehimpuls- und Energieerhaltung die Bewegungsgleichungen bis auf die Berechnung von Integralen vollständig gelöst werden (vgl. Abschnitt II.3.5). Für ein Massenpunktsystem ist das i.a. nicht möglich.

Für ein abgeschlossenes System gehen wir davon aus, daß Impuls, Drehimpuls und Energie erhalten sind. Diese Erhaltungssätze entsprechen 10 Integrationskonstanten: 6 Orts- und Geschwindigkeitskomponenten des Massenmittelpunktes, 3 Komponenten des Drehimpulses und die Energie.

Die Gesamtzahl der Bewegungsgleichungen ist aber $3N$ und die Lösung ist durch $6N$ Integrationskonstanten bestimmt.

$N = 2$ (Zweikörperproblem):
12 Integrationskonstanten - 10 Erhaltungsgrößen = 2 noch fehlende Integrationskonstanten; können einfach bestimmt werden.

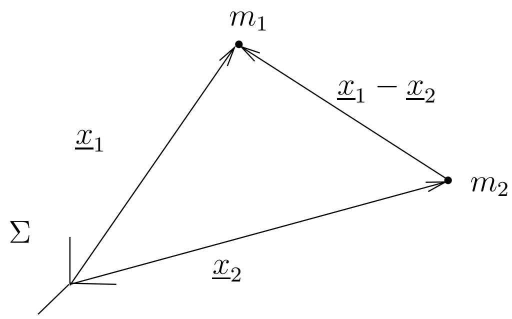
$N = 3$ (Dreikörperproblem):
18 Integrationskonstanten - 10 Erhaltungsgrößen = 8 noch fehlende Integrationskonstanten; nicht mehr allgemein bestimmbar. Das Dreikörperproblem ist nicht geschlossen integrierbar.

Bemerkung: $N = 1$:
6 Integrationskonstanten - 10 Erhaltungsgrößen = -4
Lösung: selbst.

4.7 Spezielle Probleme

4.7.1 Zweikörperproblem

Wir betrachten ein abgeschlossenes Zweikörpersystem.



Somit wirken keine äußeren Kräfte und Impuls, Drehimpuls und Energie sind erhalten:

$$\underline{P} = m\,\dot{\underline{X}} = const \tag{II.317}$$

$$\underline{L} = const \tag{II.318}$$

$$U = T + V = const. \tag{II.319}$$

In den Bewegungsgleichungen für m_1 und m_2 treten nur die inneren Kräfte auf. Es gilt

$$m_1\,\ddot{\underline{x}}_1 = \underline{F}_{12} = F_{12} \cdot \frac{\underline{x}_1 - \underline{x}_2}{|\underline{x}_1 - \underline{x}_2|} \tag{II.320}$$

$$m_2\,\ddot{\underline{x}}_2 = \underline{F}_{21} = F_{21}\,\frac{\underline{x}_2 - \underline{x}_1}{|\underline{x}_2 - \underline{x}_1|} = -\underline{F}_{12} \tag{II.321}$$

Folglich muß $F_{12} = F_{21}$ gelten (3. Newtonsche Prinzip).

Es ist zweckmäßig, die weitere Rechnung im System Σ', das wir mit dem Schwerpunktsystem identifizieren wollen, durchzuführen. Der Massenmittelpunkt $\underline{X}$ in Σ ergibt sich zu

$$\underline{X} = \frac{m_1\,\underline{x}_1 + m_2\,\underline{x}_2}{m_1 + m_2}. \tag{II.322}$$

Der Massenmittelpunkt in Σ' ist dann

$$\underline{X}' = \frac{m_1\,\underline{x}'_1 + m_2\,\underline{x}'_2}{m_1 + m_2} = 0. \tag{II.323}$$

Weiterhin gilt die Transformation

$$\underline{x}_1 = \underline{X} + \underline{x}'_1 \tag{II.324}$$

$$\underline{x}_2 = \underline{X} + \underline{x}'_2. \tag{II.325}$$

Für die Ortsvektoren im Schwerpunktsystem Σ' folgt dann

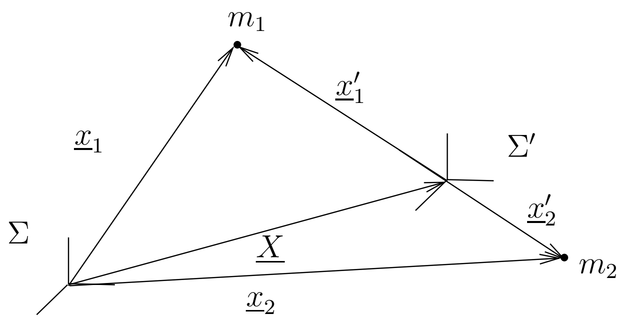
$$\underline{x}'_1 = \underline{x}_1 - \frac{m_1\,\underline{x}_1 + m_2\,\underline{x}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\,(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) \tag{II.326}$$

$$\underline{x}'_2 = \underline{x}_2 - \frac{m_1\,\underline{x}_1 + m_2\,\underline{x}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\,(\underline{x}_2 - \underline{x}_1). \tag{II.327}$$

Wegen $\underline{x}_1 - \underline{x}_2 = \underline{x}'_1 - \underline{x}'_2$ gilt auch

$$\underline{x}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\underline{x}'_1 - \underline{x}'_2) \tag{II.328}$$

$$\underline{x}'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\underline{x}'_2 - \underline{x}'_1) \tag{II.329}$$



Aufgrund der Impulserhaltung gilt für den Schwerpunkt

$$\dot{\underline{X}} = \underline{c}_1 = const \tag{II.330}$$

und es folgt

$$\underline{X}(t) = \underline{c}_1\, t + \underline{c}_2, \tag{II.331}$$

also die erwartete geradlinig gleichförmige Bewegung.

Wenn Σ ein Inertialsystem ist, ist auch Σ' ein Inertialsystem. Die Grundgleichungen sind somit invariant und wir können schreiben

$$m_1\, \ddot{\underline{x}}'_1 = F_{12} \frac{\underline{x}'_1 - \underline{x}'_2}{|\underline{x}'_1 - \underline{x}'_2|} \tag{II.332}$$

$$m_2\, \ddot{\underline{x}}'_2 = F_{12} \frac{\underline{x}'_2 - \underline{x}'_1}{|\underline{x}'_2 - \underline{x}'_1|}. \tag{II.333}$$

Diese Gleichungen können natürlich auch explizit aus den Grundgleichungen, die in Σ gültig sind, abgeleitet werde. (ÜA, selbst!).

Die Dgln. in Σ' werden nun gelöst. Dazu wird die erste Gleichung mit m_2, die zweite mit m_1 multipliziert und die Differenz gebildet mit dem Ergebnis

$$\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} (\ddot{\underline{x}}'_2 - \ddot{\underline{x}}'_1) = F_{21} \cdot \frac{\underline{x}'_2 - \underline{x}'_1}{|\underline{x}'_2 - \underline{x}'_1|}. \tag{II.334}$$

Mit den Abkürzungen

$$\underline{x}'_{21} \equiv \underline{x}'_2 - \underline{x}'_1 \tag{II.335}$$

$$\mu \equiv \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{(reduzierte Masse)} \tag{II.336}$$

schreibt man obige Gleichung als

$$\mu \cdot \ddot{\underline{x}}'_{21} = F_{21} \cdot \frac{\underline{x}'_{21}}{|\underline{x}'_{21}|}. \tag{II.337}$$

Damit ist das Zweikörperproblem formal auf das Einkörperproblem zurückgeführt. Die Bewegung von m_1 und m_2 relativ zueinander ist offensichtlich einem Einkörperproblem äquivalent, bei dem

sich ein Massenpunkt mit der Masse μ im Zentralkraftfeld $\underline{F}_{21}$ bewegt.
Die verbleibende Dgl. für $\underline{x}'_{21}$ kann unter Ausnutzung des Drehimpuls- und Energieerhaltungssatzes gelöst werden.

Der Drehimpulserhaltungssatz liefert

$$\underline{L}' = m_1\,\underline{x}'_1 \times \underline{\dot{x}}'_1 + m_2\,\underline{x}'_2 \times \underline{\dot{x}}'_2 = const. \tag{II.338}$$

Es folgt wegen $\underline{x}'_1 \parallel \underline{x}'_2$

$$\underline{L}'\,\underline{x}'_1 = 0 \quad , \quad \underline{L}'\,\underline{x}'_2 = 0. \tag{II.339}$$

Die Massenpunkte bewegen sich also ständig in der zu $\underline{L}'$ senkrechten Ebene. Wir können $\underline{L}'$ auch umformen zu

$$\underline{L}' = \frac{m_1\,m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\,\underline{x}'_{21} \times \underline{\dot{x}}'_{21} + \frac{m_2\,m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\,\underline{x}'_{21} \times \underline{\dot{x}}'_{21} \tag{II.340}$$

$$\underline{L}' = \mu\,\underline{x}'_{21} \times \underline{\dot{x}}'_{21}, \tag{II.341}$$

was folgerichtig im äquivalenten Einkörperbild zu interpretieren ist.

Für die kinetische Energie T' gilt

$$T' = \frac{m_1}{2}\,\underline{\dot{x}}'^2_1 + \frac{m_2}{2}\,\underline{\dot{x}}'^2_2. \tag{II.342}$$

Ersetzung von $\underline{\dot{x}}'_1$ und $\underline{\dot{x}}'_2$ durch $\underline{\dot{x}}'_{21}$ liefert analog

$$T' = \frac{1}{2}\left[\frac{m_1\,m_2^2}{(m_1+m_2)^2} + \frac{m_2\,m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\right]\underline{\dot{x}}'^2_{21} \tag{II.343}$$

$$T' = \frac{\mu}{2}\,\underline{\dot{x}}'^2_{21}. \tag{II.344}$$

Nennen wir das Wechselwirkungspotential V' aus dem sich die Kraft $\underline{F}_{21}$ über

$$\underline{F}_{21} = -\partial_{\underline{x}'_{21}} V' \tag{II.345}$$

ableitet, so nimmt der Energieerhaltungssatz die Form

$$T' + V' = U' \tag{II.346}$$

an.

Als konkretes Beispiel für ein Zweikörperproblem betrachten wir das Kepler-Problem ohne jedoch eine (große) Masse als Zentralmasse zu fixieren. Beide Massen m_1 (Sonne) und m_2 (Planet) bewegen sich um ihren gemeinsamen Schwerpunkt. Es gilt die Gravitationskraft

$$\underline{F}_{21} = -\gamma\,\frac{m_2 \cdot m_1}{|\underline{x}'_2 - \underline{x}'_1|^2} \cdot \frac{\underline{x}'_2 - \underline{x}'_1}{|\underline{x}'_2 - \underline{x}'_1|} \tag{II.347}$$

$$\underline{F}_{21} = -\gamma\,\frac{m_1\,m_2}{|\underline{x}'_{21}|^2}\,\frac{\underline{x}'_{21}}{|\underline{x}'_{21}|} \tag{II.348}$$

und es folgt

$$\mu\,\underline{\ddot{x}}'_{21} = -\gamma\,\frac{m_1\,m_2}{|\underline{x}'_{21}|^2}\,\frac{\underline{x}'_{21}}{|\underline{x}'_{21}|} \tag{II.349}$$

bzw.

$$\mu\underline{\ddot{x}}'_{21} = -\gamma\,\mu\,\frac{m_1 + m_2}{|\underline{x}'_{21}|^2} \cdot \frac{\underline{x}'_{21}}{|\underline{x}'_{21}|}. \tag{II.350}$$

Vergleichen wir mit der Grundgleichung aus Abschnitt II.3.6, so ist die Sonnenmasse M durch die Summe $m_1 + m_2$ aus Sonnenmasse und Planet sowie m durch die reduzierte Masse μ ersetzt. Dies ist auch konsistent mit den Darstellungen

$$T' = \frac{\mu}{2}\,\underline{\dot{x}}_{21}^2, \tag{II.351}$$
$$\underline{L}' = \mu\,\underline{x}_{21} \times \underline{\dot{x}}_{21}. \tag{II.352}$$

Damit ist das Zweikörperproblem vollständig gelöst. Zu erledigen verbleibt die einfache Aufgabe der Rückübersetzung der reduzierten Größen in die ursprünglichen.

Wir fassen die wichtigsten Analogien und Aussagen zusammen:

- $m \to \mu \quad , \quad M \to m_1 + m_2$
- $\underline{x}'_{21}$ beschreibt Ellipse (m_2 um m_1 bzw. m_1 um m_2)
- $\underline{x}'_1 = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\,\underline{x}'_{21}$ beschreibt Ellipse (“kleine” Ellipse um Schwerpunkt bei $m_1 \gg m_2$)
- $\underline{x}'_2 = -\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\,\underline{x}'_{21}$ beschreibt Ellipse (“große” Ellipse um Schwerpunkt bei $m_1 \gg m_2$)
- Wegen $U = -\dfrac{\gamma\, m\, M}{a} \to -\dfrac{\gamma\,\mu\,(m_1 + m_2)}{a} = -\dfrac{\gamma\, m_1 \cdot m_2}{a}$ bleibt große Halbachse a der $\underline{x}'_{21}$-Ellipse unverändert
- 1. Keplersches Gesetz bleibt unverändert
- Wegen $\dot{S} = \dfrac{L}{2\,m} \to \dfrac{L'}{2\,\mu}$ gilt das 2. Keplersche Gesetz unverändert
- Wegen $\dfrac{\tau^2}{a^3} = \dfrac{4\,\pi^2}{\gamma\, M} \to \dfrac{4\pi^2}{\gamma\,(m_1 + m_2)} = \dfrac{4\,\pi^2}{\gamma\, m_1\,(1 + \frac{m_2}{m_1})}$ wird 3. Keplersches Gesetz um $O\left(\dfrac{m_2}{m_1}\right)$ modifiziert.

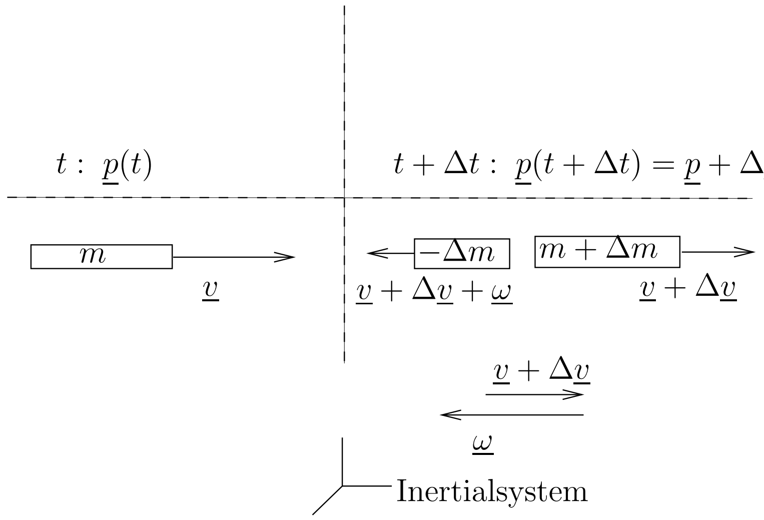
4.7.2 Raketengleichung

Eine Rakete ist ein Körper mit veränderlicher Masse. Die Raketenmasse wird durch den Ausstoß von Treibmittelmasse verändert. Raketenmasse plus ausgestoßene Masse sind als Massenpunktsystem auffaßbar. Außer der Massenerhaltung gelten keine Erhaltungssätze, denn es wirken i.a. äußere Kräfte und in der Rakete wird chemische Energie in Bewegungsenergie umgewandelt und die ist nicht mit einem mechanischen Potential verbunden.

Wesentliche Bilanzgleichung ist die Impulsbilanz

$$\underline{\dot{P}} = \underline{F}^{\text{ext}} \tag{II.353}$$

für den Gesamtimpuls $\underline{P} = m\,\underline{v}$. Wir betrachten den Impuls zu zwei Zeiten: t und $t + \Delta t$.



Δm ist negativ zu sehen. $\underline{w}$ ist die relative Austrittsgeschwindigkeit der ausströmenden Masse von der Rakete aus gesehen. Dann gilt bei $t + \Delta t$:

$$\begin{aligned}
\underline{P}(t+\Delta t) &= \underline{P} + \Delta \underline{P} = (m+\Delta m)\,(\underline{v}+\Delta\underline{v}) - \Delta m\,(\underline{v}+\Delta\underline{v}+\underline{w}) && \text{(II.354)}\\
&= m\,\underline{v} + m\,\Delta\underline{v} + \Delta m\,\underline{v} + \Delta m\,\Delta\underline{v} - \Delta m\,\underline{v} - \Delta m\,\Delta\,\underline{v} - \Delta m\,\underline{w} && \text{(II.355)}\\
&= m\,\underline{v} + m\,\Delta\underline{v} - \Delta m\,\underline{w} && \text{(II.356)}\\
\Delta\underline{P} &= m\,\Delta\underline{v} - \Delta m\,\underline{w} && \text{(II.357)}\\
\dot{\underline{P}} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \underline{P}}{\Delta t} = m\,\dot{\underline{v}} - \dot{m}\,\underline{w}. && \text{(II.358)}
\end{aligned}$$

Diese Relation setzen wir in die Impulsbilanz ein und erhalten die Raketengleichung

$$m\,\dot{\underline{v}} - \dot{m}\,\underline{w} = \underline{F}^{\text{ext}}. \tag{II.359}$$

Mit

$$m\,\dot{\underline{v}} = d_t(m\,\underline{v}) - \dot{m}\,\underline{v} \tag{II.360}$$

schreiben wir auch

$$d_t(m\,\underline{v}) = \underline{F}^{\text{ext}} + \dot{m}\,(\underline{v}+\underline{w}), \tag{II.361}$$

d.h. die Impulsänderung der Rakete wird verursacht durch die äußere Kraft $\underline{F}^{\text{ext}}$ und die Schubkraft $\dot{m}\,(\underline{v}+\underline{w})$.

Wir betrachten jetzt den senkrechten Aufstieg einer Rakete im homogenen Schwerefeld der Erde bei konstanter Ausströmgeschwindigkeit. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\underline{v} &= \dot{z}\,\underline{e}_z && \text{(II.362)}\\
\underline{w} &= -w\,\underline{e}_z \quad (w \geq 0) && \text{(II.363)}\\
\underline{F}^{\text{ext}} &= -g\,\underline{e}_z \quad (g = 9.81\text{m/s}^2) && \text{(II.364)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{z} &= -g - \frac{\dot{m}}{m}\,w && \text{(II.365)}\\
\dot{z} &= -g\,(t-t_0) - w\,\ln\frac{m(t)}{m(t_0)}. && \text{(II.366)}
\end{aligned}$$

Ist beim Brennschluß t_f der Treibstoff verbraucht, wird die Endgeschwindigkeit

$$v_f = -g\,(t_f - t_0) + w\,\ln\frac{m(t_0)}{m(t_f)} \quad \text{(Ziolkovski, 1898)} \tag{II.367}$$

erreicht. v_f ist groß, wenn in kurzer Zeit mit hoher Geschwindigkeit viel Masse ausgestoßen wird.

Abschätzung:

Wieviel Masse muß ausgestoßen werden, um in unendlich kurzer Zeit die erste kosmische Geschwindigkeit zu erreichen?

Typische Ausströmgeschwindigkeiten sind $w = 2\ldots3$ km/s bei chemischem Triebwerk:
$w = 2$ km/s: $7,9\cdot10^3 = 2\cdot10^3\,ln\frac{m(t_o)}{m(t_f)}$

$$\frac{m(t_0)}{m(t_f)} = \mathrm{e}^{7,9/2} \approx 52 \tag{II.368}$$

$$\hat{=}51/52 \text{ Treibstoff} \ \hat{=}\ 2\% \text{ Nutzlast} \tag{II.369}$$

$w = 3$ km/s:

$$\frac{m(t_0)}{m(t_f)} = \mathrm{e}^{7,9/3} \approx 14 \tag{II.370}$$

$$\hat{=}13/14 \text{ Treibstoff} \ \hat{=}\ 7\% \text{ Nutzlast} \tag{II.371}$$

Ionenwerk: $w = 100$ km/s:

$$\frac{m(t_0)}{m(t_f)} = \mathrm{e}^{7,9/100} \approx 1,08. \tag{II.372}$$

Kapitel III

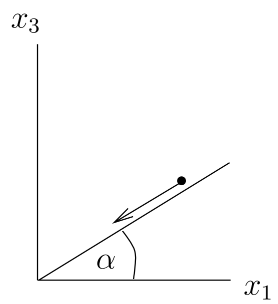
Lagrangesche Mechanik

1 d'Alembertsches Prinzip

1.1 Freie und gebundene Systeme

Bisher haben wir Systeme freier Massenpunkte untersucht. Jeder Massenpunkt unterlag dabei äußeren und inneren Kräften, die jeweils im einzelnen angegeben wurden wie Gravitationskräfte, Federkräfte, Reibungskräfte etc. Zusätzliche Nebenbedingungen traten i.a. nicht auf.

Wir wenden uns jetzt Systemen zu, wo die Bewegungsfreiheit eingeschränkt ist. Betrachten wir beispielsweise einen Körper (Massenpunkt), der unter dem Einfluß der Schwerkraft auf einer schiefen Ebene reibungsfrei hinabgleitet.



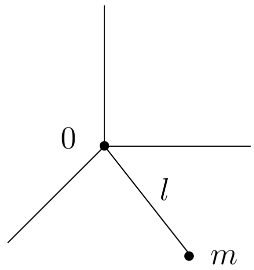
Er unterliegt der Gravitationskraft und Kräften, die die schiefe Ebene auf ihn ausübt, so daß er nicht eindringen oder hindurchfallen kann. Im Detail sind diese Kräfte komplizierte atomare Kräfte, die nicht leicht angegeben werden können und im einzelnen auch nicht interessieren. Wir bezeichnen diese Kraft als *Zwangskraft*, die den Massenpunkt zwingt, sich ausschließlich auf der schiefen Ebene zu bewegen. Der Massenpunkt kann sich damit nicht mehr frei bewegen, sondern nur eingeschränkt oder gebunden an eine Nebenbedingung. Für die schiefe Ebene ist diese Nebenbedingung offensichtlich

$$\tan\alpha = x_3 \,/\, x_1. \tag{III.1}$$

Der Massenpunkt kann nur solche Koordinaten $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ annehmen, die obige Bedingung erfüllen. $x_1(t)$ und $x_3(t)$ sind von vornherein miteinander verbunden.

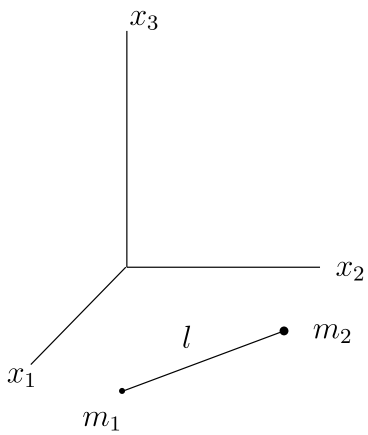
Weitere Beispiele:

1. Kugelpendel



NB: $x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + x_3(t)^2 = l^2$.

2. Hantel auf horinzontaler Ebene ($x_1 - x_2$-Ebene)



m_1 und m_2 sind mit einer massenloser Stange verbunden.

1. NB: $x_{31} = 0$
2. NB: $x_{32} = 0$
3. NB: $(x_{11} - x_{12})^2 + (x_{21} - x_{22})^2 = l^2$.

1.2 Nebenbedingungen

Die Nebenbedingungen, die die freie Bewegung eines Massenpunktes einschränken, können recht unterschiedlich sein. Sie lassen sich nach verschiedenen Gesichtspunkten klassifizieren.

1.2.1 Äußere und innere Bindungen

Äußere Bindungen: Bindungen an feste Flächen oder Kurven im Raum.
Innere Bindungen: Bindungen, die die gegenseitigen Lagen von Massenpunkten einschränken.

1.2.2 Holonome und anholonome Nebenbedingungen

Holonome Nebenbedingungen lassen sich in der Form von Gleichungen der Art

$$g_k(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_N, t) \equiv g_k(\underline{x}_\mu, t) = 0 \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, r \tag{III.2}$$

formulieren. Die Gesamtzahl r der unabhängigen Nebenbedingungen kann sinnvollerweise die Zahl der Bewegungsgleichungen $3N$ nicht übersteigen. Die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems ist dann $3N - r$.

Durch Differentiation $\left(\frac{d}{dt}\right)$ gelangt man zur differentiellen Formulierung der holonomen Nebenbedingungen

$$\sum_{\nu=1}^{N} \partial_{\underline{x}_\nu} g_k \cdot \dot{\underline{x}}_\nu + \partial_t g_k = 0 \quad , \quad k = 1, \ldots, r \tag{III.3}$$

bzw.

$$\sum_{\nu=1}^{N} \partial_{\underline{x}_\nu} g_k \cdot d\underline{x}_\nu + \partial_t g_k \cdot dt = 0 \quad , \quad k = 1, \ldots, r. \tag{III.4}$$

Damit ist die linke Seite der Gleichung ein vollständiges Differential dg_k.

Anholonome Nebenbedingungen lassen sich nur in Form von Differentialgleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{N} \underline{a}_{k\nu}(\underline{x}_\mu, t) \cdot \dot{\underline{x}}_\nu + a_{k0}(\underline{x}_\mu, t) = 0 \quad , \quad k = 1, \ldots, r \tag{III.5}$$

bzw.

$$\sum_{\nu=1}^{N} \underline{a}_{k\nu} \cdot d\underline{x}_\nu + a_{k0} \cdot dt = 0 \quad , \quad k = 1, \ldots, r \tag{III.6}$$

formulieren. Es existieren keine Funktionen g_k, so daß

$$\underline{a}_{k\nu} = \partial_{\underline{x}_\nu} g_k \tag{III.7}$$

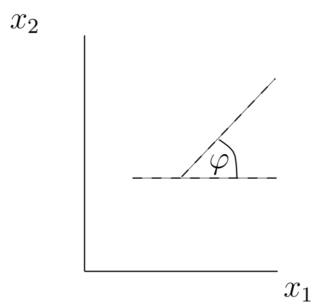
geschrieben werden kann; d.h. es gibt kein vollständiges Differential.

Ein Beispiel für eine anholonome Nebenbedingung ist die Bedingung für die Bewegung eines Schlittschuhes auf einer horizontalen Eisfläche. Als vereinfachtes Modell eines Schlittschuhs nehmen wir eine (kurze) Gerade, die wir als Massenpunkt mit einem inneren Freiheitsgrad (Einstellwinkel φ der Schneide) ansehen können. Die Bewegung des Schlittschuhs ist nur in Richtung der Schneide möglich, nicht aber senkrecht zu ihr, d.h.

$$\tan\varphi = \frac{dx_2}{dx_1} \tag{III.8}$$

bzw.

$$dx_2 - \tan\varphi \cdot dx_1 = 0. \tag{III.9}$$



Die Bedingung ist anholonom. Andernfalls wäre sie äquivalent zu einer Bedingung der Form

$$g(x_1, x_2, \varphi) = 0 \tag{III.10}$$

bzw.

$$dg = \partial_{x_1} g \cdot dx_1 + \partial_{x_2} g \cdot dx_2 + \partial_\varphi g \cdot d\varphi = 0. \tag{III.11}$$

Der Term proportional zu $d\varphi$ verschwindet aber, so daß sich die Äquivalenz nicht herstellen läßt. Es kann keinen integrierenden Faktor geben.

1.2.3 Skleronome und rheonome Nebenbedingungen

Nebenbedingungen heißen skleronom, wenn sie nicht explizit von der Zeit abhängen, also

$$\partial_t g_k = 0 \tag{III.12}$$

oder

$$\partial_t \underline{a}_{k\nu} = 0 \quad , \quad \partial_t a_{k0} = 0. \tag{III.13}$$

Wenn mehrere Nebenbedingungen auftreten ($r > 1$), können ihre Typen vermischt sein.

1.3 Zwangskräfte

Entsprechend dem zweiten Newtonschen Prinzip genügen die Massenpunkte eines Massenpunktsystems den Gleichungen

$$m_\nu \, \underline{\ddot{x}}_\nu = \underline{F}_\nu \quad , \quad \nu = 1, 2, \ldots, N. \tag{III.14}$$

Für gebundene Systeme setzen sich die Kräfte aus eingeprägten Kräften und Zwangskräften zusammen. Eingeprägte Kräfte sind solche Kräfte, die in einem Inertialsystem auch im Falle des freien Massenpunktsystems wirksam sind. Die Zwangskräfte sind diejenigen Kräfte, die Bewegungsfreiheit der Massenpunkte durch die Nebenbedingungen einschränken. In der Bewegungsgleichung soll dies durch $\underline{F}_\nu + \underline{Z}_\nu$ anstelle von $\underline{F}_\nu$ zum Ausdruck gebracht werden:

$$m_\nu \, \underline{\ddot{x}}_\nu = \underline{F}_\nu + \underline{Z}_\nu, \tag{III.15}$$

wobei

$$\begin{aligned} \underline{F}_\nu \quad &: \quad \text{eingeprägte Kräfte} \\ \underline{Z}_\nu \quad &: \quad \text{Zwangskräfte.} \end{aligned}$$

Zu diesen $3N$ Bewegungsgleichungen kommen r Nebenbedingungen hinzu. Im weiteren wollen wir bevorzugt holonome Nebenbedingungen betrachten, die sich differentiell als

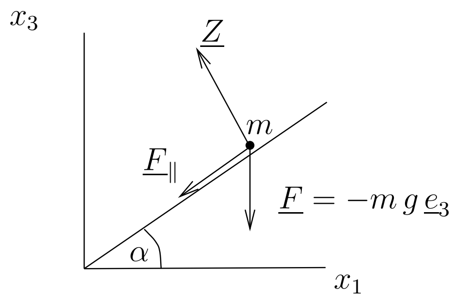
$$\sum_{\nu=1}^{N} \partial_{\underline{x}_\nu} g_k \cdot d\underline{x}_\nu + \partial_t g_k \, dt = 0 \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, r \tag{III.16}$$

schreiben.

Um die Lösung der Bewegungsgleichungen zu finden, die den Nebenbedingungen genügen, muß ein Zusammenhang zwischen den bisher noch unbekannten Zwangskräften $\underline{Z}_\nu$ und den Nebenbedingungen hergestellt werden mit dem Ziel, die Zwangskräfte in geeigneter Weise durch die

Nebenbedingungen auszudrücken.

Eine Eigenschaft der Zwangskräfte $\underline{Z}_\nu$ ist sofort klar. Bei der Bewegung von Massenpunkten entlang vorgegebener Raumkurven oder in vorgegebenen Flächen stehen die Zwangskräfte immer senkrecht auf diesen. Betrachten wir dazu exemplarisch den wieder auf einer schiefen Ebene reibungsfrei abgleitenden Massenpunkt.



Die Hangabtriebskraft $\underline{F}_\|$ wird nur durch die entsprechende Komponente der Schwerkraft $\underline{F} = -m\,g\,\underline{e}_3$ gebildet. Ihr Betrag ist $F_\| = -m\,g\,\sin\alpha$. Würde die Zwangskraft nicht senkrecht auf der schiefen Ebene stehen, würde sie eine Zwangskraftkomonente parallel zur schiefen Ebene enthalten, die den Massenpunkt zusätzlich zu $\underline{F}_\|$ beschleunigt oder bremst. Das ist jedoch nicht sinnvoll.

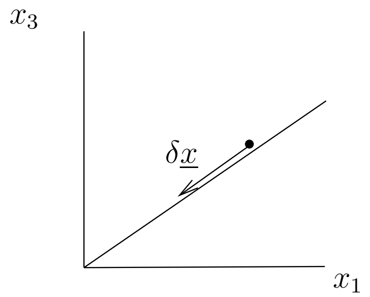
Zwangskräfte anderer Art, wie etwa ein fester Abstand zwischen Massenpunkten sind schwieriger zu behandeln. Dieser und damit der vollständige Zusammenhang der Zwangskräfte mit den Nebenbedingungen wird durch das d'Alembertsche Prinzip hergestellt. Dazu ist es notwendig, den Begriff der virtuellen Verrückung einzuführen.

1.4 Virtuelle Verrückungen

$\delta\underline{x}_\nu$ heißt virtuelle Verrückung des Massenpunktes ν, wenn gilt:

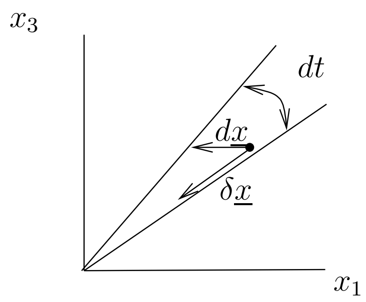
1. $\delta\underline{x}_\nu$ ist eine infinitesimale Auslenkung,
2. $\delta\underline{x}_\nu$ ist mit den Nebenbedingungen verträglich, d.h. der Massenpunkt ν befolgt bei der virtuellen Verrückung die Nebenbedingungen,
3. $\delta\underline{x}_\nu$ geschieht momentan, d.h. $\delta t = 0$.

Für den Massenpunkt auf der schiefen Ebene stellt sich eine virtuelle Verrückung dann so dar:



Diese virtuelle Verrückung $\delta\underline{x}$ läßt sich von einer realen Verrückung $d\underline{x}$ nur durch den zeitlichen Ablauf unterscheiden, der für $\delta\underline{x}$ instantan und für $d\underline{x}$ endlich ist.

Ein anderes Bild ergibt sich für eine rheonome schiefe Ebene, bei der sich der Neigungswinkel mit der Zeit ändert, $\alpha(t)$:



Die Verträglichkeit der virtuellen Verrückungen mit den Nebenbedingunen fordert, daß für

$$g_k(\underline{x}_\mu, t) = 0 \tag{III.17}$$

auch

$$g_k(\underline{x}_\mu + \delta\underline{x}_\mu, t) = 0 \tag{III.18}$$

gilt. Dann folgt durch Reihenentwicklung

$$g_k(\underline{x}_\mu + \delta\underline{x}_\mu, t) = g_k(\underline{x}_\mu, t) + \sum_{\nu=1}^{N} \partial_{\underline{x}_\nu} g_k(\underline{x}_\mu, t)\, \delta\underline{x}_\nu \tag{III.19}$$

und somit

$$\sum_{\nu=1}^{N} \partial_{\underline{x}_\nu} g_k \cdot \delta\underline{x}_\nu = 0. \tag{III.20}$$

1.5 Grundgleichung des d'Alembertschen Prinzips

Die Dynamik von Massenpunktsystemen unter dem Einfluß von Nebenbedingungen kann allgemein durch das d'Alembertsche Prinzip formuliert werden:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \underline{Z}_\nu \cdot \delta\underline{x}_\nu = 0, \tag{III.21}$$

d.h. Zwangskräfte leisten bei virtuellen Verrückungen keine Arbeit am Gesamtsystem.

Das d'Alembertsche Prinzip ist eine Erfahrungstatsache; es kann nicht abgeleitet werden. Es hat den Status eines Axioms.

Bemerkung:

Für Bewegungen von Massenpunktsystemen entlang vorgegebener Raumkurven oder in vorgegebenen Flächen ist das d'Alembertsche Prinzip sofort klar, da die Zwangskräfte senkrecht auf den Kurven und Flächen und damit auch auf den virtuellen Verrückungen stehen. Bei inneren

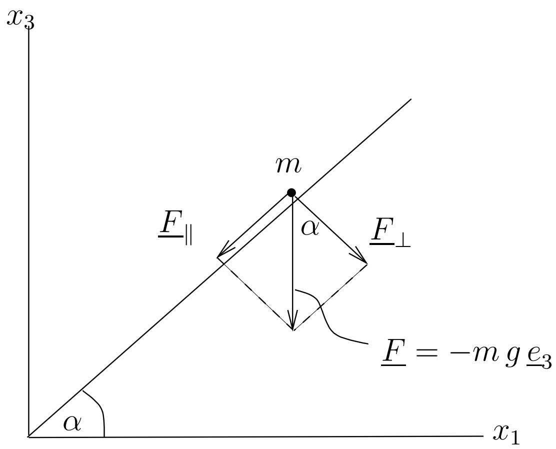
Nebenbedingungen liegt eine einfache Interpretation nicht auf der Hand; das Prinzip ist jedoch erfolgreich.

Ersetzen der Zwangskräfte liefert eine andere Darstellung des d'Alembertschen Prinzips:

$$\sum_{\nu=1}^{N}(m_\nu \, \underline{\ddot{x}}_\nu - \underline{F}_\nu) \cdot \delta \underline{x}_\nu = 0. \tag{III.22}$$

1.6 Spezielle Probleme

1.6.1 Massenpunkt auf schiefer Ebene



Nebenbedingung:

$$g(\underline{x}) = x_3 - x_1 \cdot \tan\alpha = 0 \tag{III.23}$$

Virtuelle Verrückungen:

$$\partial_{\underline{x}} g \cdot \delta \underline{x} = \delta x_3 - \delta x_1 \cdot \tan\alpha = 0. \tag{III.24}$$

d'Alembertsches Prinzip:

$$\ddot{x}_1 \, \delta x_1 + \ddot{x}_2 \, \delta x_2 + (\ddot{x}_3 + g) \, \delta x_3 = 0 \tag{III.25}$$

$$\delta x_3 \to \delta x_1$$

$$[\ddot{x}_1 + (\ddot{x}_3 + g) \, \tan\alpha] \, \delta x_1 + \ddot{x}_2 \, \delta x_2 = 0 \tag{III.26}$$

Damit sind die Nebenbedingungen vollständig eingearbeitet und die verbleibenden virtuellen Verrückungen δx_1 und δx_2 sind völlig frei:

$$\ddot{x}_1 + (\ddot{x}_3 + g) \, \tan\alpha = 0 \tag{III.27}$$

$$\dot{x}_2 = 0 \tag{III.28}$$

Lösung:

1. $x_2 = v_{20}(t - t_0) + x_{20}$

2. $\ddot{x}_3 = \ddot{x}_1 \tan\alpha$ benutzen, um $\ddot{x}_3$ zu eliminieren

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_1 \tan^2\alpha + g \tan\alpha = 0 \tag{III.29}$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha} \tag{III.30}$$

$$\ddot{x}_1 = -g \sin\alpha \cos\alpha \tag{III.31}$$

$$x_1 = -\frac{g}{2} \sin\alpha \cos\alpha \, (t - t_0)^2 + v_{10} \, (t - t_0) + x_{10} \tag{III.32}$$

$$x_3 = x_1 \cdot \tan\alpha \tag{III.33}$$

Zwangskraft:

$$\underline{Z} = m \, \underline{\ddot{x}} - \underline{F} = m \, \underline{\ddot{x}} + m \, g \, \underline{e}_3 \tag{III.34}$$

$$Z_1 = -m \, g \sin\alpha \cos\alpha \tag{III.35}$$

$$Z_2 = 0 \tag{III.36}$$

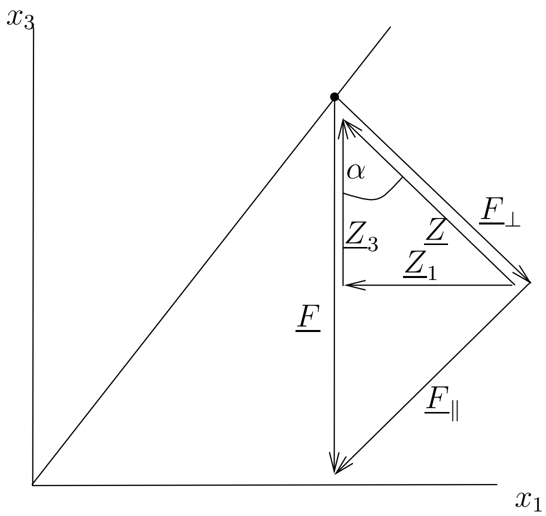
$$Z_3 = m \, \ddot{x}_3 + m \, g = m \, \ddot{x}_1 \tan\alpha + m \, g \tag{III.37}$$

$$Z_3 = -m \, g \sin^2\alpha + m \, g = m \, g \cos^2\alpha \tag{III.38}$$

bzw.

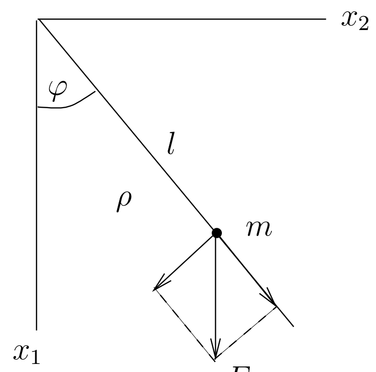
$$Z_1 = -F_\perp \sin\alpha \tag{III.39}$$

$$Z_3 = F_\perp \cos\alpha \tag{III.40}$$



$$\underline{Z} = -\underline{F}_\perp \tag{III.41}$$

1.6.2 Kreispendel



$$\underline{F} = m\,g\,\underline{e}_3 = m\ \cos\varphi\,\underline{e}_\rho - m\,g\ \sin\varphi\,\underline{e}_\varphi$$

Nebenbedingungen:

$$z = 0 \quad , \quad \rho = l \tag{III.42}$$

bzw.

$$\delta z = 0 \quad , \quad \delta\rho = 0 \tag{III.43}$$

$$\rightsquigarrow \quad \delta\underline{x} = \delta\rho\,\underline{e}_\rho + \rho\,\delta\varphi\,\underline{e}_\varphi + \delta z\,\underline{e}_z = \rho\,\delta\varphi\,\underline{e}_\varphi \tag{III.44}$$

d'Alembertsches Prinzip:

$$(m\,\underline{\ddot{x}} - \underline{F})\,\delta\underline{x} = 0 \tag{III.45}$$
$$(m\,\underline{\ddot{x}} - \underline{F})\,\rho\,\delta\varphi\,\underline{e}_\varphi = 0 \tag{III.46}$$
$$\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_\varphi = -\sin\varphi \tag{III.47}$$
$$[m\,(\rho\,\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\,\dot{\varphi}) + m\,g\ \sin\varphi]\,\rho\,\delta\varphi = 0 \tag{III.48}$$
$$\rightsquigarrow \quad \rho\,\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\,\dot{\varphi} + g\ \sin\varphi = 0 \tag{III.49}$$
$$\rho = l \quad , \quad \dot{\rho} = 0 \tag{III.50}$$
$$\rightsquigarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\ \sin\varphi = 0 \tag{III.51}$$
$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\ \sin\varphi = 0 \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{III.52}$$

Lösung für kleine Elongationen: $\sin\varphi \approx \varphi$

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\,\varphi = 0 \quad \text{(Harmonischer Oszillator)} \tag{III.53}$$

Lösung für beliebige Elongationen:

Ausnutzung der 1. Integrale und Separation entsprechend Abschnitt (II.3.5)
$\rightsquigarrow$ Elliptische Integrale

Zwangskraft:

$$\underline{e}_\rho \quad : \quad m\,(\ddot{\varphi} - \rho\,\dot{\varphi}^2) - F_\rho = -m\,l\,\dot{\varphi}^2 - m\,g\ \cos\varphi \tag{III.54}$$
$$\underline{e}_\varphi \quad : \quad m\,(\rho\,\ddot{\varphi} + \dot{\rho}\,\dot{\varphi}) - F_\varphi = m\,l\,\ddot{\varphi} + m\,g\sin\varphi = 0 \quad \text{(s.o.)} \tag{III.55}$$
$$\underline{e}_z \quad : \quad m\,\ddot{z} - F_z = 0 - 0 = 0 \tag{III.56}$$

Die Zwangskraft besitzt nur eine $\underline{e}_\rho$-Komponente:

$$\underline{Z} = -m\,l\,(\dot{\varphi}^2 + \omega_0^2\,\cos\varphi)\,\underline{e}_\rho. \tag{III.57}$$

Speziell für den Umkehrpunkt einer Pendelbewegung gilt $\dot{\varphi} = 0$ und dann der spezielle Wert der Zwangskraft

$$\underline{Z}(\dot{\varphi} = 0) = -m\,g\,\cos\varphi \cdot \underline{e}_\rho = -F_\rho \cdot \underline{e}_\rho. \tag{III.58}$$

2 Lagrangesche Gleichungen

Das d'Alembertsche Prinzip liefert die Bewegungsgleichungen nicht explizit. Zunächst sind abhängige von unabhängigen virtuellen Verrückungen zu unterscheiden. Die r Nebenbedingungen machen r virtuelle Verrückungen abhängig von den verbleibenden $3N - r$ unabhängigen (freien) virtuellen Verrückungen. Nach Elimination der r abhängigen virtuellen Verrückungen können die Bewegungsgleichungen aus den "Koeffizienten" der unabhängigen virtuellen Verrückungen abgelesen werden.

Andere Sprechweise: Die unabhängigen virtuellen Verrückungen bilden einen Satz aus $3N - r$ linear unabhängigen Basisvektoren. Die Bewegungsgleichungen folgen aus dem Koeffizientenvergleich.

Die Auswertung des d'Alembertschen Prinzips kann aber auch durchgehend formalisiert werden, so daß explizite Bewegungsgleichungen in allgemeiner Form angegeben werden können. Dies führt auf die Lagrangeschen Gleichungen.

2.1 Lagrangesche Gleichungen 1. Art (auch Lagrange I oder L I)

Ausgangspunkt ist das d'Alembertsche Prinzip

$$\sum_{\nu=1}^{N} (m_\nu\,\ddot{\underline{x}}_\nu - \underline{F}_\nu)\,\delta\underline{x}_\nu = 0. \tag{III.59}$$

O.B.d.A. betrachten wir holonome Nebenbedingungen

$$g_k(\underline{x}_\mu, t) = 0 \quad , \quad k = 1, \ldots, r. \tag{III.60}$$

Damit verträgliche virtuelle Verrückungen $\delta\underline{x}_\nu$ müssen bekanntlich die Beziehungen

$$\sum_{\nu=1}^{N} \partial_{\underline{x}_\nu}\, g_k \cdot \delta\underline{x}_\nu = 0 \quad , \quad k = 1, \ldots, r \tag{III.61}$$

befolgen. Diese Gleichungen werden je mit dem s.g. Lagrangeschen Multiplikator λ_k multipliziert, über alle k aufsummiert und von der Grundgleichung des d'Alembertschen Prinzips subtrahiert. Es folgt

$$\sum_{\nu=1}^{N} \{m_\nu\,\ddot{\underline{x}}_\nu - \underline{F}_\nu - \sum_{k=1}^{r} \lambda_k\,\partial_{\underline{x}_\nu} g_k\}\,\delta\underline{x}_\nu = 0. \tag{III.62}$$

Von den $3N$ virtuellen Verrückungen $\delta\underline{x}_\nu$ sind nach den obigen Überlegungen $3N - r$ linear unabhängig und damit frei wählbar, und r virtuelle Verrückungen sind linear abhängig und damit nicht frei wählbar.

Betrachten wir zunächst die r abhängigen virtuellen Verrückungen. Die λ_k werden gerade so gewählt, daß die entsprechenden Vorfaktoren $\{\quad\}$ verschwinden. Dann verbleibt eine Summe, die nur noch unabhängige virtuelle Verrückungen enthält. Somit müssen die diesen virtuellen Verrückungen entsprechenden Vorfaktoren $\{\quad\}$ ebenfalls verschwinden. Zusammengefaßt folgen die Lagrangeschen Gleichungen 1. Art

$$m_\nu\,\ddot{\underline{x}}_\nu = \underline{F}_\nu + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k\,\partial_{\underline{x}_\nu} g_k \quad , \quad \nu = 1, \ldots, N \quad (\text{L I}). \tag{III.63}$$

Unter Hinzunahme der Nebenbedingungen

$$g_k(\underline{x}_\mu, t) = 0 \quad , \quad k = 1, \ldots, r \qquad (NB) \tag{III.64}$$

liegt ein Gleichungssystem aus $3N+r$ Gleichungen für die Koordinaten $\underline{x}_\nu$ der Massenpunkte ($3N$ Unbekannte) und die Lagrangeschen Multiplikatoren λ_k (r Unbekannte) vor. Es ist abzulesen, daß sich die Zwangskräfte aus den Nebenbedingungen und Lagrangeschen Multiplikatoren über

$$\underline{Z}_\nu = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k\,\partial_{\underline{x}_\nu} g_k \tag{III.65}$$

berechnen.

<u>Bemerkung</u>:

Der Preis, der für die allgemeine Auswertung des d'Alembertschen Prinzips zu zahlen ist, besteht offensichtlich in der zusätzlichen Bestimmung von Lagrangeschen Multiplikatoren, d.h. es sind $3N + r$ statt $3N$ Gleichungen zu lösen.

Die Lösung von L I einschließlich der NB ist nach folgender Strategie möglich:

1. Zweimalige totale zeitliche Differentiation der NB liefert

$$\sum_{\nu=1}^{N} \partial_{\underline{x}_\nu} g_k \cdot \dot{\underline{x}}_\nu \quad + \quad \partial_t g_k = 0 \tag{III.66}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \partial_{\underline{x}_\nu} g_k \cdot \ddot{\underline{x}}_\nu \quad + \quad \sum_{\nu,\mu=1}^{N} \partial_{\underline{x}_\mu}\,\partial_{\underline{x}_\nu} g_k\,\dot{\underline{x}}_\mu\,\dot{\underline{x}}_\nu + 2\sum_{\nu=1}^{N} \partial_t\,\partial_{\underline{x}_\nu} g_k \cdot \dot{\underline{x}}_\nu + \partial_t^2 g_k = 0 \tag{III.67}$$

2. $\ddot{\underline{x}}_\nu$ ist vermöge L I zu ersetzen. Es folgt

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{m_\nu}\,\partial_{\underline{x}_\nu} g_k\,(\underline{F}_\nu + \sum_{l=1}^{r} \lambda_l\,\partial_{\underline{x}_\nu} g_l) \quad &+ \quad \sum_{\nu,\mu=1}^{N} \partial_{\underline{x}_\mu}\,\partial_{\underline{x}_\nu} g_k\,\dot{\underline{x}}_\mu\,\dot{\underline{x}}_\nu + \\ &+ \quad 2\sum_{\nu=1}^{N} \partial_t\,\partial_{\underline{x}_\nu} g_k \cdot \dot{\underline{x}}_\nu + \partial_t^2 g_k = 0\end{aligned} \tag{III.68}$$

   Es handelt sich um ein lineares Gleichungssystem aus $k = 1, \ldots, r$ Gleichungen für die r Lagrangeschen Multiplikatoren λ_k. Die Lösung ergibt, wie leicht zu sehen, die funktionalen Abhängigkeiten

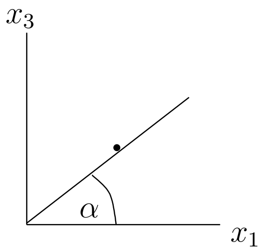
$$\lambda_k = \lambda_k(\underline{x}_\mu, \dot{\underline{x}}_\mu, t). \tag{III.69}$$

3. In den Zwangskräften $\underline{Z}_\nu$ sind nun die Lagrangeschen Multiplikatoren eliminiert. Es gilt

$$\underline{Z}_\nu = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k(\underline{x}_\mu, \underline{\dot{x}}_\mu, t) \cdot \partial_{\underline{x}_\nu} g_k. \tag{III.70}$$

4. Die Zwangskräfte $\underline{Z}_\nu$ werden in L I eingesetzt und es verbleiben $3N$ Gleichungen, die dann Bewegungsgleichungen im üblichen Sinn der Newtonschen Mechanik darstellen. Ihre Lösung liefert $\underline{x}_\nu(t)$.

Zur Verdeutlichung wenden wir diese Strategie für den reibungsfreien Massenpunkt auf der skleronomen schiefen Ebene an.



Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{NB:} \quad g(\underline{x}) &= x_3 - x_1 \tan\alpha = 0 && \text{(III.71)} \\ \text{L I:} \quad m\,\underline{\ddot{x}} &= \underline{F} + \lambda\,\partial_{\underline{x}} g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m\,g \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\tan\alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} && \text{(III.72)} \end{aligned}$$

1.

$$\ddot{x}_3 - \ddot{x}_1 \tan\alpha = 0 \tag{III.73}$$

2.

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\frac{\lambda}{m} \tan\alpha && \text{(III.74)} \\ \ddot{x}_3 &= -g + \frac{\lambda}{m} && \text{(III.75)} \\ -g &+ \frac{\lambda}{m} + \frac{\lambda}{m} \tan^2\alpha = 0 && \text{(III.76)} \\ \lambda &= \frac{m\,g}{1 + \tan^2\alpha} = m\,g\,\cos^2\alpha && \text{(III.77)} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \lambda \cdot \partial_{\underline{x}} g = m\,g\,\cos^2\alpha \begin{pmatrix} -\tan\alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} && \text{(III.78)} \\ \underline{Z} &= m\,g \begin{pmatrix} -\cos\alpha\,\sin\alpha \\ 0 \\ \cos^2\alpha \end{pmatrix} && \text{(III.79)} \end{aligned}$$

4.

$$m\ddot{x}_1 = -m\,g\,\sin\alpha\,\cos\alpha \tag{III.80}$$
$$m\ddot{x}_2 = 0 \tag{III.81}$$
$$m\ddot{x}_3 = -m\,g + m\,g\,\cos^2\alpha \tag{III.82}$$

$$x_1 = -\frac{g}{2}\sin\alpha\,\cos\alpha\,(t-t_0)^2 + v_{10}\,(t-t_0) + x_{10} \tag{III.83}$$
$$x_2 = v_{20}\,(t-t_0) + x_{20} \tag{III.84}$$
$$x_3 = x_1\,\tan\alpha \tag{III.85}$$

Bemerkung:

L I sind auch für anholonome NB formulierbar. Folgende Ersetzungen sind vorzunehmen:

$$\partial_{\underline{x}_\nu} g_k \to \underline{a}_{k\nu}, \tag{III.86}$$
$$\partial_t g_k \to a_{k0}. \tag{III.87}$$

2.2 Generalisierte Koordinaten

Die Auswertung des d'Alembertschen Prinzips vermittels L I dehnt die ursprüngliche Anzahl von Bewegungsgleichungen ($3N$) auf $3N + r$ aus, wobei die Anzahl der tatsächlichen Freiheitsgrade des Systems $f = 3N - r$ beträgt. Wenn N groß ist und r an $3N$ heranreicht - also f klein ist - kann das Verfahren recht aufwendig sein.

Wir suchen nun nach einem Lösungsverfahren, bei dem die Nebenbedingungen einmal eliminiert werden und im Ergebnis f Bewegungsgleichungen für exakt f Variable entstehen, d.h. Bewegungsgleichungen, die nach Art und Anzahl genau den Freiheitsgraden des Systems entsprechen. Ein solches Verfahren ist für holonome Nebenbedingungen möglich, und es führt auf die Lagrangeschen Gleichungen 2. Art.

Wir betrachten ein System aus N Massenpunkten, das durch r holonome Nebenbedingungen

$$g_k(\underline{x}_\mu, t) = 0 \quad , \quad k = 1, \ldots, r \tag{III.88}$$

eingeschränkt ist. Wir fassen diese Nebenbedingungen als Bestimmungsgleichungen für die $\underline{x}_\mu$ auf. Da es sich um $3N$ Koordinaten bei nur r Gleichungen handelt, hängen die Lösungen von $3N - r = f$ freien Parametern $q_\alpha (\alpha = 1, \ldots, f)$ ab, also

$$\underline{x}_\mu = \underline{x}_\mu(q_1, \ldots, q_f, t) = \underline{x}_\mu(q_\alpha, t) \quad , \quad \mu = 1, \ldots N. \tag{III.89}$$

Die q_α können natürlich auch ein Teil der Koordinaten selbst sein bzw. Kombinationen von diesen. Man bezeichnet

q_α als generalisierte Koordinaten und
$\dot{q}_\alpha$ als generalisierte Geschwindigkeiten.

Die generalisierten Koordinaten unterliegen nach obigen Überlegungen keinerlei Nebenbedingungen.

Für bevorstehende Umformungen stellen wir einige Beziehungen bereit. Es gilt

$$\dot{\underline{x}}_\mu = \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial \underline{x}_\mu}{\partial q_\alpha} \cdot \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \underline{x}_\mu}{\partial t} \tag{III.90}$$

und somit

$$\frac{\partial \dot{\underline{x}}_\mu}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \underline{x}_\mu}{\partial q_\alpha}, \tag{III.91}$$

da $\underline{x}_\mu$ und $\frac{\underline{x}_\mu}{\partial q_\alpha}$ nicht von den generalisierten Geschwindigkeiten abhängt.

Ohne sie so zu benennen, haben wir schon mehrfach generalisierte Koordinaten verwendet.

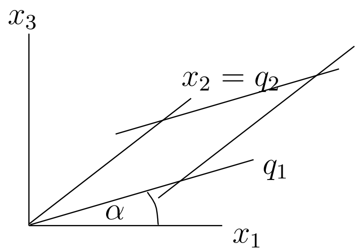
Beispiele für generalisierte Koordinaten:

1. Kreispendel ($f = 1$):

$$\begin{aligned} q &= \varphi && \text{(III.92)} \\ \text{oder } q &= l\,\varphi\,(= s). && \text{(III.93)} \end{aligned}$$

2. Schiefe Ebene ($f = 2$)

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(x_1, x_3) = \frac{x_1}{\cos\alpha} = \frac{x_3}{\sin\alpha}\,(\equiv s) && \text{(III.94)} \\ q_2 &= x_2. && \text{(III.95)} \end{aligned}$$



2.3 Lagrangesche Gleichungen 2. Art (auch Lagrange II oder L II)

Wir verwenden

$$\underline{x}_\nu = \underline{x}_\nu(q_\alpha, t) \tag{III.96}$$

und drücken die virtuellen Verrückungen $\delta\underline{x}_\mu$ durch virtuelle Verrückungen δq_α aus, also

$$\delta\underline{x}_\nu = \sum_{\alpha=1}^{f} \partial_{q_\alpha}\underline{x}_\nu \cdot \delta q_\alpha. \tag{III.97}$$

Einsetzen in das d'Alembertsche Prinzip liefert

$$\sum_{\nu=1}^{N}(m_\nu\,\ddot{\underline{x}}_\nu - \underline{F}_\nu)\,\sum_{\alpha=1}^{f}\partial_{q_\alpha}\underline{x}_\nu\,\delta q_\alpha = 0 \tag{III.98}$$

bzw.

$$\sum_{\alpha=1}^{f}[\sum_{\nu=1}^{N}(m_\nu\,\ddot{\underline{x}}\nu - \underline{F}_\nu)\,\partial_{q_\alpha}\underline{x}_\nu]\,\delta q_\alpha = 0. \tag{III.99}$$

Da die f virtuellen Verrückungen δq_α linear unabhängig sind, folgen die f Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{N} (m_\nu \, \ddot{\underline{x}}_\nu - \underline{F}_\nu) \, \partial_{q_\alpha} \underline{x}_\nu = 0 \quad , \quad \alpha = 1, \ldots, f. \tag{III.100}$$

Umschreiben des ersten Terms liefert

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \, \ddot{\underline{x}}_\nu \, \partial_{q_\alpha} \underline{x}_\nu &= d_t(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \, \dot{\underline{x}}_\nu \, \partial_{q_\alpha} \underline{x}_\nu) - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \, \dot{\underline{x}}_\nu \, \partial_{q_\alpha} \dot{\underline{x}}_\nu && \text{(III.101)} \\
&= d_t(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \, \dot{\underline{x}}_\nu \, \partial_{\dot{q}_\alpha} \dot{\underline{x}}_\nu) - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \, \dot{\underline{x}}_\nu \, \partial_{q_\alpha} \dot{\underline{x}}_\nu && \text{(III.102)} \\
&= d_t \, \partial_{\dot{q}_\alpha} (\sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu}{2} \, \dot{\underline{x}}_\nu^2) - \partial_{q\alpha} (\sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu}{2} \, \dot{\underline{x}}_\nu^2) && \text{(III.103)} \\
&= d_t \, \partial_{\dot{q}_\alpha} T - \partial_{q_\alpha} T, && \text{(III.104)}
\end{aligned}$$

wobei die kinetische Energie als Funktion der generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten sowie der Zeit angesehen werden kann,

$$T = T(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t). \tag{III.105}$$

Der zweite Term definiert die generalisierten Kräfte Φ_α über

$$\Phi_\alpha = \sum_{\nu=1}^{N} \underline{F}_\nu \cdot \partial_{q_\alpha} \underline{x}_\nu. \tag{III.106}$$

Damit ist zunächst zu schreiben

$$d_t \, \partial_{\dot{q}_\alpha} T - \partial_{q_\alpha} T = \Phi_\alpha \quad , \quad \alpha = 1, 2, \ldots, f. \tag{III.107}$$

Besitzen die eingeprägten Kräfte $\underline{F}_\nu$ ein Potential $V = V(\underline{x}_\mu, t)$ mit

$$\underline{F}_\nu = -\partial_{\underline{x}_\nu} V, \tag{III.108}$$

so kann Φ_α als

$$\Phi_\alpha = -\sum_{\nu=1}^{N} \partial_{\underline{x}_\nu} V \cdot \partial_{q_\alpha} \underline{x}_\nu = -\partial_{q_\alpha} V \tag{III.109}$$

umgeschrieben werden, wobei die potentielle Energie V als Funktion der generalisierten Koordinaten und der Zeit anzusehen ist,

$$V = V(q_\alpha, t). \tag{III.110}$$

Folglich gilt

$$\partial_{\dot{q}_\alpha} V = 0 \tag{III.111}$$

bzw.

$$\Phi_\alpha = -\partial_{q_\alpha} V + d_t \partial_{\dot{q}_\alpha} V. \tag{III.112}$$

Einsetzen dieses Ausdrucks für Φ_α liefert

$$d_t \, \partial_{\dot{q}_\alpha} T - \partial_{q_\alpha} T = d_t \, \partial_{\dot{q}_\alpha} V - \partial_{q_\alpha} V. \tag{III.113}$$

Die Größe

$$L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) \equiv T - V \tag{III.114}$$

wird als Lagrange-Funktion des Systems definiert und es ergeben sich die Lagrangeschen Gleichungen 2. Art

$$d_t\, \partial_{\dot{q}_\alpha} L - \partial_{q_\alpha} L = 0 \quad \text{(L II)}. \tag{III.115}$$

Wie beabsichtigt entspricht die Anzahl der Gleichungen genau der Anzahl der Freiheitsgrade f, und die Nebenbedingungen treten nicht mehr explizit auf.

<u>Bemerkung</u>:

Wenn die eingeprägten Kräfte kein Potential besitzen, werden auch die bereits o.a. Gleichungen

$$d_t\, \partial_{\dot{q}_\alpha} T - \partial_{q_\alpha} T = \Phi_\alpha \tag{III.116}$$

als Lagrangesche Gleichungen 2. Art bezeichnet.

Parallel zu den generalisierten Koordinaten q_α werden die generalisieten Impulse p_α über

$$p_\alpha \equiv \partial_{\dot{q}_\alpha} L \tag{III.117}$$

eingeführt. Eine bestimmte generalisierte Koordinate q_β heißt zyklisch, wenn

$$\partial_{q_\beta} L = 0 \tag{III.118}$$

und damit

$$\partial_{\dot{q}_\beta} L = const \tag{III.119}$$

gilt.

Zur Vertrauensbildung betrachten wir nun ein ungebundenes Massenpunktsystem, d.h. es existieren keine Nebenbedingungen, wobei sich die Kräfte aus einem Potential $V(\underline{x}_\mu, t)$ ableiten lassen sollen. Bei einem derartigen freien System können als die generalisierten Koordinaten die ursprünglichen Koordinaten $\underline{x}_\mu$ angesehen werden. Die Lagrange-Funktion hat hier die Form

$$L = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu}{2}\, \underline{\dot{x}}_\nu^2 - V(\underline{x}_\nu, t) = \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{a=1}^{3} \frac{m_\nu}{2}\, \dot{x}_{a\nu}^2 - V(x_{a\nu}, t). \tag{III.120}$$

Die generalisierten Impulse berechnen sich daraus zu

$$\partial_{\dot{x}_{a\mu}} L = m_\mu\, \dot{x}_{a\mu} = p_{a\mu} \tag{III.121}$$

und stimmen hier erwartungsgemäß mit den gewöhnlichen Impulsen überein. Gleiches gilt für die generalisierten Kräfte

$$\sum_{\nu=1}^{N} \underline{F}_\nu\, \partial_{x_{a\mu}} \underline{x}_\nu = F_{a\mu}, \tag{III.122}$$

die ebenfalls in die gewöhnlichen Kräfte übergehen. Die L II liefern hierfür

$$d_t\, \partial_{\dot{x}_{a\mu}} L - \partial_{x_{a\mu}} L = d_t(m_\mu\, \dot{x}_{a\mu}) + \partial_{x_{a\mu}} V = 0, \tag{III.123}$$

woraus wie erwartet die Bewegungsgleichungen des freien Systems folgen, also

$$m_\mu\, \underline{\ddot{x}}_\mu = -\partial_{\underline{x}_\mu} V = \underline{F}_\mu. \tag{III.124}$$

Für die L II im allgemeinen Fall ist nach folgender Lösungsstrategie zu verfahren:

1. Die kinetische Energie und die potentielle Energie des Systems der N Massenpunkte, den r holonome Nebenbedingungen auferlegt sind, sind durch f generalisierte Koordinalen q_α und generalisierte Geschwindigkeiten $\dot{q}_\alpha$ auszudrücken.

2. Die Lagrange-Funktion $L = T - V$ ist aufzustellen.

3. Die f Lagrangeschen Gleichungen 2. Art sind aufzustellen und zu lösen. So folgen die $q_\alpha(t)$.

4. Gegebenenfalls sind aus den $q_\alpha(t)$ die ursprünglichen Koordinaten $x_{a\mu} = x_{a\mu}\,(q_\alpha(t), t)$ und die Zwangskräfte $Z_{a\mu} = m_\mu\, \ddot{x}_{a\mu} - F_{a\mu}$ zu bestimmen.

Abschließend zu diesem Abschnitt soll noch die Ein-/Mehrdeutigkeit der Lagrange-Funktion untersucht werden. Sofort klar ist, daß L nur bis auf eine Konstante bestimmt ist, da V nur bis auf eine Konstante festgelegt ist. Die Unbestimmtheit von L ist jedoch noch weitgehender. Wir betrachten zwei Lagrange-Funktionen $L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$ und $L'(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$ mit

$$L' = L + d_t R(q_\alpha, t), \tag{III.125}$$

wobei R eine beliebige Funktion von q_α und t ist. Dann gilt

$$L' - L = d_t R = \sum_{\alpha=1}^{f} \partial_{q_\alpha} R \cdot \dot{q}_\alpha + \partial_t R \tag{III.126}$$

$$\partial_{\dot{q}_\alpha}(L' - L) = \partial_{q_\alpha} R \tag{III.127}$$

$$d_t\, \partial_{\dot{q}_\alpha}(L' - L = d_t \partial_{q_\alpha} R = \partial_{q_\alpha}\, d_t R = \partial_{q_\alpha}(L' - L) \tag{III.128}$$

bzw.

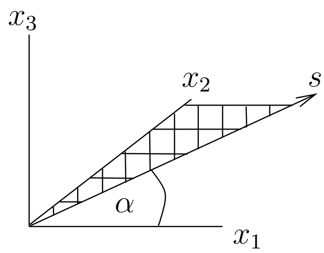
$$d_t\, \partial_{\dot{q}_\alpha} L' - \partial_{q_\alpha} L' = d_t\, \partial_{\dot{q}_\alpha} L - \partial_{q_\alpha} L. \tag{III.129}$$

Für L und L' folgen also die gleichen L II. Damit ist die Lagrange-Funktion eines Systems nur bis auf die totale zeitliche Ableitung einer beliebigen Funktion der generalisierten Koordinaten und der Zeit bestimmt.

2.4 Spezielle Probleme

Die L II stellen in Bezug auf Anwendungen eine der weitreichensten und brauchbarsten Methoden dar, die in der Mechanik bekannt sind. Die Stärke des Formalismus wird insbesondere bei schwierigen technisch-mechanischen Problemen deutlich, aber auch bei relativ einfachen Problemstellungen ist die Methode von beträchtlichem Vorteil.

2.4.1 Massenpunkt auf einer schiefen Ebene



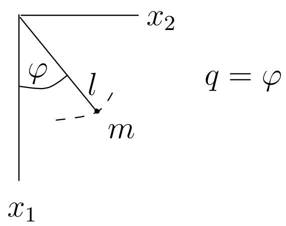
$$q_1 = s \qquad q_2 = x_2 \quad \Bigg| \quad x_1 = q_1 \cos\alpha, \quad x_2 = q_2, \quad x_3 = q_1 \sin\alpha$$

$$T = \frac{m}{2}\,(\dot{s}^2 + \dot{x}_2^2) \tag{III.130}$$
$$V = m \cdot g\,x_3 = m\,g\,\sin\alpha \cdot s \tag{III.131}$$
$$L = \frac{m}{2}\,(\dot{s}^2 + \dot{x}^2) - m\,g\,\sin\alpha \cdot s \tag{III.132}$$

$$d_t\,\partial_{\dot{s}}L - \partial_s L \;=\; m\,\ddot{s} + m\,g \cdot \sin\alpha = 0 \tag{III.133}$$
$$d_t\,\partial_{\dot{x}_2}L - \partial_{x_2} L \;=\; m\,\ddot{x}_2 = 0 \tag{III.134}$$
$$x_2\text{: zyklisch, } \partial_{\dot{x}_2}L = const = m\,\dot{x}_2 = p_2 \tag{III.135}$$

Mit $x_1 = s \cdot \cos\alpha$ und $x_3 = s \cdot \sin\alpha$ ist die Identität zur Betrachtung der L I in Abschnitt III.1.6.1 hergestellt.

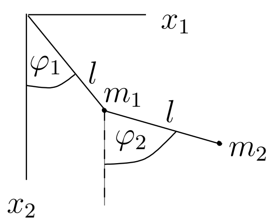
2.4.2 Kreispendel



$$T \;=\; \frac{m}{2}\,(\dot{\rho}^2 + \rho^2\,\dot{\varphi}^2) = \frac{m}{2}\,l^2\,\dot{\varphi}^2 \tag{III.136}$$
$$V \;=\; -m\,gx_1 = -m\,g\,l\,\cos\varphi \tag{III.137}$$
$$L \;=\; \frac{m}{2}\,l^2\,\dot{\varphi}^2 + m\,g\,l\,\cos\varphi \tag{III.138}$$

$$d_t\,\partial_{\dot{\varphi}}L - \partial_{\varphi}L = m\,l^2\,\ddot{\varphi} + m\,g\,l\,\sin\varphi = 0 \tag{III.139}$$
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\,\sin\varphi = 0 \tag{III.140}$$

2.4.3 Ebenes Doppelpendel (Sympathisches Pendel)



m_1 und m_2 hängen an masselosen gleichlangen Pendelstäben. Als generalisierte Koordinaten wählen wir φ_1 und φ_2. Es gilt

$$T \;=\; \frac{m_1}{2}\,(\dot{x}_{11}^2 + \dot{x}_{21}^2) + \frac{m_2}{2}\,(\dot{x}_{12}^2 + \dot{x}_{22}^2) \tag{III.141}$$
$$V \;=\; -m_1\,g \cdot x_{21} - m_2\,g \cdot x_{22} \tag{III.142}$$

mit

$$\begin{aligned}
x_{11} &= l\,\sin\varphi_1 && \text{(III.143)}\\
x_{21} &= l\,\cos\varphi_1 && \text{(III.144)}\\
x_{12} &= x_{11} + l\,\sin\varphi_2 = l\,(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2) && \text{(III.145)}\\
x_{22} &= x_{21} + l\,\cos\varphi_2 = l\,(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) && \text{(III.146)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{11}^2 &= l^2\,\cos^2\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 && \text{(III.147)}\\
\dot{x}_{21}^2 &= l^2\,\sin^2\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 && \text{(III.148)}\\
\dot{x}_{12}^2 &= l^2\,(\cos\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1 + \cos\varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2)^2 && \text{(III.149)}\\
\dot{x}_{22}^2 &= l^2\,(\sin\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1 + \sin\varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2)^2 && \text{(III.150)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L = \frac{m_1}{2}\,l^2\,\dot{\varphi}_1^2 &+ \frac{m_2}{2}\,l^2\,(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\cdot\dot{\varphi}_1\,\dot{\varphi}_2) && \text{(III.151)}\\
&+ m_1\,g\,l\,\cos\varphi_1 + m_2\,g\,l\,(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2)
\end{aligned}$$

folgen

$$\begin{aligned}
d_t\,\partial_{\dot{\varphi}_1} L - \partial_{\varphi_1} L &= (m_1\,l^2 + m_2\,l^2)\,\ddot{\varphi}_1 + m_2\,l^2\,\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\,\ddot{\varphi}_2\\
&\quad - m_2\,l^2\,\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\,(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)\cdot\dot{\varphi}_2 && \text{(III.152)}\\
&\quad + m_2\,l^2\,\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\,\dot{\varphi}_1\,\dot{\varphi}_2 + (m_1\,g\,l + m_2\,g\,l)\,\sin\varphi_1 = 0\\
d_t\,\partial_{\dot{\varphi}_2} L - \partial_{\varphi_2} L &= m_2\,l^2\,\ddot{\varphi}_2 + m_2\,l^2\,\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\,\ddot{\varphi}_1\\
&\quad - m_2\,l^2\,\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\,(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)\,\dot{\varphi}_1 && \text{(III.153)}\\
&\quad - m_2\,l^2\,\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\,\dot{\varphi}_1\,\dot{\varphi}_2 + m_2\,g\,l\,\sin\varphi_2 = 0.
\end{aligned}$$

Die weitere Auswertung beschränken wir auf kleine Auslenkungen und linearisieren zu:

$$\begin{aligned}
(m_1 + m_2)\,l^2\,\ddot{\varphi}_1^2 + m_2\,l^2\,\ddot{\varphi}_2 + (m_1 + m_2)\,l\,g\,\varphi_1 &= 0 && \text{(III.154)}\\
m_2\,l^2\,\ddot{\varphi}_2 + m_2\,l^2\,\ddot{\varphi}_1 + m_2\,g\,l\,\varphi_2 &= 0 && \text{(III.155)}
\end{aligned}$$

bzw.

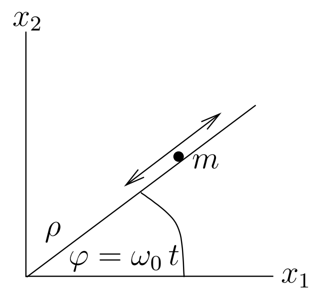
$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi}_1 + \frac{g}{l}\,\varphi_1 &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\,\ddot{\varphi}_2 && \text{(III.156)}\\
\ddot{\varphi}_2 + \frac{g}{l}\,\varphi_2 &= -\ddot{\varphi}_1. && \text{(III.157)}
\end{aligned}$$

Die Gleichungen beschreiben zwei linear verkoppelte harmonische Oszillatoren, die mit dem Ansatz

$$\varphi_{1,2} = A_{1,2}\,\mathrm{e}^{i\,\omega\,t} \qquad \text{(III.158)}$$

zu lösen sind.

2.4.4 Massenpunkt auf rotierender Stange



Ein Massenpunkt gleitet reibungsfrei auf einer Stange, die sich mit der konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_0 in der $x_1 - x_2$-Ebene dreht.

$$\begin{aligned} q &= \rho && \text{(III.159)} \\ T &= \frac{m}{2}\,(\dot\rho^2 + \rho^2\,\dot\varphi^2) = \frac{m}{2}\,(\dot\rho^2 + \rho^2\,\omega_0^2) && \text{(III.160)} \\ V &= 0 && \text{(III.161)} \\ L &= T && \text{(III.162)} \end{aligned}$$

$$d_t\,\partial_{\dot\rho}L - \partial_\rho L = m\,\ddot\rho - m\,\omega_0^2\,\rho = \quad \text{bzw.} \quad \ddot\rho - \omega_0^2\,\rho = 0 \tag{III.163}$$

Ansatz

$$\begin{aligned} \rho &= A\,\mathrm{e}^{\omega\,t} \quad \rightsquigarrow \quad \omega^2 - \omega_0^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \omega = \pm\omega_0 && \text{(III.164)} \\ \rho &= A_+\,\mathrm{e}^{\omega_0\,t} + A_-\,\mathrm{e}^{-\omega_0\,t} && \text{(III.165)} \end{aligned}$$

Betrachtung zweier Anfangssituationen

1. $t = 0 \quad , \quad \rho = \rho_0 \quad , \quad \dot\rho = 0$

   $\rho_0 = A_+ + A_- \quad , \quad 0 = A_+ - A_-$

   $$\rho \;= \frac{\rho_0}{2}\,(\mathrm{e}^{\omega_0\,t} + \mathrm{e}^{-\omega_0\,t}) \underset{t \gg \omega_0^{-1}}{\longrightarrow} \frac{\rho_0}{2}\,\mathrm{e}^{\omega_0\,t}$$

   (exponentielles nach außen fliegen)

2. $t = 0 \quad , \quad \rho = \rho_0 \quad , \quad \dot\rho = -\rho_0\,\omega_0$

$$\begin{aligned} \rho_0 &= A_+ + A_- && \text{(III.166)} \\ -\rho_0\,\omega_0 &= A_+\,\omega_0 - A_-\,\omega_0 \quad \rightsquigarrow \quad A_+ = 0 \quad , \quad A_- = \rho_0 && \text{(III.167)} \\ \rho &= \rho_0\,\mathrm{e}^{-\omega_0\,t} && \text{(III.168)} \end{aligned}$$

   (Bewegung zum Zentrum hin)

2.4.5 Beschleunigung in krummlinigen Koordinaten

Wir betrachten die Bewegung eines Massenpunktes m in beliebigen krummlinigen Koordinaten ξ^a, $a = 1, 2, 3$ (vgl. Abschnitt I.2). Der Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten des Massenpunktes sei durch

$$x_a = x_a(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \equiv x_a(\xi^b) \tag{III.169}$$

gegeben. Offensichtlich können krummlinige Koordinaten ξ^a als spezielle generalisierte Koordinaten q_α aufgefaßt werden.

Aus Abschnitt I.2.6 rufen wir die Darstellung von Geschwindigkeit und Beschleunigung des Massenpunktes in Erinnerung:

$$\begin{aligned} \underline{v} &= \dot\xi^a\,\underline{b}_a && \text{(III.170)} \\ \underline{a} &= \ddot\xi^a\,\underline{b}_a + \dot\xi^a\,\underline{\dot b}_a . && \text{(III.171)} \end{aligned}$$

Es gilt die Summenkonvention. Die Berechnung der Beschleunigung ist umständlich, da die zeitliche Ableitung der kovarianten Basis $\underline{b}_a$ mitberechnet werden muß. Wir werden sehen, daß L II ein elegantes Instrument ist, um die Rechnung zu verkürzen.

Wir gehen aus von L II für einen Massenpunkt in den generalisierten Koordinaten ξ^a in der Form

$$d_t\,\partial_{\dot\xi^a}T - \partial_{\xi^a}T = \Phi_a. \tag{III.172}$$

Die Definition der generalisierten Kraft ergibt für $N = 1$

$$\Phi_a = \underline{F}\cdot\partial_{\xi^a}\underline{x}. \tag{III.173}$$

Nun ist $\partial_{\xi^a}\underline{x}$ aber genau der kovariante Basisvektor, also

$$\underline{b}_a = \partial_{\xi^a}\underline{x} \tag{III.174}$$

wie in Abschnitt I.2.1 eingeführt. Somit folgt

$$\Phi_a = \underline{F}\cdot\underline{b}_a. \tag{III.175}$$

Ersetzen wir

$$\underline{F} = m\cdot\underline{a} \tag{III.176}$$

so ergibt sich

$$\frac{1}{m}\,(d_t\,\partial_{\dot\xi^a}T - \partial_{\xi^a}T) = \underline{a}\,\underline{b}_a. \tag{III.177}$$

Aus dieser Beziehung können leicht die Komponenten der Beschleunigung ausgerechnet werden, ohne $\dot{\underline{b}}_a$ ausrechnen zu müssen.

Wir führen dies konkret für Zylinderkoordinaten vor. Aus Abschnitt I.2.7 übernehmen wir

$$\underline{b}_1 = \hat{\underline{b}}_1 = \underline{e}_\rho \tag{III.178}$$
$$\underline{b}_2 = \rho\,\hat{\underline{b}}_2 = \rho\underline{e}_\rho \tag{III.179}$$
$$\underline{b}_3 = \hat{\underline{b}}_3 = \underline{e}_z \tag{III.180}$$
$$\underline{v} = \dot\xi^a\,\underline{b}_a = \dot\rho\,\underline{b}_1 + \dot\varphi\,\underline{b}_2 + \dot z\,\underline{b}_3 \tag{III.181}$$
$$= \dot\rho\,\underline{e}_\rho + \dot\varphi\,\rho\underline{e}_\varphi + \dot z\,\underline{e}_z. \tag{III.182}$$

Damit ergibt sich die kinetische Energie in der Form

$$T = \frac{m}{2}\,\underline{v}^2 = \frac{m}{2}\,(\dot\rho^2 + \dot\varphi^2\,\rho^2 + \dot z^2). \tag{III.183}$$

Setzen wir dies in (III.177) ein, so folgt:
$a = 1\ (\xi^1 = \rho)$:

$$\ddot\rho - \dot\varphi^2\,\rho = \underline{a}\cdot\underline{b}_1 = \underline{a}\,\underline{e}_\rho = a_\rho \tag{III.184}$$

$a = 2\ (\xi^2 = \varphi)$:

$$d_t(\dot\varphi\,\rho^2) - 0 = \ddot\varphi\,\rho^2 + 2\dot\varphi\,\rho\,\dot\rho = \underline{a}\cdot\underline{b}_2 = \underline{a}\,\rho\,\underline{e}_\varphi = \rho\,a_\varphi \tag{III.185}$$
$$\ddot\varphi\,\rho + 2\,\dot\varphi\,\dot\rho = a_\varphi \tag{III.186}$$

$a = 3\ (\xi^3 = z)$:

$$\ddot z - 0 = \underline{a}\cdot\underline{b}_3 = \underline{a}\,\underline{e}_z = a_z. \tag{III.187}$$

Zusammengefaßt finden wir

$$\underline{a} = (\ddot\rho - \dot\varphi^2\,\rho)\,\underline{e}_\rho + (\ddot\varphi\,\rho + 2\dot\varphi\,\dot\rho)\,\underline{e}_\varphi + \ddot z\,\underline{e}_z. \tag{III.188}$$

Man vergleiche die Rechnung mit der des Abschnitts I.2.7.

2.4.6 Beschleunigung in bewegten Bezugssystemen

Im Abschnitt II.2 ("Bewegte Bezugssysteme") haben wir die Bewegung eines Massenpunkt ebenfalls durch zwei Koordinatensysteme Σ und Σ' beschrieben. Diese sind zwar beide kartesisch, dafür aber beliebig gegeneinander bewegt. Die Bewegungsgleichung in Σ' aufzuschreiben erforderte einige Rechnung.

Wir wollen jetzt die Koordinaten $\underline{x}'$ im bewegten System als generalisierte Koordinaten betrachten und die Bewegungsgleichung in Σ' aus den L II ableiten.

Als Ausgangspunkt benötigen wir lediglich den Zusammenhang der Geschwindigkeiten in Σ und Σ', um die kinetische Energie aufschreiben zu können.

Aus Abschnitt II.2 übernehmen wir die Transformationsformel zwischen den ursprünglichen $\underline{x}$ und den generalisierten Koordinaten $\underline{x}'$ zu

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \underline{x}_0 + \underline{x}' = \underline{x}_0(t) + x_1'\,\underline{e}_1'(t) + x_2'\,\underline{e}_2'(t) + x_3'\,\underline{e}_3'(t) = \underline{x}(x_1', x_2', x_3', t) && \text{(III.189)} \\ d_t\underline{x} &= d_t\underline{x}_0 + d_t\underline{x}' = d_t\underline{x}_0 + d_t'\underline{x}' + \underline{\omega} \times \underline{x}'. && \text{(III.190)} \end{aligned}$$

Wir wollen die Schreibweise rationalisieren und schreiben die zweite rechte Gleichung in der Form

$$d_t\underline{x} = \underline{v}_{tr} + \dot{\underline{x}}' + \underline{\omega} \times \underline{x}', \tag{III.191}$$

d.h. es wird $d_t' = (\dot{\ })$ abgekürzt.

Aus der kinetischen Energie in Σ

$$T = \frac{m}{2}\,(d_t\underline{x})^2 \tag{III.192}$$

ergibt sich die kinetische Energie in Σ' und damit in den generalisierten Koordinaten $\underline{x}'$ bzw. Geschwindigkeiten $\dot{\underline{x}}'$ zu

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}\,\underline{v}_{tr}^2 + \frac{m}{2}\,\dot{\underline{x}}'^2 + \frac{m}{2}\,(\underline{\omega} \times \underline{x}')^2 && \text{(III.193)} \\ &\quad + m\,\underline{v}_{tr}\,\dot{\underline{x}}' + m\,\underline{v}_{tr}\,(\underline{\omega} \times \underline{x}') + m\,\dot{\underline{x}}'\,(\underline{\omega} \times \underline{x}'). \end{aligned}$$

Die Lagrange-Funktion folgt unmittelbar:

$$\begin{aligned} L(\underline{x}', \dot{\underline{x}}', t) &= T - V && \text{(III.194)} \\ &= \frac{m}{2}\,\underline{v}_{tr}^2 + \frac{m}{2}\,\dot{\underline{x}}'^2 + \frac{m}{2}\,(\underline{\omega} \times \underline{x}')^2 + m\,\underline{v}_{tr}\,\dot{\underline{x}}' && \text{(III.195)} \\ &\quad + m\,\underline{v}_{tr}\,(\underline{\omega} \times \underline{x}') + m\,\dot{\underline{x}}'\,(\underline{\omega} \times \underline{x}') - V(\underline{x}', t). \end{aligned}$$

Bevor wir L II ableiten, stellen wir notwendige Hilfsformeln bereit:

- $\partial_{\underline{x}'}\,\underline{v}_{tr} \cdot (\underline{\omega} \times \underline{v}')$:

$$\begin{aligned} \partial_{x_a'}\,v_b\,\epsilon_{bcd}\,\omega_c\,x_d' &= v_b\,\epsilon_{bcd}\,\omega_c\,\delta_{da} = v_b\,\epsilon_{bca}\,\omega_c && \text{(III.196)} \\ &= -\epsilon_{acb}\,\omega_c\,v_b && \text{(III.197)} \\ \partial_{\underline{x}'}\underline{v}_{tr}(\underline{\omega} \times \underline{x}') &= -\underline{\omega} \times \underline{v}_{tr} = \underline{v}_{tr} \times \underline{\omega} && \text{(III.198)} \end{aligned}$$

- $\partial_{\underline{x}'}\,(\underline{\omega} \times \underline{x}')^2$:

$$\begin{aligned} \partial_{x_a'}\,\epsilon_{bcd}\,\omega_c\,x_d'\,\epsilon_{bef}\,\omega_e\,x_f' &= \epsilon_{bcd}\,\omega_c\,\delta_{da}\,\epsilon_{bef}\,\omega_e\,x_f' && \text{(III.199)} \\ &\quad + \epsilon_{bcd}\,\omega_c\,x_d'\,\epsilon_{bef}\,\omega_e\,\delta_{fa} \\ &= -\epsilon_{acb}\,\omega_c\,\epsilon_{bef}\,\omega_e\,x_f' - \epsilon_{bcd}\,\omega_c\,x_d'\,\epsilon_{aeb}\,\omega_e && \text{(III.200)} \end{aligned}$$

$$\partial_{\underline{x}'}\,(\underline{\omega} \times \underline{x}')^2 = -\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{x}') - \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{x}') = 2(\underline{\omega} \times \underline{x}') \times \underline{\omega}$$

- $d_t \underline{v}_{tr} = d'_t \underline{v}_{tr} + \underline{\omega} \times \underline{v}_{tr} = \dot{\underline{v}}_{tr} + \underline{\omega} \times \underline{v}_{tr}$ (vgl. Abschnitt II.2).

Die in den L II vorzunehmende totale zeitliche Differentiation hat natürlich im System der generalisierten Koordinaten - also hier in Σ' - zu erfolgen, und wir schreiben dafür d'_t bzw. $(\dot{})$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\partial_{\dot{\underline{x}}'} T &= m\,\dot{\underline{x}}' + m\,\underline{v}_{tr} + m\,\underline{\omega} \times \underline{x}' && \text{(III.201)} \\
d'_t\,\partial_{\dot{\underline{x}}'} T &= m\,\ddot{\underline{x}}' + m\,\dot{\underline{v}}_{tr} + m\,\dot{\underline{\omega}} \times \underline{x}' + m\,\underline{\omega} \times \dot{\underline{x}}' && \text{(III.202)} \\
\partial_{\underline{x}'} T &= m\,(\underline{\omega} \times \underline{x}') \times \underline{\omega} + m\,\underline{v}_{tr} \times \underline{\omega} + m\,\dot{\underline{x}}' \times \underline{\omega} && \text{(III.203)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d'_t\,\partial_{\dot{\underline{x}}'} T - \partial_{\underline{x}'} T &= m\,\ddot{\underline{x}}' + m\,(\dot{\underline{v}}_{tr} + \underline{\omega} \times \underline{v}_{tr}) + m\,\dot{\underline{\omega}} \times \underline{x}' + 2m\,\underline{\omega} \times \dot{\underline{x}}' && \text{(III.204)} \\
&\quad + m\,\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{x}') = \Phi = \underline{F}\frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{x}'} = \underline{F} \quad . && \text{(III.205)}
\end{aligned}$$

Verwendet wurde $\partial \underline{x} / \partial \underline{x}' = 1$, was wegen $\underline{x} = \underline{x}' + \underline{x}_0$ offensichtlich ist. Wir bestätigen damit das aus Abschnitt II.2 bekannte Resultat

$$m\,\ddot{\underline{x}}' = \underline{F} - m\,d_t \underline{v}_{tr} - m\,\dot{\underline{\omega}} \times \underline{x}' - m\,\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{x}') - 2m\,\underline{\omega} \times \dot{\underline{x}}'. \qquad \text{(III.206)}$$

Bemerkung:

Dieses Beispiel ist auch deshalb besonders interessant, weil in den Zusammenhang zwischen den ursprünglichen Koordinaten $\underline{x}$ und den (neuen) generalisierten Koordinaten $\underline{x}'$ eine explizite Zeitabhängigkeit eingeht, die durch $\underline{x}_0(t)$ und $\underline{\omega}(t)$ vorgegeben ist.

2.4.7 Forminvarianz der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art

Die Einführung der generalisierten Koordinaten ist mit einer gewissen Willkür behaftet. Die generalisierten Koordinaten sind dementsprechend nicht eindeutig einführbar. Statt eines bestimmten Satzes von generalisierten Koordinaten q_α könnte auch ein anderer geeigneter Satz Q_α verwendet werden. Die LII haben in beiden Fällen die gleiche Form. Diese bereits jetzt glaubhafte Tatsache soll trozdem noch einmal explizit untersucht werden.

Dazu stellen wir den einen Satz generalisierter Koordinaten in Abhängigkeit vom anderen Satz dar, also z.B.

$$Q_\alpha = Q_\alpha(q_\beta, t) \quad . \qquad \text{(III.207)}$$

Dann folgt

$$\dot{Q}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{f} \partial_{q_\beta} Q_\alpha \cdot \dot{q}_\beta + \partial_t Q_\alpha \quad . \qquad \text{(III.208)}$$

Die Lagrange-Funktion $L(q_\beta, \dot{q}_\beta, t)$ geht dann über in eine neue Lagrange-Funktion $\bar{L}(Q_\alpha, \dot{Q}_\alpha, t)$. Nun gilt

$$\begin{aligned}
\bar{L}(Q_\alpha, \dot{Q}_\alpha, t) &= \bar{L}\left(Q_\alpha(q_\beta, t),\, \sum_{\gamma=1}^{f} \partial_{q_\gamma} Q_\alpha(q_\beta, t) \cdot \dot{q}_\gamma + \partial_t Q_\alpha(q_\beta, t),\, t\right) && \text{(III.209)} \\
&= L(q_\beta, \dot{q}_\beta, t) \quad . && \text{(III.210)}
\end{aligned}$$

Differentiation vermittels Kettenregel ergibt

$$\partial_{q_\beta} L = \sum_{\alpha=1}^{f} \left(\partial_{Q_\alpha} \bar{L} \cdot \partial_{q_\beta} Q_\alpha + \partial_{\dot{Q}_\alpha} \bar{L} \cdot \partial_{q_\beta} \dot{Q}_\alpha \right) \quad ; \tag{III.211}$$

$$\partial_{\dot{q}_\beta} L = \sum_{\alpha=1}^{f} \partial_{\dot{Q}_\alpha} \bar{L} \cdot \partial_{\dot{q}_\beta} \dot{Q}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{f} \partial_{\dot{Q}_\alpha} \bar{L} \cdot \partial_{q_\beta} Q_\alpha \quad ; \tag{III.212}$$

$$\begin{aligned} d_t \partial_{\dot{q}_\beta} L &= \sum_{\alpha=1}^{f} d_t \left(\partial_{\dot{Q}_\alpha} \bar{L} \cdot \partial_{q_\beta} Q_\alpha \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{f} \left\{ \left(d_t \partial_{\dot{Q}_\alpha} \bar{L} \right) \cdot \partial_{q_\beta} Q_\alpha + \partial_{\dot{Q}_\alpha} \bar{L} \cdot \partial_{q_\beta} \dot{Q}_\alpha \right\} \end{aligned} \tag{III.213}$$

und folglich

$$d_t \partial_{\dot{q}_\beta} L - \partial_{q_\beta} L = \sum_{\alpha=1}^{f} \partial_{q_\beta} Q_\alpha \left(d_t \partial_{\dot{Q}_\alpha} \bar{L} - \partial_{Q_\alpha} \bar{L} \right) \quad . \tag{III.214}$$

Wir können nun schlußfolgern: Wenn die LII in den generalisierten Koordinaten Q_α gelten, also

$$d_t \partial_{\dot{Q}_\alpha} \bar{L} - \partial_{Q_\alpha} \bar{L} = 0 \quad , \tag{III.215}$$

dann gelten sie auch in den q_α, also

$$d_t \partial_{\dot{q}_\alpha} L - \partial_{q_\alpha} L = 0 \quad . \tag{III.216}$$

Welcher Satz generalisierter Koordinaten als Ausgangspunkt und welcher als Ergebnis der Transformation betrachtet wird, ist dabei völlig unerheblich; so könnte ebenso statt $Q_\alpha = Q_\alpha(q_\beta, t)$ die inverse Transformation $q_\alpha = q_\alpha(Q_\beta, t)$ betrachtet werden.

Lokal muß die Transformation natürlich eindeutig sein. Garantiert wird dies durch eine nichtverschwindende Jacobi-Determinante, also

$$\det \{ \partial_\beta Q_\alpha \} \neq 0 \quad . \tag{III.217}$$

Schreiben wir kompakt

$$\underline{\Lambda} = \begin{pmatrix} d_t \partial_{\dot{q}_1} L - \partial_{q_1} L \\ \vdots \\ d_t \partial_{\dot{q}_f} L - \partial_{q_f} L \end{pmatrix} \tag{III.218}$$

bzw.

$$\underline{\bar{\Lambda}} = \begin{pmatrix} d_t \partial_{\dot{Q}_1} \bar{L} - \partial_{Q_1} \bar{L} \\ \vdots \\ d_t \partial_{\dot{Q}_f} \bar{L} - \partial_{Q_f} \bar{L} \end{pmatrix} \tag{III.219}$$

und

$$\underline{\underline{J}} = \left(\partial_{q_\beta} Q_\alpha \right) \quad , \tag{III.220}$$

so nimmt Gl. (III.214) die Form

$$\underline{\Lambda} = \underline{\underline{J}}\, \underline{\bar{\Lambda}} \tag{III.221}$$

an. Daraus folgt

$$\underline{\bar{\Lambda}} = \underline{\underline{J}}^{-1} \underline{\Lambda} \quad , \tag{III.222}$$

was die Symmetrie bezüglich beider Schlußrichtungen noch einmal verdeutlicht:

$$\underline{\Lambda} = 0 \quad \text{impliziert} \quad \underline{\bar{\Lambda}} = 0 \quad \text{und umgekehrt.} \tag{III.223}$$

3 Erhaltungssätze in der Sprache der Lagrange-Mechanik

Bilanzgleichungen und Erhaltungssätze werden sich natürlich auch in der Lagrange-Mechanik wiederfinden. Die Gestalt wird jedoch i.a eine andere als die bisherige sein.

3.1 Symmetrien und Erhaltungssätze

Im Abschnitt 2.3 wurde der Begriff der zyklischen Koordinate eingeführt. Demnach wurde eine generalisierte Koordinate q_β zyklisch genannt, wenn

$$\partial_{q_\beta} L = 0 \tag{III.224}$$

gilt, was unmittelbar auf

$$\partial_{\dot{q}_\beta} L = const \tag{III.225}$$

führt. Wenn L also nicht von q_β abhängt, hat dies einen Erhaltungssatz zur Folge. Man sagt auch, daß L dann eine gewisse Symmetrieeigenschaft hat, die darin besteht, sich bei Anwendung der Operation ∂_{q_β} nicht zu ändern.

Diese Eigenschaft gilt ganz allgemein, nicht nur für die q_α, sondern auch für t: Wenn die Lagrange-Funktion eine bestimmte Symmetrie besitzt, ist damit eine Erhaltungsgröße verbunden. Herausgefunden wurde dieser Zusammenhang von Emmy Noether (1882-1935) und ist bekannt als das *Noether-Theorem*.

Symmetrietransformationen

Im folgenden sollen allgemeine Transformationen für beliebige Systeme betrachtet werden, deren Lagrange-Funktion $L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$ dann natürlich in generalisierten Koordinaten gegeben ist. Es sei daran erinnert, daß die generalisierten Koordinaten nicht eindeutig wählbar sind.

Die Lösung der Bewegungsgleichungen sei nun

$$q_\alpha = q_\alpha(t) \quad , \quad \dot{q}_\alpha = \dot{q}_\alpha(t) \quad . \tag{III.226}$$

Wir bilden diese generalisierten Koordinaten q_α und die Zeit t jetzt eineindeutig auf neue Koordinaten $\tilde{q}_\alpha$ und $\tilde{t}$ ab. Es gelte die Transformation

$$\tilde{t} = F_0(t, q_\beta, \epsilon) \quad , \tag{III.227}$$

$$\tilde{q}_\alpha = F_\alpha(t, q_\beta, \epsilon) \quad , \quad \alpha, \beta = 1, ..., f \quad , \tag{III.228}$$

wobei ϵ ein kontinuierlicher, i.a. reeller Parameter sei, der die Abbildung charakterisiert. Es ist sogar möglich, eine Gruppe von unabhängigen Parametern $\epsilon_1, ..., \epsilon_n$ zu betrachten, ohne daß sich an den Überlegungen prinzipiell etwas ändert. Statt ϵ wäre dann das n-Tupel $\underline{\epsilon} = (\epsilon_1, ..., \epsilon_n)$ anzuschreiben. Wir bleiben aber bei ϵ.

Zunächst sind $\tilde{t}$ und $\tilde{q}_\alpha$ mathematische Konstruktionen, und die $\tilde{q}_\alpha$ müssen auch nicht neue generalisierte Koordinaten sein. Durch Einsetzen der $q_\alpha(t)$ in die Transformationsgleichungen erhält man

$$\tilde{t}(t) = F_0(t, q_\beta(t), \epsilon) \quad , \tag{III.229}$$

$$\tilde{q}_\alpha(t) = F_\alpha(t, q_\beta(t), \epsilon) \quad . \tag{III.230}$$

Die Umkehrfunktion zu $\tilde{t}(t)$ ergibt $t = t(\tilde{t})$ und eingesetzt in $\tilde{q}_\alpha(t)$ folgt

$$\tilde{q}_\alpha(t(\tilde{t})) = \tilde{q}_\alpha(\tilde{t}) = F_\alpha(t, q_\beta(t), \epsilon)|_{t=t(\tilde{t})} \quad . \tag{III.231}$$

Somit bildet die Transformation die Lösung $q_\alpha(t)$ des Bewegungsproblems auf die Funktionen $\tilde{q}_\alpha(\tilde{t})$ ab.

Nun sollen die Transformationen F_0, F_α so eingeschränkt werden, daß $\tilde{q}_\alpha(\tilde{t})$ auch wieder eine Lösung des gleichen Problems darstellt. Wir fordern also, daß mit

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q_\beta(t), \dot{q}_\beta(t), t)\, dt = \text{Extremum} \tag{III.232}$$

auch simultan

$$\pm \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} L(\tilde{q}_\beta(\tilde{t}), \dot{\tilde{q}}_\beta(\tilde{t}), \tilde{t}) \; = \text{Extremum} \tag{III.233}$$

erfüllt ist und zwar für die gleiche Lagrange-Funktion. Das negative Vorzeichen ist bei Zeitumkehr anzuwenden. Die Auswertung dieser Forderung stellt gewisse Bedingungen an die o.g. Abbildung. Eine Abbildung, die eine Lösung $q_\alpha(t)$ des Problems wieder in eine Lösung $\tilde{q}_\alpha(\tilde{t})$ überführt, heißt *Symmetrietransformation*.

Zum Auffinden der Bedingung für eine Symmetrietransformation wird zunächst die transformierte Geschwindigkeit $\dot{\tilde{q}}_\alpha(\tilde{t})$ bestimmt. Wir wollen die Punktierung $(\dot{\ })$ sowohl für d_t als auch für $d_{\tilde{t}}$ verwenden, wenn die Variablenabhängigkeit (t oder $\tilde{t}$) der q_α bzw. $\tilde{q}_\alpha$ klar ist. Man findet

$$\dot{\tilde{q}}_\alpha(\tilde{t}) = d_{\tilde{t}}\tilde{q}_\alpha(\tilde{t}) = \left\{ \partial_t F_\alpha + \sum_\beta \partial_{q_\beta} F_\alpha \cdot \dot{q}_\beta \right\} \frac{dt}{d\tilde{t}} \tag{III.234}$$

und

$$\frac{d\tilde{t}}{dt} = \partial_t F_0 + \sum_\beta \partial_{q_\beta} F_0 \cdot \dot{q}_\beta \quad . \tag{III.235}$$

Somit folgt

$$\dot{\tilde{q}}_\alpha(\tilde{t}) = \frac{\partial_t F_\alpha + \sum_\beta \partial_{q_\beta} F_\alpha \cdot \dot{q}_\beta}{\partial_t F_0 + \sum_\beta \partial_{q_\beta} F_0 \cdot \dot{q}_\beta} \quad . \tag{III.236}$$

In die rechte Seite ist für t noch $t(\tilde{t})$ einzusetzen, und wir schreiben

$$\dot{\tilde{q}}_\alpha(\tilde{t}) \quad \equiv \quad G_\alpha(t, q_\gamma(t), \dot{q}_\gamma(t), \epsilon)|_{t=t(\tilde{t})} \tag{III.237}$$

$$= \quad \left. \frac{\partial_t F_\alpha + \sum_\beta \partial_{q_\beta} F_\alpha \cdot \dot{q}_\beta}{\partial_t F_0 + \sum_\beta \partial_{q_\beta} F_0 \cdot \dot{q}_\beta} \right|_{t=t(\tilde{t})} \quad . \tag{III.238}$$

Das Wirkungsintegral in den transformierten Größen $\tilde{q}_\alpha, \tilde{t}$ führen wir nun schrittweise auf die Größen q_α, t zurück. Zum Vergleich der Integrale (III.232) und (III.233) stellt man zunächst gleiche Integrationsgrenzen her, indem man in Gl. (III.233) $\tilde{t}(t)$ substituiert:

$$\pm \int_{t_1}^{t_2} L(\tilde{q}_\beta(\tilde{t}(t)), \dot{\tilde{q}}_\beta(\tilde{t}(t)), \tilde{t}(t)) \frac{d\tilde{t}}{dt}\, dt = \text{Extremum} \quad . \tag{III.239}$$

Die Substitution $\tilde{t}(t)$ im Integranden macht die Substitution $t = t(\tilde{t})$ in den Argumenten von F_0 und F_α rückgängig, also

$$\tilde{q}_\alpha(\tilde{t}(t)) = F_\alpha(t, q_\beta(t), \epsilon) \tag{III.240}$$

und

$$\dot{\tilde{q}}_\alpha(\tilde{t}(t)) = G_\alpha(t, q_\beta(t), \dot{q}_\beta(t)\epsilon) \quad . \tag{III.241}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\pm \int_{t_1}^{t_2} & L\left(F_\alpha(t,q_\beta(t),\epsilon),G_\alpha(t,q_\beta(t),\dot q_\beta(t),\epsilon),F_0(t,q_\beta(t),\epsilon)\right)\cdot\\ &\cdot\left(\partial_t F_0(t,q_\beta(t),\epsilon)+\sum_\gamma \partial_{q_\gamma}F_0(t,q_\beta(t),\epsilon)\cdot\dot q_\gamma(t)\right)dt \;=\; \text{Extremum}\end{aligned} \tag{III.242}$$

und das Variationsproblem der transformierten Bewegung $\tilde q_\alpha(\tilde t)$ ist auf das Variationsproblem für die Originalbewegung $q_\alpha(t)$ zurückgeführt. Beide Integrale müssen simultan zum Extremum werden. Hinreichend dafür ist, daß beide Integranden bis auf die totale Zeitableitung einer Funktion $R(q_\alpha,t)$ gleich sein müssen. Die letztgenannte Bedingung ist in Gl. (??) gezeigt. Somit ist zu fordern

$$\begin{aligned}L(q_\alpha,\dot q_\alpha,t) = & \\ & \pm L\left(F_\alpha(t,q_\beta(t),\epsilon),G_\alpha(t,q_\beta(t),\dot q_\beta(t),\epsilon),F_0(t,q_\beta(t),\epsilon)\right)\cdot\\ & \cdot\left(\partial_t F_0(t,q_\beta(t),\epsilon)+\sum_\gamma \partial_{q_\gamma}F_0(t,q_\beta(t),\epsilon)\cdot\dot q_\gamma(t)\right)\\ & +d_t R(q_\alpha(t),t) \quad .\end{aligned} \tag{III.243}$$

Eine Transformation F_0, F_α, für die sich eine Funktion R finden läßt, so daß die Relation erfüllt ist, ist eine Symmetrietransformation.

3.2 Noether-Theorem

Untersucht werden Symmetrietransformationen

$$\tilde t \;=\; F_0(t,q_\beta,\epsilon) \quad , \tag{III.244}$$

$$\tilde q_\alpha \;=\; F_\alpha(t,q_\beta,\epsilon) \tag{III.245}$$

mit

$$\tilde t \;=\; F_0(t,q_\beta(t),\epsilon=0)=t \quad , \tag{III.246}$$

$$\tilde q_\alpha(t) \;=\; F_\alpha(t,q_\beta(t),\epsilon=0)=q_\alpha \quad . \tag{III.247}$$

Für den Parameter $\epsilon=0$ soll somit die identische Transformation vorliegen. Taylor-Entwicklung liefert

$$\tilde t \;=\; t+\left.\frac{dF_0}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\cdot\epsilon+\mathcal{O}(\epsilon^2) \quad ; \tag{III.248}$$

$$\tilde q_\alpha \;=\; q_\alpha+\left.\frac{dF_\alpha}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\cdot\epsilon+\mathcal{O}(\epsilon^2) \quad . \tag{III.249}$$

Nun wird die Bedingung für die Symmetrietransformation nach ϵ differenziert:

$$\begin{aligned}0 \;=\; & \pm\sum_\beta\left\{\frac{\partial L}{\partial F_\beta}\cdot\frac{dF_\beta}{d\epsilon}+\frac{\partial L}{\partial G_\beta}\cdot\frac{dG_\beta}{d\epsilon}+\frac{\partial L}{\partial F_0}\cdot\frac{dF_0}{d\epsilon}\right\}\cdot\left\{\partial_t F_0+\sum_\gamma \dot q_\gamma\partial_{q_\gamma}F_0\right\}\\ & \pm L\left(\partial_t+\sum_\gamma\dot q_\gamma\partial_{q_\gamma}\right)\frac{dF_0}{d\epsilon}+\frac{d}{dt}\frac{dR}{d\epsilon} \quad .\end{aligned} \tag{III.250}$$

Anschließend wird $\epsilon=0$ gesetzt und dabei eingearbeitet, daß gilt

$$\left.\partial_t F_0\right|_{\epsilon=0} \;=\; 1 \quad ; \tag{III.251}$$

$$\left.\partial_{q_\gamma} F_0\right|_{\epsilon=0} \;=\; 0 \quad ; \tag{III.252}$$

$$\left.\partial_t F_\alpha\right|_{\epsilon=0} \;=\; 0 \quad ; \tag{III.253}$$

$$\left.\partial_{q_\gamma} F_\beta\right|_{\epsilon=0} \;=\; \delta_{\gamma\beta} \tag{III.254}$$

sowie

$$\begin{aligned}
d_t &= \partial_t + \sum_\gamma \dot{q}_\gamma \partial_{q_\gamma} \quad ; && \text{(III.255)} \\
G_\alpha(t, q_\beta, \dot{q}_\beta, \epsilon) &= \frac{\partial_t F_\alpha + \sum_\gamma \dot{q}_\gamma \partial_{q_\gamma} F_\alpha}{\partial_t F_0 + \sum_\gamma \dot{q}_\gamma \partial_{q_\gamma} F_0} = \frac{d_t F_\alpha}{d_t F_0} \quad ; && \text{(III.256)} \\
G_\alpha(t, q_\beta, \dot{q}_\beta, \epsilon = 0) &= \dot{q}_\alpha \quad . && \text{(III.257)}
\end{aligned}$$

Zudem ist

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dG_\alpha}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} &= \frac{d}{dt}\left.\frac{dF_\alpha}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} - \left.\frac{d_t F_\alpha}{(d_t F_0)^2}\right|_{\epsilon=0} \cdot \frac{d}{dt}\left.\frac{dF_0}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} && \text{(III.258)} \\
&= \frac{d}{dt}\left.\frac{dF_\alpha}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} - \dot{q}_\alpha \cdot \frac{d}{dt}\left.\frac{dF_0}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \quad . && \text{(III.259)}
\end{aligned}$$

Es verbleibt

$$\begin{aligned}
0 = &\sum_\beta \left\{ \partial_{q_\beta} L \left.\frac{dF_\beta}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} + \partial_{\dot{q}_\beta} L \left[\frac{d}{dt}\left.\frac{dF_\beta}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} - \dot{q}_\beta \cdot \frac{d}{dt}\left.\frac{dF_0}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \right] \right\} \\
&+ \partial_t L \left.\frac{dF_0}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} + L \frac{d}{dt}\left.\frac{dF_0}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} + \frac{d}{dt}\left.\frac{dR}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \quad . && \text{(III.260)}
\end{aligned}$$

Das $\pm$-Vorzeichen kann der Funktion R zugeschlagen werden. Einarbeitung der LII,

$$\partial_{q_\beta} L = d_t \partial_{\dot{q}_\beta} L \tag{III.261}$$

die ja entsprechend der Voraussetzung für $q_\alpha(t)$ gelten, liefert

$$\begin{aligned}
0 = &\sum_\beta \frac{d}{dt}\left(\partial_{\dot{q}_\beta} L \left.\frac{dF_\beta}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \right) - \sum_\beta \dot{q}_\beta \partial_{\dot{q}_\beta} L \frac{d}{dt}\left.\frac{dF_0}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \\
&+ \partial_t L \left.\frac{dF_0}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} + L \frac{d}{dt}\left.\frac{dF_0}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} + \frac{d}{dt}\left.\frac{dR}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} && \text{(III.262)}
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
0 = &\sum_\beta \frac{d}{dt}\left(\partial_{\dot{q}_\beta} L \left.\frac{dF_\beta}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \right) + \left(L - \sum_\beta \dot{q}_\beta \partial_{\dot{q}_\beta} L \right) \frac{d}{dt}\left.\frac{dF_0}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \\
&+ \partial_t L \left.\frac{dF_0}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} + \frac{d}{dt}\left.\frac{dR}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \quad . && \text{(III.263)}
\end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{dL}{dt} = \sum_\beta \left(\partial_{q_\beta} L \dot{q}_\beta + \partial_{\dot{q}_\beta} L \ddot{q}_\beta \right) + \partial_t L \tag{III.264}$$

kann umgeformt werden zu

$$\frac{d}{dt}\left\{ \sum_\beta \partial_{\dot{q}_\beta} L \left.\frac{dF_\beta}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} + \left(L - \sum_\beta \dot{q}_\beta \partial_{\dot{q}_\beta} L \right) \left.\frac{dF_0}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} + \left.\frac{dR}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \right\} = 0 \tag{III.265}$$

Der Klammerausdruck ist somit erstes Integral der Bewegung. Wir führen noch die Abkürzungen

$$\begin{aligned}
\delta q_\beta &\equiv \left.\frac{dF_\beta}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \quad ; && \text{(III.266)} \\
\delta t &\equiv \left.\frac{dF_0}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} && \text{(III.267)}
\end{aligned}$$

ein und schreiben das erste Integral in der Form

$$I = \sum_{\beta} \partial_{\dot{q}_\beta} L \cdot \delta q_\beta + \left(L - \sum_{\beta} \dot{q}_\beta \partial_{\dot{q}_\beta} L \right) \cdot \delta t + \left. \frac{dR}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = const \quad . \tag{III.268}$$

Diese Aussage wird als *Noether-Theorem* bezeichnet.

Bemerkung:
Für eine weitergehende Behandlung des Problems verweisen wir auf *http://www.marcothiel.de/Physik/Lagrange2/*.

3.3 Die 10 klassischen Erhaltungsgrößen

Wir betrachten nun ein abgeschlossenes, konservatives N-Teilchen-System mit der Lagrange-Funktion

$$L\left(\underline{x}_\nu, \underline{\dot{x}}_\nu\right) = \sum_{\mu=1}^{N} \frac{m_\mu}{2} \underline{\dot{x}}_\mu^2 - V\left(\underline{x}_\nu\right) \quad . \tag{III.269}$$

Das Potential soll nur von den Abständen zwischen je zwei Massenpunkten abhängen, also

$$V(\underline{x}_\nu) = V\left(\left|\underline{x}_\nu - \underline{x}_\mu\right|\right) \quad . \tag{III.270}$$

Als innere Kräfte sind somit nur Zentralkräfte zugelassen. Nebenbedingungen bestehen nicht.

Aus unseren bisherigen Untersuchungen wissen wir, daß für dieses System 10 Erhaltungsgrößen existieren:

- Da keine äußeren Kräfte wirken, bleibt der Gesamtimpuls $\underline{P}$ erhalten (1-3).
- Da keine äußeren Drehmomente wirken, bleibt der Gesamtdrehimpuls $\underline{L}$ erhalten (4-6) .
- Der Schwerpunkt des Systems bewegt sich auf einer Geraden durch den Anfangspunkt $\underline{X}_0$ (7-9) .
- Die Konservativität des Systems bedingt die Erhaltung der Gesamtenergie U (10).

Wir wollen nun diese Erhaltungssätze vermittels des Noether-Theorems mit den im System enthaltenen Symmetrien in Verbindung bringen.

3.3.1 Translationsinvarianz und Impulserhaltung

Das System wird einer räumlichen Translation um den Vektor $\epsilon \underline{d}$ unterworfen, also

$$\underline{x}_\nu \rightarrow \underline{\tilde{x}}_\nu = \underline{x}_\nu + \epsilon \underline{d} \tag{III.271}$$

mit $\underline{d} = const$ und o.B.d.A. $|\underline{d}| = 1$. Somit lesen wir ab

$$\delta \underline{x}_\nu = \underline{d} \quad , \quad \nu = 1, ..., N \quad . \tag{III.272}$$

Außerdem gilt $\delta t = 0$. Man sieht leicht, daß die Lagrange-Funktion invariant unter dieser Translation ist, denn

$$\underline{\dot{\tilde{x}}}_\nu = \underline{\dot{x}}_\nu \tag{III.273}$$

und damit

$$\tilde{T} = T \quad . \tag{III.274}$$

Zudem ist

$$\underline{\tilde{x}}_\nu - \underline{\tilde{x}}_\mu = \underline{x}_\nu - \underline{x}_\mu \tag{III.275}$$

und damit

$$\tilde{V} = V. \tag{III.276}$$

Folglich erhält man für R

$$d_t R = \tilde{L} - L = 0 \tag{III.277}$$

und wir können

$$R = 0 \tag{III.278}$$

wählen. $\tilde{L}$ steht hierbei als Abkürzung für $L(\underline{\tilde{x}}_\nu, \underline{\dot{\tilde{x}}}_\nu)$. Die hier auftretende Integrationskonstante fällt ohnehin wieder weg.

Dann berechnet sich das erste Integral zu

$$I = \sum_{\mu=1}^{N} \partial_{\underline{\dot{x}}_\mu} L \cdot \underline{d} = \sum_{\mu=1}^{N} m_\mu \underline{\dot{x}}_\mu \cdot \underline{d} = \underline{P} \cdot \underline{d} \quad . \tag{III.279}$$

Die Gesamtimpulskomponente in $\underline{d}$-Richtung ist Erhaltungsgröße.

Da Translationsinvarianz für alle $\underline{d}$-Richtungen vorliegt, ist der Gesamtimpuls $\underline{P}$ vektoriell erhalten .

3.3.2 Rotationsinvarianz und Drehimpulserhaltung

Das System wird einer Rotation unterworfen:

$$\underline{x}_\nu \rightarrow \underline{\tilde{x}}_\nu = \underline{\underline{D}}\,\underline{x}_\nu \quad , \tag{III.280}$$

wobei wir mit $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}(\epsilon)$ die Matrix bezeichnen wollen, die eine Drehung um den Winkel ϵ beschreibt. Für $\epsilon = 0$ ist somit

$$\underline{\underline{D}}(\epsilon = 0) = \underline{\underline{I}} \quad , \tag{III.281}$$

wobei $\underline{\underline{I}}$ die Einheitsmatrix darstellt .

Reihenentwicklung führt zu

$$\underline{\tilde{x}}_\nu = \underline{\underline{I}}\,\underline{x}_\nu + d_\epsilon \underline{\underline{D}}\Big|_{\epsilon=0} \epsilon \underline{x}_\nu + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad . \tag{III.282}$$

Hieraus lesen wir ab

$$\delta \underline{x}_\nu = d_\epsilon \underline{\underline{D}}\Big|_{\epsilon=0} \underline{x}_\nu \equiv \underline{\underline{\Omega}}\,\underline{x}_\nu \quad . \tag{III.283}$$

Außerdem ist $\delta t = 0$. Die Lagrange-Funktion ist unter der Drehung $\underline{\underline{D}}$ invariant, denn es gilt

$$\underline{\dot{\tilde{x}}}_\nu^2 = \underline{\dot{\tilde{x}}}_\nu^T \cdot \underline{\dot{\tilde{x}}}_\nu = \underline{\dot{x}}_\nu^T \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{D}}\,\underline{\dot{x}}_\nu = \underline{\dot{x}}_\nu^T \underline{\dot{x}}_\nu = \underline{\dot{x}}_\nu^2 \tag{III.284}$$

und

$$\left|\underline{\tilde{x}}_\mu - \underline{\tilde{x}}_\nu\right| = \left|\underline{\underline{D}}\,\underline{x}_\mu - \underline{\underline{D}}\,\underline{x}_\nu\right| = \left|\underline{\underline{D}}\left(\underline{x}_\mu - \underline{x}_\nu\right)\right| \quad . \tag{III.285}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, daß die Matrix $\underline{\underline{D}}$ orthogonal ist. R ist somit ebenfalls zu 0 zu wählen.

Nun wollen wir $\delta \underline{x}_\nu$ bzw. $\underline{\underline{\Omega}}$ etwas genauer betrachten. Wegen

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{I}} &= \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{D}} && \text{(III.286)}\\
&= \left(\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\Omega}}^T \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right)\left(\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\Omega}}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) && \text{(III.287)}\\
&= \underline{\underline{I}} + \left(\underline{\underline{\Omega}}^T + \underline{\underline{\Omega}}\right)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) && \text{(III.288)}
\end{aligned}$$

folgt

$$\underline{\underline{\Omega}}^T + \underline{\underline{\Omega}} = 0 \quad , \quad \underline{\underline{\Omega}}^T = -\underline{\underline{\Omega}} \quad . \tag{III.289}$$

Also sind nur die Nichtdiagonalelemente von $\underline{\underline{\Omega}}$ zu besetzen. Wir schreiben

$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{III.290}$$

Folglich gilt die Darstellung

$$\delta \underline{x}_\nu = \underline{\underline{\Omega}}\, \underline{x}_\nu = \underline{\omega} \times \underline{x}_\nu \tag{III.291}$$

mit

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad . \tag{III.292}$$

Das erste Integral ergibt sich somit zu

$$\begin{aligned} I &= \sum_{\mu=1}^{N} \partial_{\dot{\underline{x}}_\mu} L\, \delta \underline{x}_\mu && \text{(III.293)} \\ &= \sum_{\mu=1}^{N} m_\mu \dot{\underline{x}}_\mu \left(\underline{\omega} \times \underline{x}_\mu\right) && \text{(III.294)} \\ &= \sum_{\mu=1}^{N} m_\mu \underline{\omega} \left(\underline{x}_\mu \times \dot{\underline{x}}_\mu\right) && \text{(III.295)} \\ &= \underline{\omega} \cdot \underline{L} \quad . && \text{(III.296)} \end{aligned}$$

Demnach ist die Komponente des Drehimpulses in Richtung von $\underline{\omega}$ eine Erhaltungsgröße. Da $\underline{\omega}$ beliebig ist, bedingt die Invarianz der Lagrange-Funktion L die Erhaltung des Gesamtdrehimpulses $\underline{L}$.

3.3.3 Galilei-Invarianz und Schwerpunktsatz

Das System wird einer Galilei-Transformation unterworfen, wobei wir die Transformationsgeschwindigkeit in der Form $\epsilon \underline{v}$ schreiben:

$$\underline{x}_\nu \to \tilde{\underline{x}}_\nu = \underline{x}_\nu + \epsilon \underline{v} t \quad . \tag{III.297}$$

Mit $\delta \underline{x}_\nu = \underline{v} t$ und $\delta t = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} d_t R &= L(\tilde{\underline{x}}_\nu, \dot{\tilde{\underline{x}}}_\nu) - L(\underline{x}_\nu, \dot{\underline{x}}_\nu) && \text{(III.298)} \\ &= \sum_{\mu=1}^{N} \frac{m_\mu}{2} \left\{ \left(\dot{\underline{x}}_\mu + \epsilon \underline{v}\right)^2 - \dot{\underline{x}}_\mu^2 \right\} && \text{(III.299)} \\ &= \sum_{\mu=1}^{N} m_\mu \left(\dot{\underline{x}}_\mu \underline{v} \cdot \epsilon + \frac{1}{2} \underline{v}^2 \epsilon^2 \right) \quad . && \text{(III.300)} \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} d_t d_\epsilon R|_{\epsilon=0} &= \sum_{\mu=1}^{N} m_\mu \dot{\underline{x}}_\mu \underline{v} && \text{(III.301)} \\ \Rightarrow d_\epsilon R|_{\epsilon=0} &= \sum_{\mu=1}^{N} m_\mu \underline{x}_\mu \underline{v} \quad . && \text{(III.302)} \end{aligned}$$

Die auftretende Integrationskonstante wurde o.B.d.A. Null gesetzt. Es folgt das erste Integral

$$\begin{aligned} I &= \sum_{\mu=1}^{N} m_\mu \underline{\dot{x}}_\mu \underline{v} t - \sum_{\mu=1}^{N} m_\mu \underline{x}_\mu \underline{v} && \text{(III.303)} \\ &= \left(\underline{P} t - \underline{X}\right) \underline{v} \quad . && \text{(III.304)} \end{aligned}$$

Also ist die Komponente von $\underline{P}t - \underline{X}$ in Richtung von $\underline{v}$ eine Erhaltungsgröße. Da die Richtung von $\underline{v}$ beliebig gewählt werden kann, ist

$$\underline{P}t - \underline{X} \tag{III.305}$$

eine Erhaltungsgröße. Wir schreiben

$$\underline{P}t - \underline{X} = -\underline{X}_0 \tag{III.306}$$

bzw.

$$\underline{X} = \underline{X}_0 + \underline{P}t \quad . \tag{III.307}$$

Dieses Ergebnis entspricht gerade dem Schwerpunktsatz: In einem abgeschlossenen System führt der Massenmittelpunkt eine gleichförmig geradlinige Bewegung aus. Die Konstante der Bewegung ist die Anfangslage $\underline{X}_0$ des Schwerpunktes.

3.3.4 Zeitliche Translationsinvarianz und Energieerhaltung

Das System wird einer Zeitverschiebung um $\epsilon\tau$ unterworfen, wobei τ eine bestimmte Zeiteinheit ist. Dann folgt:

$$t \to t + \epsilon\tau \tag{III.308}$$

und man liest ab $\delta t = \tau, \delta\underline{x}_\nu = 0$. Die Funktion R verschwindet, da $d_t R = L - L = 0$.

Somit folgt das erste Integral zu

$$\begin{aligned} I &= \left\{ T - V - \sum_{\mu=1}^{N} \partial_{\underline{\dot{x}}_\mu} T \, \underline{\dot{x}}_\mu \right\} \tau && \text{(III.309)} \\ &= \sum_{\mu=1}^{N} \partial_{\underline{\dot{x}}_\mu} L \cdot \underline{\dot{x}}_\mu \tau - \left\{ \sum_{\mu=1}^{N} \frac{m_\mu}{2} \dot{\tilde{\underline{x}}}_\mu^2 - V \right\} \tau && \text{(III.310)} \\ &= \sum_{\mu=1}^{N} \left\{ \frac{m_\mu}{2} \underline{\dot{x}}_\mu^2 - m_\mu \underline{\dot{x}}_\mu \underline{\dot{x}}_\mu \right\} \tau - V\tau && \text{(III.311)} \\ &= -\left\{ \sum_{\mu=1}^{N} \frac{m_\mu}{2} \underline{x}_\mu^2 + V \right\} \tau && \text{(III.312)} \\ &= -(T + V)\,\tau = -U\tau \quad . && \text{(III.313)} \end{aligned}$$

Erhaltungsgröße ist die Gesamtenergie U des Systems .

Bemerkung:
In obiger Ableitung wurde $d_\epsilon R|_{\epsilon=0}$ mit Rückgriff auf die Definition der Symmetrietransformation ausgerechnet. Folgender kürzerer Weg ist ebenfalls möglich:

Totale zeitliche Differentiation von L ergibt

$$d_t L(\underline{x}_\nu, \underline{\dot{x}}_\nu) \sum_{\mu=1}^{N} \left\{ \partial_{\underline{x}_\mu} L \underline{\dot{x}}_\mu + \partial_{\underline{\dot{x}}_\mu} L \underline{\ddot{x}}_\mu \right\} \quad . \tag{III.314}$$

Einarbeitung der LII liefert

$$d_t L = \sum_{\mu=1}^{N} \left\{ d_t \partial_{\underline{\dot{x}}_\mu} L \cdot \underline{\dot{x}}_\mu + \partial_{\underline{\dot{x}}_\mu} L \underline{\ddot{x}}_\mu \right\} \quad ; \tag{III.315}$$

$$d_t L = \sum_{\mu=1}^{N} d_t \left\{ \partial_{\underline{\dot{x}}_\mu} L \cdot \underline{\dot{x}}_\mu \right\} \tag{III.316}$$

bzw.

$$d_t \left\{ \sum_{\mu=1}^{N} \left(\partial_{\underline{\dot{x}}_\mu} L \cdot \underline{\dot{x}}_\mu - L \right) \right\} = 0 \quad ; \tag{III.317}$$

$$d_t \left\{ \sum_{\mu=1}^{N} \partial_{\underline{\dot{x}}_\mu} L \cdot \underline{\dot{x}}_\mu \tau - L\tau \right\} = 0 \quad . \tag{III.318}$$

Vergleich mit dem Noether-Theorem unter Benutzung von

$$\delta \underline{x}_\mu = \underline{\dot{x}}_\mu \cdot \tau \tag{III.319}$$

ergibt

$$d_\epsilon R|_{\epsilon=0} = L \cdot \tau \quad . \tag{III.320}$$

Diese Formulierung gilt für alle Systeme mit einer Lagrange-Funktion der Form $L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha)$.

3.3.5 Zusammenfassung

Für ein abgeschlossenes System sind die Erhaltungsgrößen und ihr Zusammenhang mit der jeweiligen Symmetrieoperation in der Tabelle zusammengefaßt.

Symmetrietransformation	Erhaltungsgröße
räumliche Translation	Gesamtimpuls
räumliche Drehung	Gesamtdrehimpuls
Galilei-Transformation	Anfangslage des Schwerpunktes
zeitliche Translation	Gesamtenergie

Kapitel IV

Hamiltonsche Mechanik

Bisher haben wir die Newtonschen Prinzipien und das d'Alembertsche Prinzip kennengelernt. Daraus folgten die Lagrangeschen Gleichungen 1. und 2. Art, mit denen sowohl freie Systeme als auch Systeme mit Nebenbedingungen zu behandeln waren.

Wir lernen jetzt das Hamiltonsche Prinzip kennen, werden dieses aber nicht als weiteres Axiom betrachten. Es wird sich als äquivalent zu den bisherigen Prinzipien erweisen, obwohl der Ausgangspunkt völlig verschieden ist.

1 Hamiltonsches Prinzip

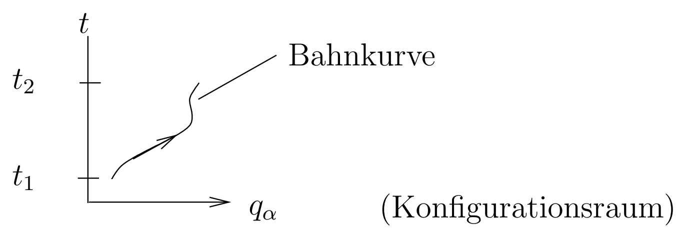
Ausgangspunkt ist die Lagrange-Funktion

$$L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) \tag{IV.1}$$

des betrachteten Massenpunktsystems in den f generalisierten Koordinaten q_α und den f generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{q}_\alpha$.

Konfigurationsraum:

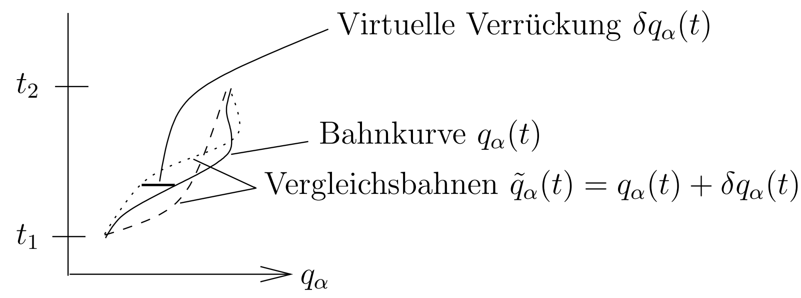
Der von f generalisierten Koordinaten q_α aufgespannte Raum heißt Konfigurationsraum. Die Dynamik des Massenpunktsystems wird dann durch eine Kurve $q_\alpha(t)\,,\ \alpha = 1, \ldots, f$ - genannt Bahnkurve - im Konfigurationsraum charakterisiert.



Vergleichsbahnen:

Wird die vom Massenpunktsystem im Zeitintervall $t_1 \le t \le t_2$ durchlaufene Bahnkurve $q_\alpha(t)$ virtuell verrückt, gelangt man zu einer s.g. Vergleichsbahn $\tilde{q}_\alpha(t) = q_\alpha(t) + \delta q_\alpha(t)$. Die Verrückungen bei t_1 und t_2 müssen allerdings verschwinden, d.h.

$$\delta q_\alpha(t_1) = \delta q_\alpha(t_2) = 0. \tag{IV.2}$$



Wirkung:

Die Größe

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t), t)\, dt \tag{IV.3}$$

heißt Wirkung (auch Wirkungsfunktion oder Prinzipalfunktion). Die Dimension der Wirkung ist offensichtlich

$$[S] = [U] \cdot [t] = \text{Js}. \tag{IV.4}$$

Man vergleiche mit dem Planckschen Wirkungsquantum

$$\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34}\,\text{Js}.$$

Die Wirkung kann sowohl entlang der Bahnkurve $q_\alpha(t)$ berechnet werden als auch entlang der Vergleichsbahnen $\tilde{q}_\alpha(t)$. Die Wirkung entlang verschiedener Bahnen wird i.a. natürlich verschieden sein.

Nach diesen Vorbereitungen sind wir in der Lage, das Hamiltonsche Prinzip zu formulieren. Es besagt, daß sich die Bahnkurve des Systems gegenüber den Vergleichsbahnen dadurch auszeichnet, daß die Wirkung extremal wird. Meist ist das Extremum ein Minimum, weshalb das Hamiltonsche Prinzip auch das Prinzip der kleinsten Wirkung genannt wird. Also gilt dann:

$$S = \text{Minimum}. \tag{IV.5}$$

Man schreibt auch

$$\delta S = 0, \tag{IV.6}$$

da die Variation von S an ihrem Extremum verschwindet.

Wir zeigen nun, daß das Hamiltonsche Prinzip die Lagrangeschen Gleichungen 2. Art liefert - ebenso wie das d'Alembertsche Prinzip. Die Lagrange-Funktion für die Vergleichsbahnen ergibt

$$\begin{aligned} L(\tilde{q}_\alpha, \dot{\tilde{q}}_\alpha, t) &= L(q_\alpha + \delta q_\alpha, \dot{q}_\alpha + \delta \dot{q}_\alpha, t) && \text{(IV.7)} \\ &= L(q_\alpha, \delta \dot{q}_\alpha, t) + \sum_{\beta=1}^{f} (\partial_{q_\beta} L \cdot \delta q_\beta + \partial_{\dot{q}_\beta} L \cdot \delta \dot{q}_\beta). && \text{(IV.8)} \end{aligned}$$

Für die Differenz der Wirkungen der tatsächlichen Bahnkurve und der Vergleichsbahnen folgt

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \{L(\tilde{q}_\alpha, \dot{\tilde{q}}_\alpha, t) - L(q_\alpha, \delta \dot{q}_\alpha, t)\}\, dt && \text{(IV.9)} \\ \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\beta=1}^{f} (\partial_{q_\beta} L \cdot \delta q_\beta + \partial_{\dot{q}_\beta} L \cdot \delta \dot{q}_\beta)\, dt. && \text{(IV.10)} \end{aligned}$$

Partielle Integration des rechten Terms im Integral liefert

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\beta=1}^{f} (\partial_{q_\beta} L \cdot \delta q_\beta - d_t \partial_{\dot{q}_\beta} L \cdot \delta q_\beta)\, dt + \sum_{\beta=1}^{f} \partial_{\dot{q}_\beta} L \, \delta q_\beta |_{t_1}^{t_2}. \tag{IV.11}$$

Da die virtuellen Verrückungen bei t_1 und t_2 verschwinden müssen, verbleibt

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\beta=1}^{f} \left(\partial_{q_\beta} L - d_t \partial_{\dot{q}_\beta} L\right)\, \delta q_\beta)\, dt. \tag{IV.12}$$

Das Hamiltonsche Prinzip fordert nun, daß die Variation der Wirkung verschwindet, also

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\beta=1}^{f} (\partial_{q_\beta} L - d_t \partial_{\dot{q}_\beta} L)\, \delta q_\beta)\, dt = 0. \tag{IV.13}$$

Da für $t_1 < t < t_2$ die virtuellen Verrückungen $\delta q_\beta(t)$ frei sind, folgen zwangsläufig die Lagrangeschen Gleichungen 2. Art

$$\partial_{q_\beta} L - d_t \partial_{\dot{q}_\beta} L = 0. \tag{IV.14}$$

Bemerkung:

1. Das Hamiltonsche Prinzip ordnet sich ein in weitere Extremalprinzipien, die in der Mathematik und Physik betrachtet werden. Vom mathematischen Standpunkt aus gesehen handelt es sich um ein s.g. Variationsproblem: Eine bestimmte Größe soll extremal werden, wenn gewisse Parameter variiert werden.

   Beispiele:

   - Oberfläche einer Seifenhaut zwischen Rändern eingespannt wird immer minimal (vgl. ÜA); variiert wird die Form.
   - Der Lichtweg zwischen zwei Punkten stellt sich so ein, daß das Photon die kürzeste Zeit braucht (Fermatsches Prinzip).

2. Die Zuordnung der in der Physik geprägten Sprechweise zur mathematischen Begriffswelt ist in der Tabelle zusammengefaßt.

Physik	Mathematik
Hamiltonsche Mechanik	Variationsrechnung
Hamiltonsches Prinzip	Extremalprinzip
Lagrangschee Gleichungen 2. Art	Fundamentallemma der Variationsrechnung oder Eulersche Gleichungen der Variationsrechnung

2 Äquivalenz des d'Alembertschen und Hamiltonschen Prinzips

Im vorhergehenden Abschnitt IV.1 wurde gezeigt, daß sich d'Alembertsches und Hamiltonsches Prinzip zumindest bei den Lagrangeschen Gleichungen 2. Art treffen. Jetzt soll das Hamiltonsche

Prinzip aus dem d'Alembertschen Prinzip abgeleitet werden. Dabei wird deutlich werden, daß das d'Alembertsche Prinzip einer *differentiellen* Formulierung und das Hamiltonsche Prinzip einer *integralen* Formulierung entspricht.

Wir gehen vom d'Alembertschen Prinzip aus,

$$\sum_{\nu=1}^{N}(m_\nu\,\ddot{\underline{x}}_\nu - \underline{F}_\nu)\,\delta\underline{x}_\nu = 0. \tag{IV.15}$$

Aus Gleichung (III.97) übernehmen wir die Beziehung

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\,\ddot{\underline{x}}_\nu\,\delta\underline{x}_\nu &= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\,\ddot{\underline{x}}_\nu \sum_{\alpha=1}^{f}\partial_{q_\alpha}\underline{x}_\nu\cdot\delta q_\alpha &\text{(IV.16)}\\ &= \sum_{\alpha=1}^{f}(d_t\,\partial_{\dot{q}_\alpha}T - \partial_{q_\alpha}T)\,\delta q_\alpha &\text{(IV.17)}\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{N}\underline{F}_\nu\,\delta\underline{x}_\nu &= -\sum_{\nu=1}^{N}\partial_{\underline{x}_\nu}V\cdot\delta\underline{x}_\nu &\text{(IV.18)}\\ &= -\sum_{\nu=1}^{N}\partial_{\underline{x}_\nu}V\cdot\sum_{\alpha=1}^{f}\partial_{q_\alpha}\underline{x}_\nu\cdot\delta q_\alpha &\text{(IV.19)}\\ &= -\sum_{\alpha=1}^{f}\partial_{q_\alpha}V\,\delta q_\alpha. &\text{(IV.20)}\end{aligned}$$

Beides mit dem d'Alembertschen Prinzip verbunden ergibt

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{N}(m_\nu\,\ddot{\underline{x}}_\nu - \underline{F}_\nu)\,\delta\underline{x}_\nu &= \sum_{\alpha=1}^{f}(d_t\,\partial_{\dot{q}_\alpha}T - \partial_{q_\alpha}T + \partial_{q_\alpha}L)\,\delta q_\alpha &\text{(IV.21)}\\ &= \sum_{\alpha=1}^{f}(d_t\,\partial_{\dot{q}_\alpha}L - \partial_{q_\alpha}L)\,\delta q_\alpha = 0, &\text{(IV.22)}\end{aligned}$$

woraus bekanntlich L II folgte. Jetzt formen wir die rechte Seite weiter um, indem wir

$$d_t\,\partial_{\dot{q}_\alpha}L\,\delta q_\alpha = d_t\,(\partial\dot{q}_\alpha L\cdot\delta q_\alpha) - \partial_{\dot{q}_\alpha}L\cdot\delta\dot{q}_\alpha \tag{IV.23}$$

schreiben und folglich die rechte Seite des d'Alembertschen Prinzips umformen zu

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{f}\{d_t\,(\partial_{\dot{q}_\alpha}L\,\cdot\,\delta q_\alpha) - \partial_{\dot{q}_\alpha}L\cdot\delta\dot{q}_\alpha - \partial_{q_\alpha}L\,\delta q_\alpha\} &= 0 &\text{(IV.24)}\\ \sum_{\alpha=1}^{f}d_t\,(\partial_{\dot{q}_\alpha}L\,\delta q_\alpha) - [L(\tilde{q}_\beta,\dot{\tilde{q}}_\beta,t) - L(q_\beta,\dot{q}_\beta,t)] &= 0. &\text{(IV.25)}\end{aligned}$$

Die Differenz der Lagrange-Funktionen wollen wir mit

$$\delta L = L(\tilde{q}_\beta,\dot{\tilde{q}}_\beta,t) - L(q_\beta,\dot{q}_\beta,t) \tag{IV.26}$$

abkürzen und schreiben damit

$$\delta L = \sum_{\alpha=1}^{f}d_t\,(\partial_{\dot{q}_\alpha}L\,\delta q_\alpha). \tag{IV.27}$$

Integration ergibt

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt = \sum_{\alpha=1}^{f} \partial_{\dot{q}_\alpha} L \cdot \delta q_\alpha \big|_{t_1}^{t_2} = 0, \tag{IV.28}$$

da voraussetzungsgemäß gilt

$$\delta q_\alpha(t_1) = \delta q_\alpha(t_2) = 0. \tag{IV.29}$$

Die linke Seite kann auch geschrieben werden als

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L \, dt = 0, \tag{IV.30}$$

da δL einer Differenz entspricht. Somit erhalten wir die Aussage des Hamiltonschen Prinzips

$$\delta S = 0. \tag{IV.31}$$

3 Hamiltonsche Gleichungen

3.1 Ableitung aus den Lagrangeschen Gleichungen 2. Art

Wir haben kennengelernt, daß die Dynamik eines Massenpunktsystems durch die Lagrange-Funktion beherrscht wird. Die Lagrange-Funktion hängt von den generalisierten Koordinaten q_α, den generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{q}_\alpha$ und der Zeit t ab, also

$$L = L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t). \tag{IV.32}$$

Die Lagrangeschen Gleichungen 2. Art liefern f gekoppelte gewöhnliche Dgln. 2. Ordnung für die q_α. Die Lösung führt auf eine Bahnkurve $q_\alpha(t)$, für die die Wirkung S extremal ist.

Für bestimmte Aufgaben ist es zweckmäßig, nicht die generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{q}_\alpha$, sondern die generalisierten Impulse

$$p_\alpha = \partial_{\dot{q}_\alpha} L \quad , \quad \alpha = 1, 2, \ldots, f \tag{IV.33}$$

zu verwenden. Mit dieser angestrebten Ersetzung

$$\dot{q}_\alpha \to p_\alpha \tag{IV.34}$$

ist es aber auch zweckmäßig, die Lagrange-Funktion L durch eine transformierte Systemfunktion $H(q_\alpha, p_\alpha, t)$ zu ersetzten, d.h.

$$L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) \to H(q_\alpha, p_\alpha, t). \tag{IV.35}$$

Dazu wird die Hamilton-Funktion

$$H(q_\alpha, p_\alpha, t) = \sum_{\beta=1}^{f} \dot{q}_\beta \, p_\beta - L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) \tag{IV.36}$$

eingeführt. Die $\dot{q}_\alpha$ auf der rechten Seite sind durch die p_α auszudrücken. Das wird durch Auflösen der Gleichung

$$p_\alpha = \partial_{\dot{q}_\alpha} L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) \tag{IV.37}$$

nach den $\dot{q}_\alpha$, d.h.

$$\dot{q}_\alpha = \dot{q}_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, t), \tag{IV.38}$$

erreicht.

Nun ist abzuleiten, in welche Gleichungen die L II durch die vorgenommene Transformationen übergehen. Dazu führen wir folgende Rechnung durch. Das totale Differential der Lagrange-Funktion lautet

$$dL = \sum_{\beta=1}^{f} (\partial_{q_\beta} L\, dq_\beta + \partial_{\dot{q}_\beta} L\, d\dot{q}_\beta) + \partial_t L\, dt. \tag{IV.39}$$

Wir ersetzen

$$\begin{aligned} \partial_{\dot{q}_\beta} L &= p_\beta & \text{(IV.40)} \\ \partial_{q_\beta} L &= d_t\, \partial_{\dot{q}_\beta} L = d_t\, p_\beta = \dot{p}_\beta & \text{(IV.41)} \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} dL &= \sum_{\beta=1}^{f} (\dot{p}_\beta\, dq_\beta + p_\beta\, d\dot{q}_\beta) + \partial_t L\, dt & \text{(IV.42)} \\ dL &= \sum_{\beta=1}^{f} [\dot{p}_\beta\, dq_\beta + d(p_\beta\, \dot{q}_\beta) - \dot{q}_\beta\, dp_\beta] + \partial_t L\, dt & \text{(IV.43)} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} d(\sum_{\beta=1}^{f} p_\beta\, \dot{q}_\beta - L) &= \sum_{\beta=1}^{f} (-\dot{p}_\beta\, dq_\beta + \dot{q}_\beta\, dp_\beta) - \partial_t L dt & \text{(IV.44)} \\ dH &= \sum_{\beta=1}^{f} (-\dot{p}_\beta\, dq_\beta + \dot{q}_\beta\, dp_\beta) - \partial_t L dt & \text{(IV.45)} \end{aligned}$$

Damit wurde aus dem totalen Differential von L unter Verwendung der generalisierten Impulse p_α und der L II ein Ausdruck für das totale Differential von $H(q_\alpha, p_\alpha, t)$ gefunden. Andererseits läßt sich das totale Differential von H auch unmittelbar ausrechnen zu

$$dH = \sum_{\beta=1}^{f} (\partial_{q_\beta} H \cdot dq_\beta + \partial_{p_\beta} H\, dp_\beta) + \partial_t H\, dt. \tag{IV.46}$$

Da beide Ausdrücke für dH gleich sein müssen, folgt durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} \dot{p}_\alpha &= -\partial_{q_\alpha} H \quad , \quad \alpha = 1, \ldots, f, & \text{(IV.47)} \\ \dot{q}_\alpha &= \partial_{p_\alpha} H \quad , \quad \alpha = 1, \ldots, f, & \text{(IV.48)} \\ \partial_t L &= -\partial_t H \quad . & \text{(IV.49)} \end{aligned}$$

Die ersten beiden Gleichungssätze heißen Hamiltonsche Gleichungen oder auch kanonische Gleichungen. Sie bilden ein System von $2f$ gekoppelten gewöhnlichen Dgln. 1. Ordnung für die Unbekannten $q_\alpha(t)$ und $p_\alpha(t)$. Sie sind äquivalent den L II, die f gekoppelte gewöhnliche Dgln. 2. Ordnung darstellen.

3.2 Ableitung aus dem Hamiltonschen Prinzip

Die Hamiltonschen Gleichungen können auch direkt aus dem Hamiltonschen Prinzip ohne Benutzung von L II abgeleitet werden. Zur Übung sei diese Rechnung vorgeführt:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt \tag{IV.50}$$

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{\beta=1}^{f} p_\beta\, \dot{q}_\beta - H(q_\alpha, p_\alpha, t) \right] dt \tag{IV.51}$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{\beta=1}^{f} (\delta p_\beta\, \dot{q}_\beta + p_\beta\, \delta\dot{q}_\beta - \partial_{q_\beta} H\, \delta q_\beta - \partial_{p_\beta} H\, \delta p_\beta) \right] dt \tag{IV.52}$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[d_t \sum_{\beta=1}^{f} (p_\beta\, \delta q_\beta) + \sum_{\beta=1}^{f} (\delta p_\beta\, \dot{q}_\beta - \dot{p}_\beta\, \delta q_\beta - \partial_{q_\beta} H\, \delta q_\beta - \partial_{p_\beta} H\, \delta p_\beta) \right] dt \tag{IV.53}$$

$$\delta S = \sum_{\beta=1}^{f} p_\beta\, \delta q_\beta \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\beta=1}^{f} [(\dot{q}_\beta - \partial_{p_\beta} H)\, \delta p_\beta - (\dot{p}_\beta + \partial_{q_\beta} H)\, \delta q_\beta]\, dt \tag{IV.54}$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\beta=1}^{f} [(\dot{q}_\beta - \partial_{p_\beta} H)\, \delta p_\beta - (\dot{p}_\beta + \partial_{q_\beta} H)\, \delta q_\beta]\, dt. \tag{IV.55}$$

Nun muß nach dem Hamiltonschen Prinzip für beliebige virtuelle Verrückungen der generalisierten Koordinaten und Impulse die Variation der Wirkung verschwinden. Somit folgen aus

$$\delta S = 0 \tag{IV.56}$$

die Hamiltonschen Gleichungen

$$\dot{q}_\alpha = \partial_{p_\alpha} H \quad , \quad \dot{p}_\alpha = -\partial_{q_\alpha} H. \tag{IV.57}$$

<u>Bemerkung:</u>

In mathematischer Sprechweise entspricht der Übergang $L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) \to H(q_\alpha, p_\alpha, t)$ einer Legendre-Transformation. Diese Transformationen werden in der Thermodynamik-Vorlesung eine wichtige Rolle spielen, da der Übergang zwischen den thermodynamischen Potentialen durch sie vermittelt wird.

<u>Beispiel:</u>

System gekoppelter harmonischer Oszillatoren ohne Nebenbedingungen mit

$$T = \sum_\beta \frac{m}{2}\, \dot{q}_\beta^2 = \sum_\beta \frac{1}{2m}\, p_\beta^2 \tag{IV.58}$$

$$V = \sum_\beta \frac{k}{2}\, q_\beta^2. \tag{IV.59}$$

Als die generalisierten Koordinaten und Impulse können hier die ursprünglichen kartesischen Koordinaten und Impulse betrachtet werden. Es folgt:

$$H = T + V = \sum_\beta (\frac{1}{2m}\, p_\beta^2 + \frac{k}{2} q_\beta^2), \tag{IV.60}$$

$$\dot{p}_\alpha = -\partial_{q_\alpha} H = -k\, q_\alpha, \tag{IV.61}$$

$$\dot{q}_\alpha = \partial_{p_\alpha} H = \frac{1}{m}\, p_\alpha. \tag{IV.62}$$

Einsetzen der ersten in die zweite Gleichung ergibt

$$\ddot{q}_\alpha = -\frac{k}{m} q_\alpha \quad \text{bzw.} \quad \ddot{q}_\alpha + \omega_0^2\, q_\alpha = 0 \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \tag{IV.63}$$

Zum Vergleich schreiben wir L II auf:

$$L = T - V = \sum_\beta (\frac{m}{2}\, \dot{q}_\beta^2 - \frac{k}{2}\, q_\beta^2) \tag{IV.64}$$

$$d_t\, \partial_{\dot{q}_\alpha} L - \partial_{q_\alpha} L = m\, \ddot{q}_\alpha + k\, q_\alpha = 0. \tag{IV.65}$$

Natürlich erhalten wir das gleiche Ergebnis.

3.3 Interpretation der Hamilton-Funktion

Die Hamilton-Funktion hat die Dimension einer Energie, da

$$H = \sum_\beta \dot{q}_\beta \partial_{\dot{q}_\beta} L - L = \sum_\beta \dot{q}_\beta \partial_{\dot{q}_\beta} L - T + V \quad . \tag{IV.66}$$

H steht sogar in engerem Zusammenhang mit der Energie. Um dies zu erkennen, bilden wir zunächst die totale zeitliche Ableitung:

$$d_t H = d_t \left\{ \sum_\beta \dot{q}_\beta \partial_{\dot{q}_\beta} L - L \right\} \quad ; \tag{IV.67}$$

$$d_t H = d_t \left\{ \sum_\beta \dot{q}_\beta \partial_{\dot{q}_\beta} T - T + V \right\} \quad . \tag{IV.68}$$

Bei den folgenden Überlegungen beschränken wir uns auf skleronome Nebenbedingungen,

$$g_k(\underline{x}_\nu) = 0 \quad \text{(keine explizite Zeitabhängigkeit)} \quad . \tag{IV.69}$$

Somit existieren Transformationsgleichungen der Gestalt

$$\underline{x}_\nu = \underline{x}_\nu(q_\alpha) \quad , \tag{IV.70}$$

und die totale Ableitung

$$\dot{\underline{x}}_\nu = \sum_\alpha \partial_{q_\alpha} \underline{x}_\nu \cdot \dot{q}_\alpha \quad . \tag{IV.71}$$

ist nicht explizit zeitabhängig.

Auch die kinetische Energie T weist damit keine explizite Zeitabhängigkeit auf:

$$T = \sum_\nu \frac{m_\nu}{2} \dot{\underline{x}}_\nu^2 = \sum_\nu \frac{m_\nu}{2} \left(\sum_\alpha \partial_{q_\alpha} \underline{x}_\nu \cdot \dot{q}_\alpha \right)^2 \quad . \tag{IV.72}$$

Die kinetische Energie ist also eine *homogene quadratische Funktion* der generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{q}_\alpha$. Es läßt sich also der Satz von Euler über homogene Funktionen anwenden (vgl. Abschnitt 4.5 in Kapitel II):

$$\sum_\beta \dot{q}_\beta \cdot \partial_{\dot{q}_\beta} T = 2T \quad . \tag{IV.73}$$

Somit ergibt sich

$$d_t H = d_t\{2T - T + V\} = d_t\{T + V\} = d_t U \quad . \tag{IV.74}$$

Dies bedeutet, daß H unter den angegebenen Bedingungen (Existenz eines Potentials $V(q_\alpha, t)$, skleronome Nebenbedingungen) mit der Gesamtenergie U identifiziert werden kann.

Ein wichtiger Spezialfall sind konservative Systeme. In diesem Fall gilt Energieerhaltung,

$$d_t U = d_t H = 0 \quad \text{, also} \quad U = const \quad . \tag{IV.75}$$

Nun erweist es sich, daß für die Energieerhaltung bereits ausreichend ist, wenn H nicht explizit von der Zeit abhängt,

$$H = H(q_\alpha, p_\alpha) \quad , \tag{IV.76}$$

denn es gilt generell

$$d_t H = \partial_t H \quad . \tag{IV.77}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} d_t H\,(q_\alpha(t), p_\alpha(t), t) &= \sum_\alpha (\partial_{q_\alpha} H \dot{q}_\alpha + \partial_{p_\alpha} H \dot{p}_\alpha) + \partial_t H & \text{(IV.78)} \\ &= \sum_\alpha (-p_\alpha \dot{q}_\alpha + \dot{q}_\alpha p_\alpha) + \partial_t H & \text{(IV.79)} \\ &= \partial_t H \quad . & \text{(IV.80)} \end{aligned}$$

4 Poisson-Klammern

Die hier einzuführenden Poisson-Klammern überführen die Hamiltonschen-Gleichungen in eine andere Schreibweise. Motiviert ist dies zum einen aus formalen Gründen. Die Hamiltonschen Gleichungen sind zwar sehr ähnlich, jedoch bricht das Vorzeichen die Symmetrie. Die Poisson-Klammern führen auf eine symmetrische Darstellung. Zum anderen ermöglichen die Poisson-Klammern einen sehr eleganten Übergang in die Quantenmechanik. Letztere ist die eigentlich wichtige Motivation für die Einführung der Poisson-Klammern, auch wenn sie im Rahmen der Mechanik-Vorlesung noch keine rechte Würdigung erfahren können.

Poisson-Klammern werden wie folgt eingeführt. A und B seien zwei Funktionen der generalisierten Koordinaten und Impulse und der Zeit, also

$$\begin{aligned} A &= A(q_\alpha, p_\alpha, t), & \text{(IV.81)} \\ B &= B(q_\alpha, p_\alpha, t). & \text{(IV.82)} \end{aligned}$$

Dann wird die Poisson-Klammer $\{A, B\}$ zweier Größen A und B durch

$$\{A, B\} \equiv \sum_{\beta=1}^{f} (\partial_{q_\beta} A \cdot \partial_{p_\beta} B - \partial_{p_\beta} A \cdot \partial_{q_\beta} B) \tag{IV.83}$$

definiert.

Wir bilden nun die totale zeitliche Ableitung einer Größe, z.B. von A. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
d_t A &= \sum_{\beta=1}^{f} (\partial_{q_\beta} A \cdot \dot{q}_\beta + \partial_{p_\beta} A \cdot \dot{p}_\beta) + \partial_t A && \text{(IV.84)} \\
d_t A &= \sum_{\beta=1}^{f} (\partial_{q_\beta} A \, \partial_{p_\beta} H - \partial_{p_\beta} A \, \partial_{q_\beta} H) + \partial_t A && \text{(IV.85)} \\
d_t A &= \{A, H\} + \partial_t A. && \text{(IV.86)}
\end{aligned}
$$

Für $A = q_\alpha$ sowie $A = p_\alpha$ folgen die Hamiltonschen Gleichungen im Poisson-Formalismus zu

$$
\begin{aligned}
\dot{q}_\alpha &= \{q_\alpha, H\}, && \text{(IV.87)} \\
\dot{p}_\alpha &= \{p_\alpha, H\}. && \text{(IV.88)}
\end{aligned}
$$

Setzen wir $A = H$, so folgt die bekannte Relation

$$
d_t H = \{H, H\} + \partial_t H = \partial_t H, \qquad \text{(IV.89)}
$$

da die Poisson-Klammer zweier identischer Größen verschwindet.

Für Poisson-Klammern gelten folgende Regeln:

$$
\begin{aligned}
\{A, B\} &= -\{B, A, \} && \text{(IV.90)} \\
\{(A + B), C\} &= \{A, C\} + \{B, C\} && \text{(IV.91)} \\
\{AB, C\} &= A\,\{B, C\} + \{A, C\}\,B && \text{(IV.92)} \\
\{A, p_\alpha\} &= \partial_{q_\alpha} A && \text{(IV.93)} \\
\{A, q_\alpha\} &= -\partial_{p_\alpha} A && \text{(IV.94)} \\
\{A, \{B, C\}\} &+ \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0 \quad \text{(Jakobi-Identität)} && \text{(IV.95)} \\
\{q_\alpha, p_\beta\} &= \delta_{\alpha\beta} && \text{(IV.96)} \\
\{q_\alpha, q_\beta\} &= \{p_\alpha, p_\beta\} = 0 && \text{(IV.97)} \\
\partial_t \{A, B\} &= \{\partial_t A, B\} + \{A, \partial_t B\} && \text{(IV.98)} \\
d_t \{A, B\} &= \{d_t A, B\} + \{A, d_t B\} \quad \text{(Poisson-Theorem).} && \text{(IV.99)}
\end{aligned}
$$

Den Beweis kann der Leser jeweils leicht selbst erbringen.

5 Kanonische Transformationen

Koordinatensysteme sind von Mathematikern und Physikern eingeführte artifizielle Hilfsmittel. Wirkliche Grundgesetze der Natur sollten imgrunde davon nicht abhängen.

Im Abschnitt II.2.2 “Galileisches Relativitätsprinzip” wurde festgestellt, daß alle Inertialsysteme gleichberechtigt sind, da das Grundgesetz der Mechanik (2. Newtonsches Prinzip) forminvariant ist. In Nichtinertialsystemen treten Trägheitskräfte auf. Werden diese zu den eingeprägten Kräften hinzugezählt, bleibt die Form des Grundgesetzes der Mechanik wiederum invariant.

Im Abschnitt III.2.2 wurden generalisierte Koordinaten q_α eingeführt. Nach ihrer Konstruktion als freie Parameter bei der Auflösung der Gleichungen der Nebenbedingungen nach den ursprünglichen Koordinaten $\underline{x}_\nu$ ist klar, daß die q_α nicht eindeutig bestimmt sind. Eine andere Wahl der generalisierten Koordinaten, also $q'_\alpha = q'_\alpha(q_\alpha)$, ist ebenso gleichberechtigt und alle vorgenommenen Überlegungen und Ableitungen müssen für diese q'_α in gleicher Weise gelten; also insbesondere L

II und die Hamiltonschen Gleichungen.

Ausgehend von diesen Überlegungen wollen wir nach allgemeinen Transformationen

$$q_\alpha, p_\alpha \to q'_\alpha, p'_\alpha \tag{IV.100}$$

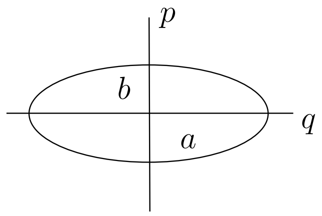
fragen, die die Hamiltonschen Gleichungen forminvariant lassen. Dies leisten gerade die nun zu besprechenden kanonischen Transformationen.

Phasenraum:

Der von den generalisierten Koordinaten q_α und den generalisierten Impulsen p_α aufgespannte $2f$-dimensionale Raum heißt Phasenraum des Massenpunktsystems. Der Konfigurationsraum ist damit ein Teilraum des Phasenraums. Die Bewegung eines Massenpunktsystems ergibt eine Trajektorie im Phasenraum. Eine Parameterdarstellung dieser Trajektorie ist $q_\alpha(t), p_\alpha(t)\,;\ \alpha = 1, \ldots, f$, mit t als Kurvenparameter.

Beispiel:

Phasenraumtrajektorie eines lineraren harmonischen Oszillators: Ellipse



$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2m}\,p^2 + \frac{k}{2}\,q^2 && \text{(IV.101)}\\
\dot p &= -\partial_q H = -k\,q && \text{(IV.102)}\\
\dot q &= \partial_p H = \frac{1}{m}\,p && \text{(IV.103)}\\
\rightsquigarrow q &= a\,\cos\omega_0\,t && \text{(IV.104)}\\
p &= b\,\sin\omega_0\,t && \text{(IV.105)}\\
\omega_0 &= \sqrt{k/m} && \text{(IV.106)}
\end{aligned}$$

Kanonische Transformation:

Kanonische Transformationen sind Transformationen des Phasenraums, die den q_α und p_α in eindeutiger Weise neue Variable

$$\begin{aligned}
q'_\alpha &= q'_\alpha(q_\beta, p_\beta, t) && \text{(IV.107)}\\
p'_\alpha &= p'_\alpha(q_\beta, p_\beta, t) && \text{(IV.108)}
\end{aligned}$$

zuordnen, wobei gilt:

- zu $H(q_\alpha, p_\alpha, t)$ existiert eine neue Hamilton-Funktion $H'(q'_\alpha, p'_\alpha, t)$
- mit $\dot p'_\alpha = -\partial_{q'_\alpha} H' \quad , \quad \dot q'_\alpha = \partial_{p'_\alpha} H$.

Mit anderen Worten, kanonische Transformationen lassen die kanonischen Gleichungen forminvariant.

Konstruktion kanonischer Transformationen:

Wenn sowohl für die q_α, p_α als auch die q'_α, p'_α die Hamiltonschen Gleichungen gelten sollen, dann muß auch das Hamiltonsche Prinzip in beiden Fällen aufschreibbar sein, also

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{\beta=1}^{f} p_\beta\, \dot q_\beta - H(q_\alpha, p_\alpha, t) \right\} dt = 0 \tag{IV.109}$$

sowie

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{\beta=1}^{f} p'_\beta\, \dot q'_\beta - H(q'_\alpha, p'_\alpha, t) \right\} dt = 0. \tag{IV.110}$$

Daraus ist zu schließen, daß sich die Integranden höchstens um eine totale Zeitableitung einer beliebigen Funktion $R(q_\alpha, q'_\alpha, t)$ unterscheiden dürfen, was zu

$$\left\{ \sum_{\beta=1}^{f} p_\beta\, \dot q_\beta - H \right\} - \left\{ \sum_{\beta=1}^{f} p'_\beta\, \dot q'_\beta - H' \right\} = d_t R(q_\alpha, q'_\alpha, t) \tag{IV.111}$$

führt. Wir prüfen

$$\begin{aligned}
& \delta \int_{t_1}^{t_2} d_t R(q_\alpha, q'_\alpha, t)\, dt = \delta [R(q_\alpha, q'_\alpha, t)]_{t_1}^{t_2} && \text{(IV.112)}\\
= \;& \delta[R(q_\alpha(t_2), q'_\alpha(t_2), t_2) - R(q_\alpha(t_1), q'_\alpha(t_1, t_1))] && \text{(IV.113)}\\
= \;& \sum_{\alpha=1}^{f} \{\partial_{q_\alpha} R|_{t_2}\, \delta q_\alpha(t_2) + \partial_{q'_\alpha} R|_{t_2}\, \delta_{q'_\alpha}(t_2) - \partial_{q_\alpha} R|_{t_1}\, \delta q_\alpha(t_1) - \partial_{q'_\alpha} R|_{t_1}\, \delta_{q'_\alpha}(t_1)\} && \text{(IV.114)}\\
= \;& 0
\end{aligned}$$

wegen

$$\delta q_\alpha(t_1) = \delta q_\alpha(t_2) = \delta q'_\alpha(t_1) = \delta q'_\alpha(t_2) = 0. \tag{IV.115}$$

Damit können wir zum einen schreiben

$$d_t R = \sum_{\beta=1}^{f} (p_\beta\, \dot q_\beta - p'_\beta\, \dot q_\beta) - H + H' \tag{IV.116}$$

und zum anderen ist aber auch

$$d_t R = \sum_{\beta=1}^{f} (\partial_{q_\beta} R \cdot \dot q_\beta + \partial_{q'_\beta} R \cdot \dot q'_\beta) + \partial_t R. \tag{IV.117}$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$p_\alpha = \partial_{q_\alpha} R \quad , \quad p'_\alpha = -\partial_{q'_\alpha} R \quad , \quad \alpha = 1, \ldots, f. \tag{IV.118}$$

Diese $2f$ Gleichungen stellen gerade die gesuchten Transformationsgleichungen für den Übergang von den p_α, q_α zu den p'_α, q'_α dar. Die beliebige Funktion $R(q_\alpha, q'_\alpha, t)$ heißt Erzeugende der Transformation.

Auflösen der $2f$ Gleichungen nach q_α, p_α liefert

$$q_\alpha = q_\alpha(q'_\alpha, p'_\alpha, t) \tag{IV.119}$$
$$p_\alpha = p_\alpha(q'_\alpha, p'_\alpha, t). \tag{IV.120}$$

Benutzen wir noch die weitere Beziehung

$$\partial_t R = H' - H \tag{IV.121}$$

die aus obigem Koeffizientenvergleich folgt und setzen $q_\alpha(q'_\beta, p'_\beta, t), p_\alpha(q'_\beta, p'_\beta, t)$ ein, so folgt

$$H'(q'_\alpha, p'_\alpha, t) = H(q_\alpha(q'_\beta, p'_\beta, t), p_\alpha(q'_\beta, p'_\beta, t), t) + \partial_t R(q_\alpha(q'_\beta, p'_\beta, t), q'_\alpha, t). \tag{IV.122}$$

Beispiele:

1.

$$R = \sum_{\beta=1}^{f} q_\beta \, q'_\beta \tag{IV.123}$$
$$\rightsquigarrow p_\alpha = \partial_{q_\alpha} R = q'_\alpha \tag{IV.124}$$
$$p'_\alpha = -\partial_{q'_\alpha} R = -q_\alpha \tag{IV.125}$$

Durch diese kanonische Transformation werden generalisierte Koordinaten und generalisierte Impulse bis auf ein Vorzeichen vertauscht.
Das Beispiel unterstreicht, daß generalisierte Koordinaten und Impulse mit den ursprünglichen Koordinaten und Impulsen nichts mehr zu tun haben. Um sich von den Bezeichnungen "Koordinate" und "Impuls" zu lösen, spricht man bei den q_α, p_α bzw. ebenso bei den q'_α, p'_α jeweils von *kanonisch konjugierten* Variablen.

2. Bewegung als kanonische Transformation
Es ist interssant zu bemerken, daß die Änderung der Größen $q_\alpha(t), p_\alpha(t)$ bei der Bewegung selbst als kanonische Transformation angesehen werden kann. Um dies einzusehen machen wir folgende Überlegung:

Wir betrachten die kanonisch konjugierten Variablen zu zwei verschiedenen Zeiten $t_0 + \tau$ und $t + \tau$. t_0 und t seien fest und τ variabel angenommen. Als Funktion von τ genügen die $q_\alpha(t_0+\tau), p_\alpha(t_0+\tau)$ ebenso wie die $q_\alpha(t+\tau), p_\alpha(t+\tau)$ den kanonischen Bewegungsgleichungen. Demzufolge ist die Transformation

$$q_\alpha(t_0 + \tau)\,,\; p_\alpha(t_0 + \tau) \to q_\alpha(t + \tau)\,,\; p_\alpha(t + \tau) \tag{IV.126}$$

kanonisch. Setzen wir $\tau = 0$, so folgt, daß der Übergang

$$q_\alpha(t_0)\,,\; p_\alpha(t_0) \to q_\alpha(t)\,,\; p_\alpha(t) \tag{IV.127}$$

ebenso eine kanonische Transformation darstellt, denn mit den Umbenennungen

$$q_\alpha(t_0) = q'_\alpha \;\; p_\alpha(t_0) = p'_\alpha \tag{IV.128}$$

entspricht der Übergang formal einer Transformation

$$q'_\alpha\,,\; p'_\alpha \to q_\alpha\,,\; p_\alpha \tag{IV.129}$$

bzw.

$$q_\alpha = q_\alpha(q'_\beta, p'_\beta, t) = q_\alpha(q_\beta(t_0), p_\beta(t_0), t), \tag{IV.130}$$
$$p_\alpha = p_\alpha(q'_\beta, p'_\beta, t) = p_\alpha(q_\beta(t_0), p_\beta(t_0), t). \tag{IV.131}$$

Bemerkung:

Es kann zweckmäßig sein, als Erzeugende nicht eine Funktion der q_α, q'_α zu wählen, sondern eine Kombination anderer alter und neuer kanonisch konjugierter Variablen. So sind auch Erzeugende mit den funktionalen Abhängigkeiten

$$R(q_\alpha, p'_\alpha, t), \tag{IV.132}$$
$$R(p_\alpha, q'_\alpha, t), \tag{IV.133}$$
$$R(p_\alpha, p'_\alpha, t) \tag{IV.134}$$

konstruierbar. Der Übergang von einer Erzeugenden zu einer anderen wird mittels Legendre-Transformation realisiert.

6 Hamilton-Jacobi-Gleichung

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir die kanonischen Transformationen kennengelernt, mit deren Hilfe man die kanonischen Gleichungen von "alten" kanonischen Variablen q_α, p_α auf "neue" kanonische Variablen q'_α, p'_α umschreiben kann. Die alte Hamilton-Funktion H geht dabei in eine neue Hamilton-Funktion H' über. Die kanonische Transformation wird z.B. durch die Erzeugende Funktion $R(q_\alpha, q'_\alpha, t)$ vermittels

$$p_\alpha = \partial_{q_\alpha} R \quad ; \tag{IV.135}$$
$$p'_\alpha = -\partial_{q'_\alpha} R \quad ; \tag{IV.136}$$
$$H' - H = \partial_t R \tag{IV.137}$$

realisiert.

Besonders raffiniert wäre nun gerade eine solche kanonische Transformation, für die die neue Hamilton-Funktion H' verschwindet:

$$H' \stackrel{!}{=} 0 \quad . \tag{IV.138}$$

Dann würden die kanonischen Gleichungen in den neuen kanonischen Variablen q'_α, p'_α nämlich trivial:

$$\dot{p}'_\alpha = -\partial_{q'_\alpha} H' = 0 \quad ; \tag{IV.139}$$
$$\dot{q}'_\alpha = \partial_{p'_\alpha} H' = 0 \quad . \tag{IV.140}$$

Die simple Lösung der Bewegungsgleichungen wäre dann

$$p'_\alpha = const \quad ; \quad q'_\alpha = const \quad . \tag{IV.141}$$

Läßt sich eine solche kanonische Transformation finden? Wie müßte die entsprechende Erzeugende Funktion $R(q_\alpha, q'_\alpha, t)$ aussehen?

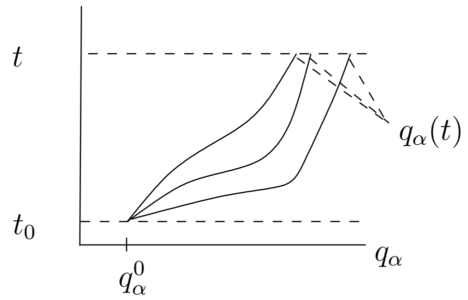
Wir nehmen das Ergebnis der nun folgenden Untersuchung vorweg. Die Wirkung S wird gerade die Rolle der Erzeugenden Funktion R spielen, und die neuen Variablen q'_α, p'_α werden sich als die Anfangsbedingungen

$$q^0_\alpha = q_\alpha(t = t_0) \quad ; \quad p^0_\alpha = p_\alpha(t = t_0) \tag{IV.142}$$

erweisen. Dazu nehmen wir nun folgende Überlegungen vor. Wir wollen die Wirkung S unter etwas anderen Gesichtspunkten untersuchen als beim Hamilton-Prinzip.

Wir betrachten jetzt die Wirkung nur für tatsächliche Bahnkurven; Vergleichsbahnen spielen hier keine Rolle. Stattdessen sollen Bahnkurven - und damit Massenpunktsysteme - unter verschiedenen Anfangsbedingungen untersucht werden.

Die Anfangszeit sei t_0. Die Anfangslage (Anfangskoordinate) ist damit $q_\alpha(t_0)$. Wir betrachten jetzt Bahnkurven, die alle durch diese Anfangslage $q_\alpha^0 = q_\alpha(t_0)$, $\alpha = 1, \dots, f$, gehen, aber verschiedene Endlagen $q_\alpha(t)$ haben. Das ist dann der Fall, wenn die Anfangsgeschwindigkeiten bzw. Anfangsimpulse $p_\alpha(t_0)$ verschieden sind.



Die verschiedenen Endlagen (generalisierte Koordinaten bei t) bezeichnen wir mit $q_\alpha(t)$; einen extra Index, der die verschiedenen Endlagen durchnummeriert, führen wir nicht ein; er wird nicht benötigt. Die Wirkung wird damit abhängig von gerade diesen Endlagen $q_\alpha(t)$, also

$$S = S(q_\alpha(t), t) = \int_{t_0}^{t} L(q_\alpha(\tau), \dot{q}_\alpha(\tau), \tau)\, d\tau. \tag{IV.143}$$

Konkret ausrechnen können wir dieses Integral hier nicht, denn dazu müßten die noch nicht bekannten $q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t)$ in L eingesetzt werden. Wir leiten deshalb eine Differentialgleichung ab, mit der man S berechnen und dabei gleich die Bahnkurve mitbestimmen kann. Totale zeitliche Differentiation der linken Seite liefert

$$d_t S = \sum_{\beta=1}^{f} \partial_{q_\beta} S \cdot \dot{q}_\beta + \partial_t S, \tag{IV.144}$$

und der rechten Seite

$$d_t S = L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t), t). \tag{IV.145}$$

Also folgt

$$\partial_t S + \sum_{\beta=1}^{f} \partial_{q_\beta} S\, \dot{q}_\beta = L. \tag{IV.146}$$

Aus dieser Gleichung sind die generalisierten Geschwindigkeiten zu eliminieren. Dazu ist $\partial_{q_\beta} S$ auszurechnen und zu ersetzen. Partielle Ableitung von S nach den generalisierten Koordinaten q_β bedeutet aber, daß diese Operation bei festgehaltener Zeit t durchzuführen ist. Dazu ermitteln wir die Änderung von S bei festgehaltener Zeit. Es ist mathematisch exakt dafür wieder δS und δq_β zu schreiben, ohne daß jetzt jedoch Vergleichsbahnen im Spiel sind; insbesondere ist jetzt $\delta q_\beta(t) \neq 0$. Dann gilt zum einen

$$\delta S = \sum_{\beta=1}^{f} \partial_{q_\beta} S \cdot \delta q_\beta \tag{IV.147}$$

und zum anderen

$$\delta S = \int_{t_0}^{t} \delta L \, d\tau = \int_{t_0}^{t} \sum_{\beta=1}^{f} (\partial_{q_\beta} L \, \delta q_\beta + \partial_{\dot{q}_\beta} L \, \delta \dot{q}_\beta) \, d\tau, \tag{IV.148}$$

$$\delta S = \int_{t_0}^{t} \sum_{\beta=1}^{f} \{(\partial_{q_\beta} L - d_\tau \, \partial_{\dot{q}_\beta} L) \, \delta q_\beta + d_\tau (\partial_{\dot{q}_\beta} L \, \delta q_\beta)\} \, d\tau. \tag{IV.149}$$

Einarbeitung von L II liefert

$$\delta S = \int_{t_0}^{t} \sum_{\beta=1}^{f} d_\tau (\partial_{\dot{q}_\beta} L \, \delta q_\beta) \, d_\tau = \sum_{\beta=1}^{f} \partial_{\dot{q}_\beta} L \, \delta q_\beta(t), \tag{IV.150}$$

da an der unteren Integrationsgrenze nach wie vor $\delta q_\beta(t_0) = 0$ gilt. Somit folgt durch Koeffizientenvergleich

$$\partial_{q_\beta} S = \partial_{\dot{q}_\beta} L = p_\beta. \tag{IV.151}$$

Dies eingesetzt führt zu

$$\partial_t S + \sum_{\beta=1}^{f} p_\beta \, \dot{q}_\beta = L \tag{IV.152}$$

bzw.

$$\partial_t S + H(q_\alpha, p_\alpha, t) = 0. \tag{IV.153}$$

Wenn p_α eliminiert wird, erhalten wir die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\partial_t S + H(q_\alpha, \partial_{q_\alpha} S, t) = 0. \tag{IV.154}$$

Sie ist eine Bestimmungsgleichung für die Wirkung $S(q_\alpha, t)$. Diese Gleichung ist eine weitere äquivalente Formulierung zur Beschreibung der Dynamik des Massenpunktsystems, äquivalent zu L II bzw. den kanonischen Gleichungen.

Hier handelt es sich offensichtlich um eine einzige Gleichung anstatt der f L II bzw. $2f$ kanonischen Gleichungen. Allerdings ist die Hamilton-Jacobi-Gleichung keine gewöhnliche Dgl., sondern eine partielle. Sie ist von 1. Ordnung, da nur erste partielle Ableitungen auftreten, und i.a. nichtlinear. Derartige Dgln. werden mit der Charakteristiken-Methode gelöst. Die dabei auftretenden Charakteristiken sind gerade die kanonischen Gleichungen.

Würde die Hamilton-Jacobi-Gleichung ausschließlich die beschriebene Äquivalenz enthalten, wäre sie nicht sonderlich interessant. Dem ist jedoch nicht so. Sie schlägt sowohl die Brücke zur Elektrodynamik, insbesondere zur geometrischen Optik, als auch zur Quantenmechanik. Die als Grundgleichung in der Quantenmechanik einzuführende Schrödinger-Gleichung hat weitgehend die gleiche Struktur wie die Hamilton-Jacobi-Gleichung und ist nach ihrem Vorbild gefunden worden. Für Details verweisen wir auf unser Skript zur Vorlesung "Quantenmechanik".

Wir wollen jetzt skizzieren, wie man zu einer Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung und zu den Bahnkurven $q_\alpha(t)$ des Systems gelangt. Dazu stellen wir folgende Begriffe und Sätze bereit.

Vollständiges Integral:

Eine Lösung heißt vollständiges Integral, wenn sie f unabhängige Integrationskonstanten c_α enthält, also

$$S = S(q_\alpha, c_\alpha, t). \tag{IV.155}$$

Jacobischer Satz:

Ist $S(q_\alpha, c_\alpha, t)$ ein vollständiges Integral der Hamilton-Jacobi-Gleichung, so liefern die Gleichungen

$$\partial_{q_\alpha} S = p_\alpha \quad , \quad \partial_{c_\alpha} S = d_\alpha \quad , \quad \alpha = 1, \ldots, f \tag{IV.156}$$

die Bahnkurve und damit die Lösung des Problems. c_α, d_α sind Konstanten.

Beweis:

Es ist zu zeigen, daß aus den angegebenen Gleichungen die kanonischen Gleichungen folgen.

1. Differentiation der Gleichung nach d_t

$$d_t\, \partial_{c_\alpha} S = \partial_t\, \partial_{c_\alpha} S + \sum_{\beta=1}^{f} \partial_{q_\beta}\, \partial_{c_\alpha} S \cdot \dot{q}_\beta = 0. \tag{IV.157}$$

2. Differentiation der Hamilton-Jacobi-Gleichung nach c_α

$$\partial_{c_\alpha}\, \partial_t S + \sum_{\beta=1}^{f} \partial_{p_\beta} H \cdot \partial_{c_\alpha} p_\beta = \partial_{c_\alpha}\, \partial_t S + \sum_{\beta=1}^{f} \partial_{c_\alpha}\, \partial_{q_\beta} S \cdot \partial_{p_\beta} H = 0. \tag{IV.158}$$

Der Vergleich von 1. und 2. liefert

$$\dot{q}_\beta = \partial_{p_\beta} H. \tag{IV.159}$$

3. Differentiation der Hamilton-Jacobi-Gleichung nach q_α unter Beachtung von $p_\alpha = \partial_{q_\alpha} S$

$$\partial_{q_\alpha}\, \partial_t S + \partial_{q_\alpha} H + \sum_{\beta=1}^{f} \partial_{p_\beta} H \cdot \partial_{q_\alpha} p_\beta = 0 \tag{IV.160}$$

$$\partial_t\, \partial_{q_\alpha} S + \partial_{q_\alpha} H + \sum_{\beta=1}^{f} \partial_{q_\alpha}\, \partial_{q_\beta} S \cdot \dot{q}_\beta = 0 \tag{IV.161}$$

$$d_t\, \partial_{q_\alpha} S + \partial_{q_\alpha} H = 0 \tag{IV.162}$$

$$d_t p_\alpha + \partial_{q_\alpha} H = 0 \tag{IV.163}$$

$$\dot{p}_\alpha = -\partial_{q_\alpha} H \tag{IV.164}$$

Der Jacobische Satz liefert somit die kanonische Gleichungen. q.e.d.

An dieser Stelle können wir auf unsere Vorüberlegungen zu Beginn dieses Abschnitts zurückkommen. Ist S die gewünschte Erzeugende Funktion? Exakt, denn mit

$$R(q_\alpha, q'_\alpha, t) = S(q_\alpha, c_\alpha, t) \tag{IV.165}$$

und

$$H' = 0 \quad , \quad q'_\alpha = c_\alpha \quad , \quad p'_\alpha = -d_\alpha \tag{IV.166}$$

gilt

$$H' - H = \partial_t R \quad \leftrightarrow \quad 0 = \partial_t S + H \quad ; \tag{IV.167}$$
$$p_\alpha = \partial_{q_\alpha} R \quad \leftrightarrow \quad p_\alpha = \partial_{q_\alpha} S \quad ; \tag{IV.168}$$
$$p'_\alpha = -\partial_{q'_\alpha} R \quad \leftrightarrow \quad d_\alpha = \partial_{c_\alpha} S \quad . \tag{IV.169}$$

Wir wollen die Hamilton-Jacobi-Theorie auf das Beispiel eines kräftefreien Massenpunktes anwenden. Die Hamilton-Funktion lautet

$$H = \frac{1}{2m}\,(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \tag{IV.170}$$

und die Hamilton-Jacobi-Gleichung entsprechend

$$\partial_t S + \frac{1}{2m}\,\{(\partial_{q_1} S)^2 + (\partial_{q_2} S)^2 + (\partial_{q_3} S)^2\} = 0. \tag{IV.171}$$

Als die generalisierten Koordinaten q_1, q_2, q_3 sind hier die kartesischen Koordinaten x_1, x_2, x_3 geeignet. Da es sich um ein konservatives System handelt, ist die Hamilton-Funktion gleich der Gesamtenergie, also

$$H = U = -\partial_t S \tag{IV.172}$$

und somit

$$S = -U \cdot t + W(x_1, x_2, x_3). \tag{IV.173}$$

Der Separationsansatz

$$W = W_1(x_1) + W_2(x_2) + W_3(x_3) \tag{IV.174}$$

führt auf

$$\frac{1}{2m}\{(\partial_{x_1} W_1)^2 + (\partial_{x_2} W_2)^2 + (\partial_{x_3} W_3)^2\} = U. \tag{IV.175}$$

Hieraus ist zu folgern, daß

$$\partial_{x_1} W_1 = c_1 = const \quad , \quad W_1 = c_1 \cdot x_1, \tag{IV.176}$$
$$\partial_{x_2} W_2 = c_2 = const \quad , \quad W_2 = c_2 \cdot x_2, \tag{IV.177}$$
$$\partial_{x_3} W_3 = c_3 = const \quad , \quad W_3 = c_3 \cdot x_3. \tag{IV.178}$$

Die drei Integrationkonstanten müssen

$$\frac{1}{2m}(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) = U \tag{IV.179}$$

erfüllen. Damit folgt das vollständige Integral

$$S = c_1\, x_1 + c_2\, x_2 + c_3\, x_3 - \frac{1}{2m}(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)\, t. \tag{IV.180}$$

Der Jacobische Satz liefert nun

$$\partial_{x_a} S \;=\; c_a = p_a, \tag{IV.181}$$
$$\partial_{c_a} S \;=\; x_a - \frac{1}{m}\, c_a\, t = d_a, \tag{IV.182}$$

bzw.

$$x_a = \frac{c_a}{m}\, t + d_a = \frac{p_a}{m}\, t + d_a \quad , \quad a = 1, 2, 3. \tag{IV.183}$$

Offensichtlich sind d_a die Anfangslagen, c_a die Anfangsimpulse und $\dfrac{c_a}{m} = \dfrac{p_a}{m}$ die Anfangsgeschwindigkeiten.

Es bleibt noch auf eine sehr interessante Eigenschaft der Wirkungsfunktion hinzuweisen. Es ist klar, daß die Massenpunktgeschwindigkeit $\underline{p}/m$ systemcharakteristisch ist. In der Wirkungsfunktion ist jedoch noch eine zweite charakteristische Geschwindigkeit enthalten. Dazu betrachten wir die Ausbreitung einer Wirkungsfläche $S = const.$ Dafür gilt mit $\underline{c} = (c_1, c_2, c_3)$

$$dS = 0 = \underline{c} \cdot d\underline{x} - \frac{\underline{c}^2}{2m}\, dt = \underline{c}\left(d\underline{x} - \frac{\underline{c}}{2m} dt\right) \tag{IV.184}$$

bzw.

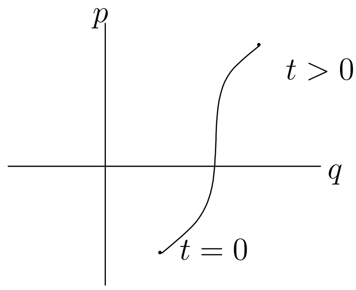
$$\underline{v}_S = \frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{\underline{c}}{2m} = \frac{\underline{p}}{2m}. \tag{IV.185}$$

Somit breitet sich eine Wirkungsfläche mit einer Geschwindigkeit aus, die gerade der halben Massenpunktgeschwindigkeit entspricht.

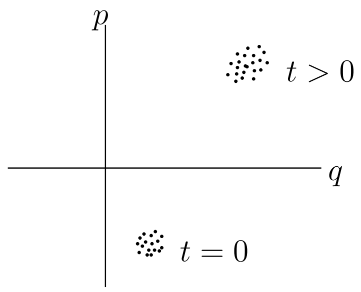
Hier gibt die klassische Mechanik einen deutlichen Fingerzeig auf die Wellentheorien der Elektrodynamik und Quantenmechanik. Die Massenpunktgeschwindigkeit findet ihr Gegenstück in der Gruppengeschwindigkeit einer Welle und die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wirkungsfläche in der Phasengeschwindigkeit.

7 Liouville-Gleichung

Im Abschnitt IV.5 über kanonische Transformationen wurde der Phasenraum eingeführt, der von den kanonisch konjungierten Variablen $q_\alpha, p_\alpha, \alpha = 1, \ldots, f$, aufgespannt wird und damit $2f$-dimensional ist. Zum Zeitpunkt t nehmen die kanonisch konjungierten Variablen, die das zugrunde liegende System aus N Massenpunkten beschreiben, die Werte $q_\alpha(t), p_\alpha(t)$ an. Der Zustand des N-Massenpunktsystems bildet damit einen Punkt im Phasenraum. Die Lage des Punktes hängt von der Hamilton-Funktion $H(q_\alpha, p_\alpha, t)$, die die Dynamik des Systems beschreibt, und den Anfangsbedingungen $q_\alpha(t = 0), p_\alpha(t = 0)$ ab. Die Anfangswerte $q_\alpha(t = 0), p_\alpha(t = 0)$ sind mit den aktuellen kanonisch konjungierten Variablen $q_\alpha(t), p_\alpha(t)$ durch die Phasenraum-Trajektorie verbunden, die die Dynamik des N-Massenpunktsystems beschreibt.



Es wird jetzt wiederholt das gleiche N-Massenpunktsystem betrachtet unter immer wieder leicht veränderten Anfangsbedingungen. Auf diese Weise entstehen zwei Punktwolken, eine entspricht den Anfangsbedingungen $t = 0$, die andere dem System jeweils bei t.



Die Trajektorien, die je einen Punkt der Wolke bei $t = 0$ mit einem Punkt der Wolke $t > 0$ verbinden, seien der Übersicht halber nicht gezeichnet. Wichtig ist dabei, daß zu keinem Zeitpunkt t zwei Phasenraumtrajektorien den gleichen Phasenraumpunkt belegen. Dies folgt aus der eindeutigen Lösbarkeit von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen bei vorgegebenen Anfangsbedingungen, und die Hamiltonschen Gleichungen für die q_α, p_α stellen bekanntlich ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen dar.

An dieser Stelle sei die Motivation für unsere Betrachtung eingefügt, warum das $N-$Massenpunktsystem denn wiederholt unter veränderten Anfangsbedingungen betrachtet werden soll. Sehr große Systeme ($N \sim 10^{23}$) erlauben es i.a. nicht, Anfangsbedingungen exakt vorzugeben; bei $t = 0$ kann die Gesamtheit aller kanonisch konjungierten Variablen des Systems nicht präzise erfaßt werden, wohl aber innerhalb einer gewissen Schwankungsbreite. Trotzdem sind derartige Systeme noch mit Erfolg auswertbar. Die gesamte klassische statistische Thermodynamik beruht auf diesen Überlegungen.

Es ist nun möglich, im Phasenraum eine Dichte $\rho(q_\alpha, p_\alpha, t)$ einzuführen. ρ ist die Anzahl der Punkte je Volumeneinheit des Phasenraumes. ρ wird auch Anzahldichte oder Phasendichte genannt. Wegen der funktionalen Abhängigkeit der Phasenraumdichte gilt nach Gleichung IV.86

$$d_t\rho = \{\rho, H\} + \partial_t\rho. \tag{IV.186}$$

Liouvillscher Satz:

Der Liouvillsche Satz besagt, daß die Phasenraumdichte während der Bewegung konstant bleibt, also

$$d_t\rho = 0. \tag{IV.187}$$

Somit gilt die Liouville-Gleichung

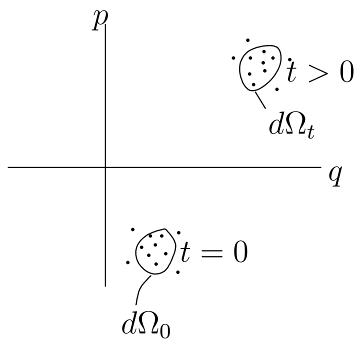
$$\partial_t\rho + \{\rho, H\} = 0. \tag{IV.188}$$

Äquivalent zur obigen Aussage der Konstanz der Phasenraumdichte ist die Konstanz des Phasenvolumens. Ein willkürliches Volumen des Phasenraumes, das bei $t = 0$ eine feste Anzahl von Punkten der Punktwolke einschließt, sei Ω_0. Während der Bewegung verändert sich die Form des Volumens, da sich die Punkte des herausgegriffenen Bereichs der Punktwolke gegeneinander verschieben. Da die Zahl der Punkte gleich bleibt und nach dem Liouvilleschen Satz die Dichte gleich bleibt, muß das Volumen Ω_t gleich bleiben:

$$\Omega_t = const = \Omega_0. \tag{IV.189}$$

Das gilt insbesondere auch für infinitesimale Phasenraumvolumen:

$$d\Omega_t = d\Omega_0. \tag{IV.190}$$



Beweis:

Wir führen zunächst die Abkürzungen

$$q_{0\alpha} = q_\alpha(t = 0) \quad , \quad p_{0\alpha} = p_\alpha(t = 0) \tag{IV.191}$$

ein und berücksichtigen, daß $q_\alpha(t)$, $p_\alpha(t)$ natürlich auch von der jeweiligen Anfangsbedingung abhängt. Also ist für die kanonisch konjungierten Variablen bei t zu schreiben

$$q_\alpha = q_\alpha(q_{0\beta}, p_{0\beta}, t), \tag{IV.192}$$
$$p_\alpha = p_\alpha(q_{0\beta}, p_{0\beta}, t). \tag{IV.193}$$

Diese Gleichungen können formal als Koordinatentransformation

$$q_{0\alpha}, p_{0\alpha} \to q_\alpha, p_\alpha \tag{IV.194}$$

aufgefaßt werden, insbesondere sogar als kanonische Transformation, denn die kanonischen Gleichungen gelten sowohl bei $t = 0$ als auch später ($t > 0$). Ein Volumenelement des Phasenraums transformiert sich bei einer Koordinatentransformation vermittels der Jacobischen Funktionaldeterminante Δ zu

$$d\Omega_t = \Delta \cdot d\Omega_0 \tag{IV.195}$$

mit

$$\Delta = \frac{\partial(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f)}{\partial(q_{01}, \ldots, q_{0f}, p_{01}, \ldots, p_{0f})}. \tag{IV.196}$$

Zu zeigen ist somit $\Delta = 1$. Zunächst wird $\Delta = const$ über $d_t\Delta = 0$ gezeigt. Wir führen für die kanonisch konjungierten Variablen die zusammfassende Schreibweise

$$r_i = (q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f) \quad , \tag{IV.197}$$
$$r_{0i} = (q_{01}, \ldots, q_{0f}, p_{01}, \ldots, p_{0f}) \quad , \quad i = 1, \ldots, 2f \tag{IV.198}$$

bzw.

$$\Delta = \frac{\partial(r_1, \ldots r_{2f})}{\partial(r_{01}, \ldots, r_{02f})}. \tag{IV.199}$$

ein. Nach dem Entwicklungssatz für Determinanten gilt

$$\Delta = \sum_{k=1}^{2f} a_{ik}\, D_{ik} \quad \text{(Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile)} \tag{IV.200}$$

mit

$$a_{ik} = \frac{\partial r_i}{\partial r_{0k}} \quad \text{(Elemente der Determinante)} \tag{IV.201}$$

$$D_{ik} \quad \text{(adjungierte Unterdeterminante).} \tag{IV.202}$$

Behält man die D_{ik} bei, d.h. die Unterdeterminante der i-ten Zeile, benutzt statt der a_{ik} jedoch a_{jk}, d.h. die j-te Zeile ($i \neq j$), so folgt

$$0 = \sum_{k=1}^{2f} a_{jk}\, D_{ik}. \tag{IV.203}$$

Dazu äquivalent ist, daß i-te und j-te Zeile gleich sind. Somit können wir schreiben

$$\Delta\, \delta_{ij} = \sum_{k=1}^{2f} a_{jk}\, D_{ik}. \tag{IV.204}$$

Da $\Delta = \Delta(a_{ik})$ ist, folgt

$$d_t \Delta = \sum_{i,k=1}^{2f} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ik}}\, \dot{a}_{ik}. \tag{IV.205}$$

Wegen des Entwicklungssatzes gilt aber

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_{ik}} = D_{ik}. \tag{IV.206}$$

Folglich erhalten wir

$$d_t \Delta = \sum_{i,k=1}^{2f} D_{ik}\, \dot{a}_{ik}. \tag{IV.207}$$

Weiterhin ist

$$\dot{a}_{ik} = d_t \frac{\partial r_i}{\partial r_{0k}} = \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial r_{0k}} = \sum_{l=1}^{2f} \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial r_l} \frac{\partial r_l}{\partial r_{0k}} = \sum_{l=1}^{2f} \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial r_l}\, a_{lk}. \tag{IV.208}$$

Somit folgt

$$d_t \Delta = \sum_{i,k,l=1}^{2f} D_{ik}\, a_{lk} \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial r_l} = \sum_{i,l=1}^{2f} \Delta\, \delta_{il} \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial r_l} \tag{IV.209}$$

$$d_t \Delta = \Delta \sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial r_i} = \Delta \sum_{\alpha=1}^{f} \left(\frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial \dot{p}_\alpha}{\partial p_\alpha} \right) \tag{IV.210}$$

$$d_t \Delta = \Delta \sum_{\alpha=1}^{f} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_\alpha\, \partial p_\alpha} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha\, \partial q_\alpha} \right) = 0. \tag{IV.211}$$

Folglich ist $\Delta = const$. Da bei $t = 0$ gilt $\Delta = 1$, folgt generell

$$\Delta = 1 \quad \text{q.e.d.} \tag{IV.212}$$

Bemerkungen:

1. Umfangreiche Anwendungen finden die Phasenraumdichte und die Liouville-Gleichung in der statistischen Thermodynamik.

2. Das quantentheoretische Gegenstück zur Liouville-Gleichung lautet

$$\partial_t \rho + \frac{1}{i\,\hbar}\,[\rho, H] = 0, \tag{IV.213}$$

wobei ρ den Dichte-Operator, H den Hamilton-Operator und $[\ldots]$ den Kommutator darstellen.

Kapitel V

Starrer Körper

1 Definition

Bisher haben wir Systeme von N Massenpunkten untersucht, deren Bewegung eingeprägten Kräften und Zwangskräften unterlag. Ein starrer Körper ist auch ein System von N Massenpunkten, wobei N i.a. sehr groß ist und die Zwangskräfte zwischen den N Massenpunkten gerade so wirken, daß deren Abstände zueinander absolut starr sind. Dies ist natürlich wiederum eine Idealisierung - ebenso wie ein Massenpunkt eine Idealisierung darstellt. Jeder ausgedehnte Körper hat eine gewisse Elastizität, so daß sich die Abstände zwischen seinen Teilchen (Massenpunkten) ändern können. Sind diese Änderungen aber klein gegenüber den durch die Bewegung des Körpers selbst bedingten Verschiebungen, ist die Approximation als starrer Körper gerechtfertigt. Bewegungen der Teile des Körpers, die diese Bedingung nicht erfüllen, werden in der Mechanik deformierbarer Medien - der s.g. Kontinuumsmechanik - untersucht und liegen außerhalb des Rahmens dieser Vorlesung.

Das ein starrer Körper in jedem Fall eine Approximation darstellt und kein Körper tatsächlich absolut starr sein kann, ist auch ein Gebot der Relativitätstheorie. Danach breiten sich Wirkungen grundsätzlich mit endlichen Geschwindigkeiten aus, maximal mit Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c. Greift an einen Teil des Körpers eine Kraft an und führt zu einer Bewegung, vergeht eine endliche wenn auch ggf. kleine Zeit, bis andere Teile des Körpers davon "erfahren" und sich ebenfalls in Bewegung setzen. Dieser Prozeß ist mit einer Deformation verbunden. Im weiteren setzen wir aber immer voraus, daß diese Deformation vernachlässigbar ist.

Der allgemeine starre Körper hat 6 Freiheitsgrade; 3 Freiheitsgrade der Translation und 3 Freiheitsgrade der Rotation. Seine Bewegung im Raum ist vollständig bekannt, wenn wir den Ort eines beliebig gewählten Punktes des starren Körpers kennen und wissen, wie sich der Körper um diesen Punkt dreht.

Dem allgemeinen starren Körper können zusätzliche Nebenbedingungen auferlegt werden, so daß sich die Freiheitsgrade reduzieren. Wichtige Fälle enthält die Tabelle.

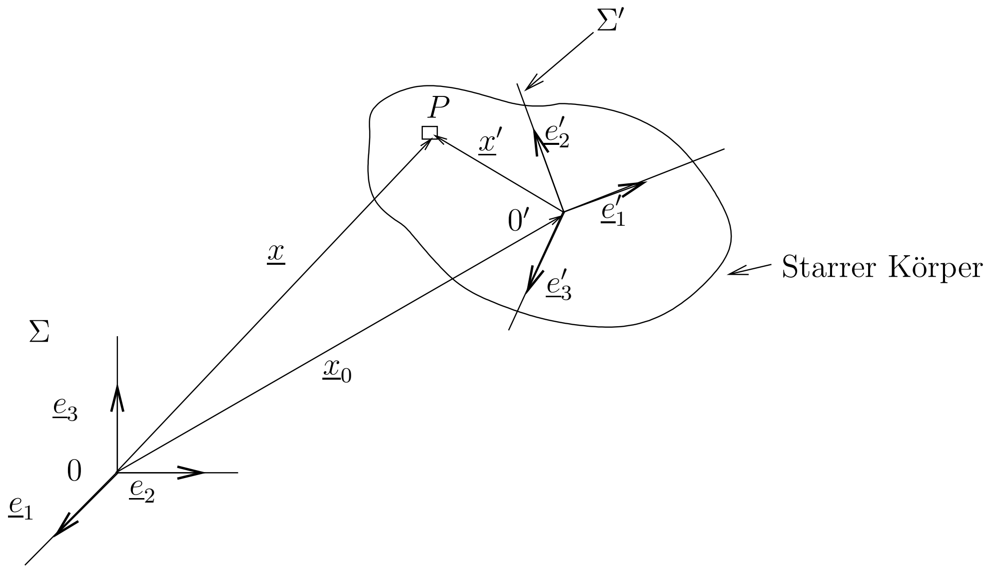
Körper	Nebenbedingung	Freiheitsgrade
allgemeiner starrer Körper	keine	6
Kreisel	ein Punkt fest	3
Physisches Pendel	eine Achse fest	1

Je nach Art des vorliegenden Problems sind 6, 3 oder 1 generalisierte Koordinate einzuführen.

2 Kinematik des starren Körpers

2.1 Raumfestes und körperfestes Koordinatensystem

Zur Beschreibung der allgemeinen Bewegung eines starren Körpers führen wir ein raumfestes Koordinatensystem Σ ein, das i.a. ein Inertialsystem sein wird, sowie ein fest mit dem starren Körper verbundenes Koordinatensystem Σ'.



Σ' kann völlig willkürlich im starren Körper platziert werden. Zweckmäßig ist aber häufig eine ganz besondere Auswahl; etwa wenn $0'$ dem Schwerpunkt des starren Körpers entspricht und die Koordinatenachsen in Richtung der Hauptachsen des starren Körpers orientiert werden.

Wesentliche Überlegungen können wir aus Abschnitt II.2 über bewegte Bezugssysteme übernehmen. Für einen beliebigen Punkt P des starren Körpers gilt offensichtlich

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_0(t) + \underline{x}'. \tag{V.1}$$

Hier ist zu beachten, daß $\underline{x}'$ in Σ' fest ist. Somit ist nach Gleichung (II.18)

$$\underline{v}' = d_t' \underline{x}' = 0 \tag{V.2}$$

und es gilt nach Gleichung (II.30)

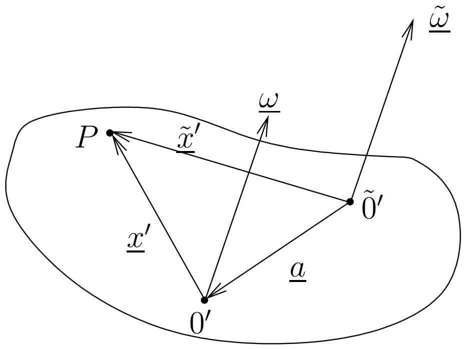
$$\underline{v} = \underline{v}_{tr} + \underline{\omega} \times \underline{x}', \tag{V.3}$$

wobei die Translationsgeschwindigkeit entsprechend Gleichung (II.16)

$$v_{tr} = d_t \underline{x}_0 \tag{V.4}$$

und der Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ eingehen. $\underline{\omega}$ beschreibt die (momentane) Drehung des Systems Σ' und damit des starren Körpers.

Wir wollen als erstes die Frage beantworten, wie sich die Translationsgeschwindigkeit $\underline{v}_{tr}$ und die Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ ändern, wenn statt $0'$ ein anderer Punkt $\tilde{0}'$ als Nullpunkt von Σ' gewählt wird.



Es gilt

$$\tilde{\underline{x}}' = \underline{x}' + \underline{a} \tag{V.5}$$

und nach Gleichung (II.30) folgt

$$\underline{v} = \tilde{\underline{v}}_{tr} + \tilde{\underline{\omega}} \times \tilde{\underline{x}}'. \tag{V.6}$$

Da die Geschwindigkeit $\underline{v}$ des Punktes P nicht vom körperfesten Koordinatensystem abhängt, gilt

$$\underline{v}_{tr} + \underline{\omega} \times \underline{x}' = \tilde{\underline{v}}_{tr} + \tilde{\underline{\omega}} \times \tilde{\underline{x}}' \tag{V.7}$$

und weiter

$$\underline{v}_{tr} + \underline{\omega} \times \underline{x}' = \tilde{\underline{v}}_{tr} + \tilde{\underline{\omega}} \times \underline{a} + \tilde{\underline{\omega}} \times \underline{x}'. \tag{V.8}$$

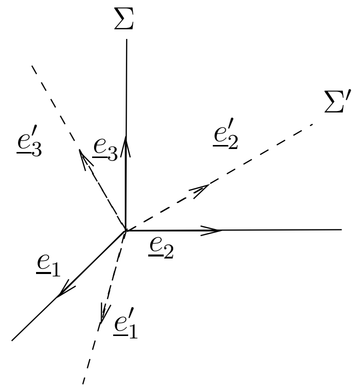
Diese Gleichung muß für alle $\underline{x}'$ gelten, da P ja ein beliebiger Punkt des starren Körpers ist. So muß gelten

$$\underline{\omega} = \tilde{\underline{\omega}}, \tag{V.9}$$
$$\underline{v}_{tr} = \tilde{\underline{v}}_{tr} + \underline{\omega} \times \underline{a}. \tag{V.10}$$

Die Winkelgeschwindigkeit hängt nicht von der Wahl des Bezugssystems $0'$ ab; sie ist eine reine Eigenschaft der Bewegung des Körpers. Dagegen ändert sich die Translationsgeschwindigkeit bei einem Wechsel des Nullpunktes des körperfesten Systems.

2.2 Drehungen

Die Beschreibung der Translationsbewegung eines starren Körpers unterscheidet sich im Grunde nicht von der eines herkömmlichen Massenpunktes. Die Rotationsbewegung erfordert jedoch einige neue Überlegungen. Wir wollen deshalb jetzt die Rotation genauer betrachten und dabei von einer Translation absehen. Der Ursprung von Σ' soll mit dem von Σ zusammenfallen.



Die Basis $\{\underline{e}'_a(t)\}$ ist zeitlich veränderlich. Bei $t = 0$ mögen beide Koordinatensysteme deckungsgleich sein, also

$$\underline{e}'_a(t=0) = \underline{e}_a \quad , \quad a = 1, \ldots, 3. \tag{V.11}$$

Für $t > 0$ gehen die $\underline{e}'_a(t)$ durch eine orthogonale Transformation aus den $\underline{e}_a$ hervor und wir schreiben unter Verwendung der Summenkonvention

$$\underline{e}'_a(t) = D_{ab}(t)\, \underline{e}_b. \tag{V.12}$$

D_{ab} ist eine orthogonale Matrix. Kompakt schreiben wir dafür $\underline{\underline{D}}$. Es gilt

$$\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{D}}^T = \underline{\underline{I}} \tag{V.13}$$

bzw.

$$D_{ab} \cdot D^T_{bc} = D_{ab} \cdot D_{cb} = \delta_{ac}. \tag{V.14}$$

Ein beliebiger Punkt P des starren Körpers kann in beiden Basen dargestellt werden, also

$$\underline{x}(t) = x_a(t)\, \underline{e}_a = x'_a\, \underline{e}'_a(t). \tag{V.15}$$

Elimination von $\underline{e}'_a$ ergibt

$$x_a(t)\, \underline{e}_a = x'_a \cdot D_{ab}(t) \cdot \underline{e}_b. \tag{V.16}$$

Wegen

$$\underline{e}_a \cdot \underline{e}_c = \delta_{ac} \tag{V.17}$$

liefert die skalare Multiplikation mit $\underline{e}_c$

$$x_a(t)\, \delta_{ac} = x'_a\, D_{ab}(t)\, \delta_{bc} \tag{V.18}$$
$$x_c(t) = x'_a\, D_{ac}(t) = D^T_{ca}(t)\, x'_a \tag{V.19}$$
$$D_{bc}(t)\, x_c(t) = D_{bc}\, D^T_{ca} x'_a = \delta_{ba}\, x'_a \tag{V.20}$$
$$x'_b = D_{bc}(t)\, x_c(t). \tag{V.21}$$

Wegen

$$x_a(0) = x'_a \tag{V.22}$$

gilt auch

$$x_c(t) = D^T_{ca}(t)\, x_a(0). \tag{V.23}$$

Eine allgemeine Eigenschaft von Drehungen wird durch den *Satz von Euler* festgestellt. Er besagt daß ein in einem Punkt festgehaltener starrer Körper - also ein Kreisel - aus einer beliebigen Anfangslage in eine beliebige Endlage durch eine einzige Drehung um eine bestimmte Achse - also die Drehachse - um einen bestimmten Winkel gebracht werden kann.

Beweis:

Wir betrachten einen beliebigen Punkt P des starren Körpers, der in Σ die Anfangslage $\underline{x}(0) = x_a(0)\,\underline{e}_a$ und die Endlage $\underline{x}(t) = x_a(t)\,\underline{e}_a$ haben soll. Nach obiger Vorarbeit gilt aber

$$x_a(t) = D^T_{ab}\,x_b(0). \tag{V.24}$$

Es gibt somit eine orthogonale Matrix, die die Überführung von der Anfangs- in die Endlage vornimmt.

Existenz der Drehachse $\underline{n}$: Alle Punkte auf der Drehachse bleiben invarinat, also muß gelten

$$n_a = D^T_{ab}\,n_b. \tag{V.25}$$

Somit ist zu zeigen, daß ein Eigenwert $\lambda = 1$ existiert. Dies ist gezeigt, falls

$$\det(\underline{\underline{D}}^T - \underline{\underline{I}}) = 0 \tag{V.26}$$

gezeigt ist. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} 1 = \det\underline{\underline{I}} &= \det(\underline{\underline{D}}^T\underline{\underline{D}}) = \det\underline{\underline{D}}^T\det\underline{\underline{D}} = (\det\underline{\underline{D}})^2, && \text{(V.27)}\\ &\det\underline{\underline{D}} = \pm 1. && \text{(V.28)} \end{aligned}$$

Die negative Wurzel schließen wir aus, da sie keine stetige orthogonale Transformation beschreibt, sondern eine Spiegelung. Dann gilt weiter

$$\begin{aligned} \det(\underline{\underline{D}}^T - \underline{\underline{I}}) &= \det(\underline{\underline{D}}^T - \underline{\underline{D}}^T\underline{\underline{D}}) = \det\underline{\underline{D}}^T\,\det(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{D}}) && \text{(V.29)}\\ &= \det(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{D}}) = \det(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{D}}^T) = -\det(\underline{\underline{D}}^T - \underline{\underline{I}}). && \text{(V.30)} \end{aligned}$$

Folglich muß

$$\det(\underline{\underline{D}}^T - \underline{\underline{I}}) = 0 \tag{V.31}$$

gelten und die Existenz der Drehachse ist bewiesen.Zu berechnen ist die Drehachse als Eigenvektor von $\underline{\underline{D}}^T$ zum Eigenwert $\lambda = 1$.

Drehwinkel: Wir wählen eine neue Basis $\{\tilde{\underline{e}}'_a\}$, so daß $\tilde{\underline{e}}'_3$ mit der Drehachse übereinstimmt. Die Drehung um diese Achse wird durch die Matrix

$$\tilde{\underline{\underline{D}}} = \begin{pmatrix} \cos\delta & \sin\delta & 0 \\ -\sin\delta & \cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{V.32}$$

beschrieben. $\underline{\underline{D}}$ und $\tilde{\underline{\underline{D}}}$ gehen aber durch eine Transformation der Art

$$\tilde{\underline{\underline{D}}} = \underline{\underline{U}}^{-1}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{U}} \tag{V.33}$$

auseinander hervor. Spurbildung liefert

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}\tilde{\underline{\underline{D}}} &= 1 + 2\,\cos\delta = \mathrm{Sp}(\underline{\underline{U}}^{-1}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{U}}) && \text{(V.34)}\\ &= \mathrm{Sp}(\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{U}}^{-1}) = \mathrm{Sp}\underline{\underline{D}} = D_{aa}. && \text{(V.35)} \end{aligned}$$

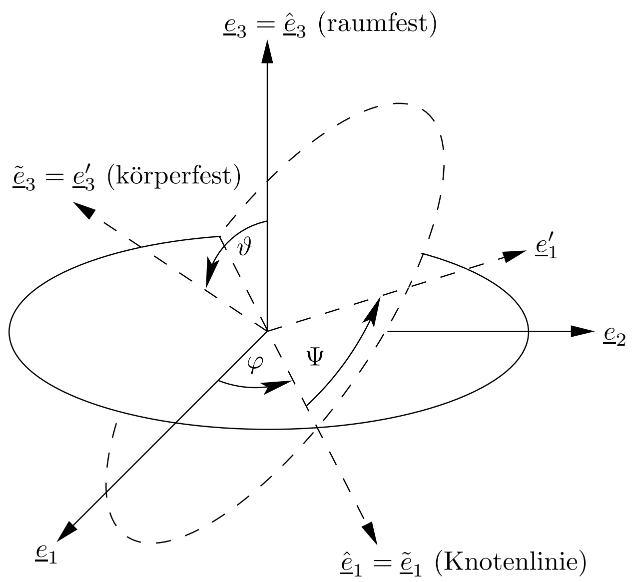
Der Drehwinkel δ ist somit aus

$$1 + 2\,\cos\delta = \mathrm{Sp}\underline{\underline{D}} \tag{V.36}$$

zu berechnen.

2.3 Eulersche Winkel

Der Eulersche Satz suggeriert, die Rotation des starren Körpers durch die Drehachse und den Drehwinkel zu beschreiben. Die entsprechenden generalisierten Koordinaten wären dann der Drehwinkel und die beiden die Drehachsenrichtungen beschreibenden Winkel. Als zweckmäßig hat sich jedoch ein anderer Satz von generalisierten Koordinaten erwiesen - die Eulerschen Winkel. Es handelt sich um 3 Winkel für Drehungen um drei linear unabhängige Richtungen, die in einer bestimmten Reihenfolge auszuführen sind, denn die Nacheinanderausführung von Drehungen ist bekanntlich von der Reihenfolge abhängig.



Die drei Teildrehungen und die ihnen zugeordneten Drehwinkel und -matrizen sind in dem folgenden Schema zusammengestellt:

Basis der Teildrehung	Teildrehung	Basis nach der Teildrehung	Matrix
$\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$	φ um $\underline{e}_3$	$\underline{\hat{e}}_1, \underline{\hat{e}}_2, \underline{\hat{e}}_3 = \underline{e}_3$	$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{D}}_\varphi$
$\underline{\hat{e}}_1, \underline{\hat{e}}_2, \underline{\hat{e}}_3$	ϑ um $\underline{\hat{e}}_1$	$\underline{\hat{e}}_1 = \underline{\tilde{e}}_1, \underline{\tilde{e}}_2, \underline{\tilde{e}}_3$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} = \underline{\underline{D}}_\vartheta$
$\underline{\tilde{e}}_1, \underline{\tilde{e}}_2, \underline{\tilde{e}}_3$	ψ um $\underline{\tilde{e}}_3$	$\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3 = \underline{\tilde{e}}_3$	$\begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{D}}_\psi$

Der Drehwinkel φ bezieht sich auf die raumfeste Achse $\underline{e}_3$; ψ auf die körperfeste Achse $\underline{e}'_3$. Die zum Drehwinkel ϑ gehörende Achse $\underline{\hat{e}}_1$ ist weder raumfest noch körperfrei. Sie heißt Knotenlinie.

Durch die Hintereinanderausführung der drei Teildrehungen werden die $\{\underline{e}_a\}$ auf die $\{\underline{e}'_a\}$ abgebildet. Der Gesamtprozeß wird beschrieben durch

$$\underline{e}'_a = D_{ab}\,\underline{e}_b, \tag{V.37}$$

wobei sich $\underline{\underline{D}}$ durch Multiplikation der Matrizen für die Teildrehungen ergibt, also

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}_\psi\,\underline{\underline{D}}_\vartheta\,\underline{\underline{D}}_\varphi \tag{V.38}$$

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \cos\psi\,\cos\varphi - \sin\psi\,\sin\varphi\,\cos\vartheta & \cos\psi\,\sin\varphi + \sin\psi\,\cos\varphi\,\cos\vartheta & \sin\psi\,\sin\vartheta \\ -\sin\psi\,\cos\varphi - \cos\psi\,\sin\varphi\,\cos\vartheta & -\sin\psi\,\sin\varphi + \cos\vartheta\,\cos\varphi\,\cos\vartheta & \cos\psi\,\sin\vartheta \\ \sin\varphi\,\sin\vartheta & -\cos\varphi\,\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \tag{V.39}$$

Der Zusammenhang der Eulerschen Winkel mit der Drehachse und dem Drehwinkel δ des Eulerschen Satzes bzw. der Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ läßt sich leicht herstellen. $\underline{\omega}$ ergibt sich aus den drei Anteilen zu

$$\underline{\omega} = \dot{\varphi}\,\underline{e_3} + \dot{\vartheta}\,\underline{\hat{e}}_1 + \dot{\psi}\,\underline{e}'_3. \tag{V.40}$$

Mit dieser überschaubaren Relation rechnen wir die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit im raum- und im körperfesten Koordinatensystem aus.

In Σ sind $\underline{\hat{e}}_1$ und $\underline{e}'_3$ durch $\{\underline{e}_a\}$ auszudrücken:

$$\begin{aligned}
\underline{\hat{e}}_1 &= D_{\varphi 1a}\,\underline{e}_a = \cos\varphi\cdot\underline{e}_1 + \sin\varphi\cdot\underline{e}_2 && \text{(V.41)}\\
\underline{\hat{e}}_2 &= D_{\varphi 2a}\,\underline{e}_a = -\sin\varphi\underline{e}_1 + \cos\varphi\underline{e}_2 && \text{(V.42)}\\
\underline{\hat{e}}_3 &= D_{\varphi 3a}\,\underline{e}_a = \underline{e}_3 && \text{(V.43)}\\
\underline{e}'_3 &= D_{\psi 3a}\,\underline{\tilde{e}}_a = \underline{\tilde{e}}_3 && \text{(V.44)}\\
\underline{\tilde{e}}_3 &= D_{\vartheta 3a}\,\underline{\hat{e}}_a = -\sin\vartheta\,\underline{\hat{e}}_2 + \cos\vartheta\,\underline{\hat{e}}_3 && \text{(V.45)}\\
\underline{e}'_3 &= -\sin\vartheta\,(-\sin\varphi\,\underline{e}_1 + \cos\varphi\,\underline{e}_2) + \cos\vartheta\,\underline{e}_3 && \text{(V.46)}
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\underline{\omega} &= (\dot{\vartheta}\,\cos\varphi + \dot{\psi}\,\sin\vartheta\,\sin\varphi)\,\underline{e}_1 \\
&+ (\dot{\vartheta}\,\sin\varphi - \dot{\psi}\,\sin\vartheta\,\cos\varphi)\,\underline{e}_2 \\
&+ (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\,\cos\vartheta)\,\underline{e}_3
\end{aligned} \tag{V.47}$$

In Σ' sind $\underline{\hat{e}}_1$ und $\underline{e}_3$ durch $\{\underline{e}'_a\}$ auszudrücken:

$$\begin{aligned}
\underline{\hat{e}}_1 &= \underline{\tilde{e}}_1 = D^{-1}_{\psi 1a}\,\underline{e}'_a = \cos\psi\,\underline{e}'_1 - \sin\psi\,\underline{e}'_2 && \text{(V.48)}\\
\underline{e}_3 &= D^{-1}_{\varphi 3a}\,\underline{\hat{e}}_a = \underline{\hat{e}}_3\,D^{-1}_{\vartheta 3a}\,\underline{\tilde{e}}_a = D^{-1}_{\vartheta 3a}\,D^{-1}_{\psi ab}\,\underline{e}'_b && \text{(V.49)}\\
\underline{e}_3 &= \sin\psi\,\sin\vartheta\,\underline{e}'_1 + \cos\psi\,\sin\vartheta\,\underline{e}'_2 + \cos\vartheta\,\underline{e}'_3 && \text{(V.50)}
\end{aligned}$$

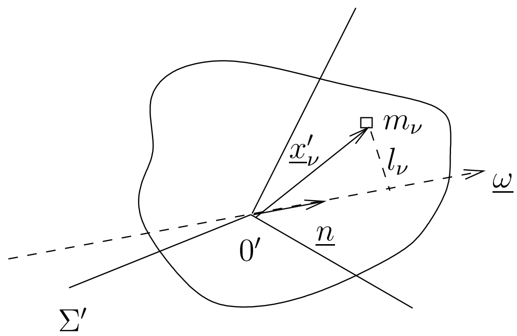
Es folgt

$$\begin{aligned}
\underline{\omega} &= (\dot{\varphi}\,\sin\psi\,\sin\vartheta + \dot{\vartheta}\,\cos\psi)\,\underline{e}'_1 \\
&+ (\dot{\varphi}\,\cos\psi\,\sin\vartheta - \dot{\vartheta}\,\sin\psi)\,\underline{e}'_2 \\
&+ (\dot{\varphi}\,\cos\vartheta + \dot{\psi})\,\underline{e}'_3 \quad .
\end{aligned} \tag{V.51}$$

2.4 Trägheitstensor

2.4.1 Trägheitsmoment um eine feste Achse

Wir betrachten die Rotationsbewegung eines starren Körpers um eine vorgegebene Drehachse, die durch den Koordinatenursprung gehen soll.



Hierbei sind $\underline{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit,

$$\underline{n} = \underline{\omega}/\omega \tag{V.52}$$

der Einheitsvektor in Richtung der Drehachse und l_ν der senkrechte Abstand des Massenpunktes m_ν von der Drehachse.

Die Größe

$$\Theta = \sum_\nu m_\nu \, l_\nu^2 \tag{V.53}$$

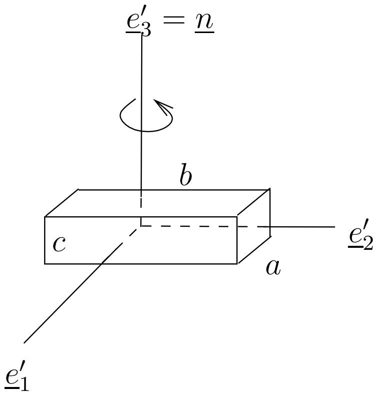
heißt Trägheitsmoment des starren Körpers bei Drehung um $\underline{n}$. Offensichtlich ist Θ von der Richtung der Drehachse abhängig.

Für die konkrete Berechnung eines Trägheitsmomentes zerlegen wir das Massenelement m_ν in immer kleinere Teile Δm_ν, summieren diese auf und bilden den Grenzwert für eine unendlich feine Zerlegung mit dem Ergebnis

$$\Theta = \lim_{N \to \infty} \sum_{\mu=1}^{N} l_\mu^2 \, \Delta m_\mu = \int_m l^2 \, dm = \int_V l^2 \, \rho \, dV. \tag{V.54}$$

Beispiel:

Homogener Quader ($\rho = \rho_0$) mit $\underline{n} = \underline{e}'_3$ durch Zentrum



$$\Theta = \int l^2 \rho_0 \, dV \tag{V.55}$$

$$\Theta = \rho_0 \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x_1'^2 + x_2'^2) \, dx_1' \, dx_2' \, dx_3' \tag{V.56}$$

$$\Theta = \rho_0 \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dx_3' \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\frac{x_1'^3}{3} + x_2'^2 \, x_1 \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx_2' \tag{V.57}$$

$$\Theta = \rho_0 \, c \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{a^3}{12} + x_2'^2 \, a \right) dx_2' \tag{V.58}$$

$$\Theta = \rho_0 \, c \left(\frac{a^3}{12} \cdot b + \frac{b^3}{12} \cdot a \right) \tag{V.59}$$

$$\Theta = \frac{m}{12} \left(a^2 + b^2 \right) \tag{V.60}$$

2.4.2 Steinerscher Satz

Bisher haben wir den Schwerpunkt des starren Körpers definiert durch

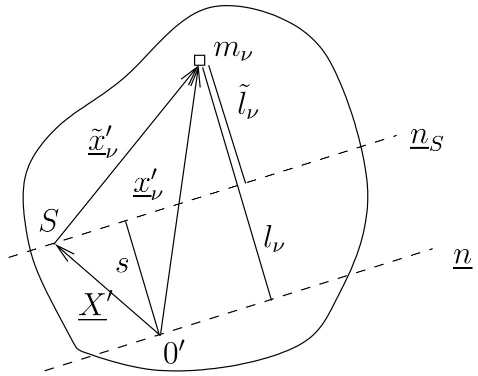
$$\underline{X}' = \frac{\sum_\nu m_\nu \, \underline{x}_\nu'}{m} \tag{V.61}$$

mit der Gesamtmasse

$$m = \sum_\nu m_\nu \tag{V.62}$$

nicht in die Überlegung einbezogen. Beim Steinerschen Satz wird darauf gerade Bezug genommen.

Wir betrachten jetzt zwei parallele Drehachsen $\underline{n}$ und $\underline{n}_S$. $\underline{n}$ verlaufe durch den Ursprung $0'$ und $\underline{n}_S$ durch den Schwerpunkt $\underline{X}'$. Das Trägheitsmoment ist in beiden Fällen zu berechnen.



Das Trägheitsmoment um die durch $0'$ zeigende Drehachse $\underline{n}$ ergibt sich zu

$$\Theta = \sum_\nu l_\nu^2 \, m_\nu. \tag{V.63}$$

Nun ist aber

$$l_\nu = |\underline{x}'_\nu| \cdot \sin(\underline{x}'_\nu, \underline{n}) = |\underline{x}'_\nu \times \underline{n}| \tag{V.64}$$

und somit folgt wegen

$$\underline{x}'_\nu = \underline{X}' + \underline{\tilde{x}}'_\nu \tag{V.65}$$

$$\Theta = \sum_\nu m_\nu \, (\underline{x}'_\nu \times \underline{n})^2 \tag{V.66}$$

$$\Theta = \sum_\nu m_\nu \{(\underline{X}' + \underline{\tilde{x}}'_\nu) \times \underline{n}\}^2 \tag{V.67}$$

$$\Theta = \sum_\nu m_\nu \{(\underline{X}' \times \underline{n})^2 + (\underline{\tilde{x}}'_\nu \times \underline{n})^2 + 2\,(\underline{X}' \times \underline{n})\,(\underline{\tilde{x}}'_\nu \times \underline{n})\} \tag{V.68}$$

$$\Theta = m\, s^2 + \sum_\nu m_\nu \, \tilde{l}_\nu^2 + 2\,(\underline{X}' \times \underline{n}) \sum_\nu m_\nu \underline{\tilde{x}}'_\nu \times \underline{n} \tag{V.69}$$

Wegen

$$\sum_\nu m_\nu \, \underline{\tilde{x}}'_\nu = \sum_\nu m_\nu (\underline{x}'_\nu - \underline{X}') = m\, \underline{X} - m\, \underline{X}' = 0 \tag{V.70}$$

und mit der Abkürzung

$$\Theta_S = \sum_\nu m_\nu \, \tilde{l}_\nu^2 \tag{V.71}$$

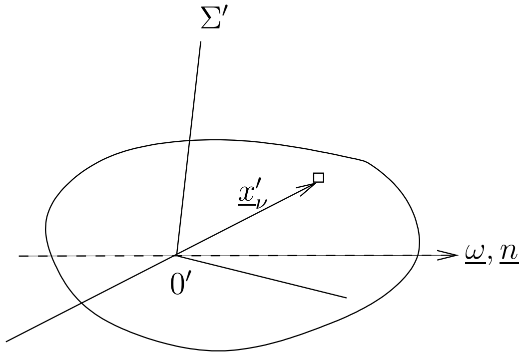
als Trägheitsmoment um die parallele Drehachse $\underline{n}_S$ durch den Schwerpunkt folgt der Satz von Steiner

$$\Theta = \Theta_S + m\, s^2. \tag{V.72}$$

Das Trägheitsmoment Θ bezüglich einer beliebigen Achse ist gleich dem Trägheitsmoment Θ_S bezüglich der zu ihr parallelen Achse durch den Schwerpunkt plus dem Trägheitsmoment der im Schwerpunkt vereinigten Gesamtmasse um die ursprüngliche Achse.

2.4.3 Trägheitsmoment um eine beliebige Achse

Die Berechnung des Trägheitsmomentes in dem vorhergehenden Abschnitt ist an die Vorgabe einer festen Drehachse gebunden. Immerhin ermöglicht der Satz von Steiner die einfache Berechnung des Trägheitsmomentes bei einer Parallelverschiebung der Drehachse. Jetzt soll das Trägheitsmoment so dargestellt werden, daß eine von der Richtung der Drehachsen unabhängige Größe herauspräpariert wird, aus der dann für beliebige Drehachsen das Trägheitsmoment leicht berechnet werden kann; diese Größe ist der Trägheitstensor.



Wir gehen aus von einem beliebigen körperfesten System Σ' des starren Körpers, dessen Ursprung $0'$ auf der Drehachse $\underline{n}$ liegt. Dann gilt nach den Überlegungen im vorherigen Abschnitt

$$\Theta = \sum_\nu m_\nu \, (\underline{x}'_\nu \times \underline{n})^2. \tag{V.73}$$

Unter Benutzung der Vektorgleichung

$$(\underline{a} \times \underline{b})^2 = \underline{a}^2 \, \underline{b}^2 - (\underline{a} \cdot \underline{b})^2 \tag{V.74}$$

formen wir um zu

$$\Theta = \sum_\nu m_\nu \{\underline{x}'^2_\nu - (\underline{x}'_\nu \, \underline{n})^2\}. \tag{V.75}$$

Wir versuchen nun, die Drehachse $\underline{n}$ "auszuklammern". Das gelingt, wenn wir den Trägheitstensor

$$\underline{\underline{\Theta}} = \sum_\nu m_\nu (\underline{x}'^2_\nu \, \underline{\underline{I}} - \underline{x}'_\nu \circ \underline{x}'_\nu) \tag{V.76}$$

einführen, wobei der rechte Term ein dyadisches Produkt darstellt. Allgemein wird die Dyade zweier beliebiger Vektoren $\underline{c}$ und $\underline{d}$ über

$$\underline{c} \circ \underline{d} = \begin{pmatrix} c_1 \, d_1 & c_1 \, d_2 & c_1 \, d_3 \\ c_2 \, d_1 & c_2 \, d_2 & c_2 \, d_3 \\ c_3 \, d_1 & c_3 \, d_2 & c_3 \, d_3 \end{pmatrix} = (c_a \, d_b) \tag{V.77}$$

definiert. $\underline{\underline{I}}$ ist die Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^3$. Dann gilt

$$\Theta = \underline{n} \, \underline{\underline{\Theta}} \, \underline{n}; \tag{V.78}$$

der Trägheitstensor ist von links und rechts mit dem Einheitsvektor der Drehachse zu multiplizieren. Man prüft leicht nach, daß tatsächlich

$$\Theta = \underline{n} \sum_\nu m_\nu \{ \underline{x}'^2_\nu \underline{\underline{I}} - \underline{x}'_\nu \circ \underline{x}'_\nu \} \underline{n} \tag{V.79}$$

$$\Theta = \sum_\nu m_\nu \{ \underline{x}'_\nu \underline{n} \underline{\underline{I}} \underline{n} - \underline{n} \underline{x}'_\nu \circ \underline{x}'_\nu \underline{n} \} \tag{V.80}$$

$$\Theta = \sum_\nu m_\nu \{ \underline{x}'^2_\nu \underline{n}^2 - (\underline{n} \underline{x}'_\nu) (\underline{x}'_\nu \underline{n}) \} \tag{V.81}$$

$$\Theta = \sum_\nu m_\nu \{ \underline{x}'^2_\nu - (\underline{x}'_\nu \underline{n})^2 \} \tag{V.82}$$

gilt.

2.4.4 Hauptachsendarstellung des Trägheitstensors

Der Trägheitstensor wird durch eine symmetrische Matrix dargestellt, denn es gilt

$$\Theta_{ab} = \sum_\nu m_\nu \{ \underline{x}'^2_\nu \delta_{ab} - x'_{\nu\,a} x'_{\nu\,b} \} = \Theta_{ba}. \tag{V.83}$$

Die Elemente von Θ_{ab} hängen zwar nicht von der Drehachse ab, wohl aber vom System Σ'. In einem willkürlich gewählten Koordinatensystem Σ' haben i.a. alle Θ_{ab} nicht verschwindende Werte.

Die Symmetrie

$$\underline{\underline{\Theta}} = \underline{\underline{\Theta}}^T \tag{V.84}$$

impliziert nun, daß $\underline{\underline{\theta}}$ nur reelle Eigenwerte hat und die zugehörigen Eigenvektoren orthogonal sind. Das Koordinatensystem aus diesen Eigenvektoren ist das s.g. Hauptachsensystem. Wird als Σ' das Hauptachsensystem gewählt, dann diagonalisiert $\underline{\underline{\Theta}}$. Die Nichtdiagonalelemente werden zu Null und die Diagonalelemente sind gerade die Eigenwerte von $\underline{\underline{\Theta}}$. Die Basisvektoren des Hauptachsensystems werden bevorzugt mit $\{\underline{e}_\xi, \underline{e}_\eta, \underline{e}_\zeta\}$ und die Hauptträgheitsmomente mit $\{A, B, C\}$ bezeichnet. Dann gilt

$$\underline{\underline{\Theta}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}. \tag{V.85}$$

Die Drehachse nimmt im Hauptachsensystem die Komponenten

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} n_\xi \\ n_\eta \\ n_\zeta \end{pmatrix} = n_\xi \underline{e}_\xi + n_\eta \underline{e}_\eta + n_\zeta \underline{e}_\zeta \tag{V.86}$$

an, und das entsprechende Trägheitsmoment schreibt sich in der Form

$$\Theta = \underline{n} \underline{\underline{\Theta}} \underline{n} = A n_\xi^2 + B n_\eta^2 + C n_\zeta^2. \tag{V.87}$$

Der Zusammenhang zwischen dem Trägheitsmoment und dem Trägheitstensor läßt sich geometrisch veranschaulichen. Dazu ordnet man dem Trägheitstensor durch die Gleichung

$$1 = \underline{Y} \underline{\underline{\Theta}} \underline{Y} = Y_a \Theta_{ab} Y_b \tag{V.88}$$

$$1 = \Theta_{11} Y_1^2 + \Theta_{22} Y_2^2 + \Theta_{33} Y_3^2 + 2\Theta_{12} Y_1 Y_2 + 2\Theta_{23} Y_2 Y_3 + 2\Theta_{31} Y_3 Y_1 \tag{V.89}$$

eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ zu, wobei

$$Y_a = \frac{n_a}{\sqrt{\Theta}} \tag{V.90}$$

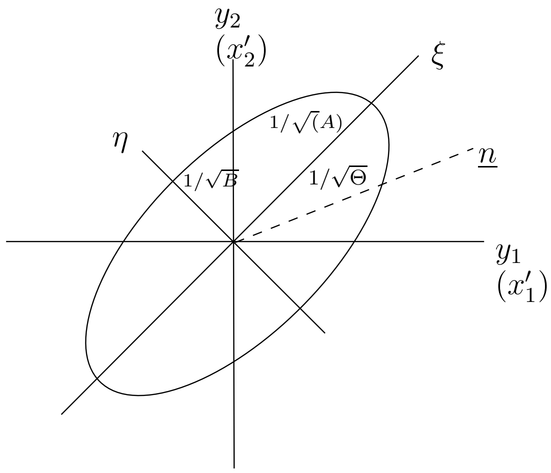
gesetzt wurde und alle möglichen Drehachsen betrachtet werden sollen. Die Gleichung gilt zunächst für ein beliebiges System Σ'. Da für die Diagonalelemente stets

$$\Theta_{11}, \Theta_{22}, \Theta_{33} \geq 0 \tag{V.91}$$

gilt, kommt von den möglichen Flächen 2. Ordnung nur das Ellipsoid in Betracht, und man nennt die Gleichung (V.89) das Trägheitsellipsoid. Zeichnet man in dieses Ellipsoid jetzt eine feste Drehachse $\underline{n}$ ein, so schneidet sie die Fläche gerade im Punkt Y_a. Der Abstand vom Ursprung $0'$ ist dann $1/\sqrt{\Theta}$, denn es gilt

$$|\underline{Y}| = \sqrt{\underline{Y}^2} = \sqrt{\frac{\underline{n}^2}{\Theta}} = \frac{1}{\sqrt{\Theta}}. \tag{V.92}$$

Die Bedeutung des Hauptachsensystems erklärt sich dann von selbst.



Im Hauptachsensystem gilt offensichtlich

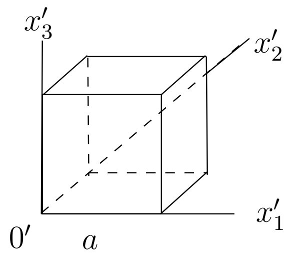
$$1 = A\,\xi^2 + B\,\eta^2 + C\,\zeta^2 \tag{V.93}$$

mit

$$\xi = \frac{n_\xi}{\sqrt{\Theta}} \quad , \quad \eta = \frac{n_\eta}{\sqrt{\Theta}} \quad , \quad \zeta = \frac{n_\zeta}{\sqrt{\Theta}}. \tag{V.94}$$

1. Beispiel:

Homogener Würfel mit Eckabstützung



$$\Theta_{11} = \rho_0 \int_0^a (\underline{x}'^2 - x_1'^2)\, dx_1'\, dx_2'\, dx_3' - \rho \int_0^a (x_2'^2 + x_3'^2)\, dx_1'\, dx_2'^2\, dx_3'^2 \tag{V.95}$$

$$\Theta_{11} = \rho_0\, a \int_0^a \left[\frac{x_2'^3}{3} + x_3'^2\, x_2'\right]_0^a dx_3' = \rho_0\, a \int_0^a \left(\frac{a^3}{3} + x_3'^2\, a\right) dx_3' \tag{V.96}$$

$$\Theta_{11} = \rho_0\, a \left[\frac{a^3}{3}\, x_3' + a\, \frac{x_3'^3}{3}\right]_0^a = \rho_0\, a \left(\frac{a^4}{3} + \frac{a^4}{3}\right) = \rho_0\, a^3\, \frac{2}{3}\, a^2 \tag{V.97}$$

$$\Theta_{11} = \frac{2}{3}\, m\, a^2 \tag{V.98}$$

$$\Theta_{22} = \Theta_{33} = \Theta_{11} = \frac{2}{3}\, m\, a^2 \tag{V.99}$$

$$\Theta_{12} = \rho_0 \int_0^a (-x_1'\, x_2')\, dx_1'\, dx_2'\, dx_3' = -\rho_0\, a \int_0^a \left[\frac{x_1'^2}{2}\right]_0^a x_2'\, dx_2' \tag{V.100}$$

$$\Theta_{12} = -\rho_0\, \frac{a^3}{2} \left[\frac{x_2'^2}{2}\right]_0^a = -\rho_0\, a^3\, \frac{a^2}{4} \tag{V.101}$$

$$\Theta_{12} = -\frac{1}{4}\, m\, a^2 \tag{V.102}$$

$$\Theta_{23} = \Theta_{13} = \Theta_{12} = -\frac{1}{4}\, m\, a^2 \tag{V.103}$$

$$\underline{\underline{\Theta}} = m\, a^2 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{m\, a^2}{12} \begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix} \tag{V.104}$$

Eigenwerte:

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & -3 & -3 \\ -3 & 8-\lambda & -3 \\ -3 & -3 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)^3 - 27\,(8-\lambda) - 54 = 0 \tag{V.105}$$

$$\lambda_1 = 2 \quad , \quad \lambda_{2/3} = 11 \quad \text{(2-fach entartet)} \tag{V.106}$$

$$A = \frac{m\, a^2}{12} \cdot 2 \quad , \quad B = \frac{m\, a^2}{12} \cdot 11 \quad , \quad C = \frac{m\, a^2}{12} \cdot 11 \tag{V.107}$$

Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = 2 : \qquad \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \underline{e}_\xi = 0 \tag{V.108}$$

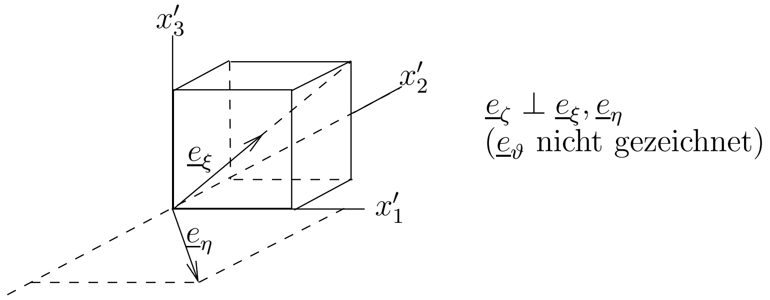
$$\underline{e}_\xi \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{V.109}$$

$$\underline{e}_\xi = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{V.110}$$

$$\lambda_{2/3} = 11: \qquad \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \underline{e}_{\eta,\zeta} = 0 \tag{V.111}$$

$$\underline{e}_\eta \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{e}_\zeta \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{V.112}$$

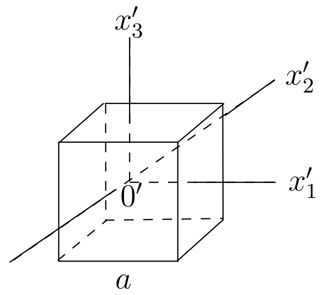
$$\underline{e}_\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{e}_\zeta = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{V.113}$$



$\underline{e}_\xi$ zeigt in Richtung der Raumdiagonalen. $\underline{e}_\eta$ und $\underline{e}_\zeta$ liegen in der Ebene, auf der $\underline{e}_\xi$ senkrecht steht. $\underline{e}_\eta$ und $\underline{e}_\zeta$ sind nicht eindeutig bestimmt.

2. Beispiel

Homogener Würfel mit Schwerpunktabstützung



Aus dem Beispiel “ Homogener Quader” des Abschnitts V.2.4.1 übernehmen wir

$$\Theta_{11} = \rho_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x_2'^2 + x_3'^2)\, dx'_1\, dx'_2\, dx'_3 = \frac{m}{12} \cdot 2\, a^2 = \frac{1}{6}\, m\, a^2 \tag{V.114}$$

$$\Theta_{22} = \Theta_{33} = \Theta_{11} = \frac{1}{6}\, m\, a^2 \tag{V.115}$$

$$\Theta_{12} = \rho_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (-x'_1\, x'_2)\, dx'_1\, dx'_2\, dx'_3 \tag{V.116}$$

$$\Theta_{12} = -\rho\, a \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[\frac{x_1'^2}{2}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx'_2 = 0 \tag{V.117}$$

$$\Theta_{23} = \Theta_{13} = \Theta_{12} = 0 \tag{V.118}$$

Das gewählte Koordinatensystem ist offensichtlich bereits das Hauptachsensystem.

3. Beispiel:

Verifizierung des Steinerschen Satzes durch Vergleich der beiden Würfel-Beispiele

- Drehachse $\underline{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ für das 1. Beispiel ergibt

$$\Theta = \underline{n}\,\underline{\underline{\Theta}}\,\underline{n} = \frac{m\,a^2}{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{V.119}$$

$$\Theta = \frac{m\,a^2}{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} \tag{V.120}$$

$$\Theta = \frac{8}{12}\,m\,a^2 = \frac{2}{3}\,m\,a^2 \tag{V.121}$$

- Drehachse $\underline{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ für das 2. Beispiel (Schwerpunktsystem) ergibt

$$\Theta_S = \underline{n}\,\underline{\underline{\Theta}}\,\underline{n} = \frac{1}{6}\,m\,a^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\,m\,a^2 \tag{V.122}$$

- Abstand der beiden parallelen Drehachsen ist die halbe Flächendiagonale, also $\frac{\sqrt{2}\,a}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}} = s$

$$\Theta - \Theta_S = m\,a^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) = m\,a^2\,\frac{3}{6} = m\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = m\,s^2. \tag{V.123}$$

Bemerkung:

Der Trägheitstensor $\underline{\underline{\Theta}}$ ist ein Tensor 2. Stufe. Derartige Tensoren können in Form einer Matrix dargestellt werden. Allerdings ist keinesfalls jede Matrix ein Tensor 2. Stufe. Allgemein sind Tensoren über ihre Transformationseigenschaften definiert. Hier gehen wir nicht näher darauf ein. Die umfassende Einführung von Tensoren erfolgt im Rahmen der Vorlesung “Klassische Feldtheorie”.

3 Dynamik des starren Körpers

Entsprechend den 6 Freiheitsgraden des allgemeinen starren Körpers sind 6 generalisierte Koordinaten einzuführen und diese aus den Bewegungsgleichungen als Funktionen der Zeit zu bestimmen. Als generalisierte Koordinaten eignen sich meist die drei (kartesischen) Koordinaten des Schwerpunktes und die drei Eulerschen Winkel.

Die Bewegungsgleichungen selbst können auf formal verschiedenen Wegen erhalten werden:

1. Ein Weg geht über die Lagrange-Funktion und die Lagrangeschen Gleichungen 2. Art. Für die Lagrange-Funktion werden die kinetische Energie und die potentielle Energie als Funktionen der generalisierten Koordinaten benötigt.

2. Ein anderer inhaltlich gleichwertiger Weg benutzt direkt uns schon bekannte Bilanzgleichungen für ein Massenpunktystem. Insbesondere sind dies der in Abschnitt II.4.2 abgeleitete und im raumfesten System Σ aufzuschreibende Schwerpunktsatz (II.237)

$$\underline{\dot{P}} = m\,\underline{\ddot{X}} = \underline{F}^{\text{ext}} = \sum_\nu \underline{F}_\nu^{\text{ext}} \tag{V.124}$$

und die in Abschnitt II.4.3 abgeleitete und ebenfalls in Σ aufzuschreibende Gesamtdrehimpulsbilanz (II.252)

$$\underline{\dot{L}} = \underline{M} = \sum_\nu \underline{x}_\nu \times \underline{F}_\nu^{\text{ext}}. \tag{V.125}$$

Beide Wege sind je nach Anwendungsfall von Vorteil. Wir wollen deshalb auch beide Wege vorbereiten und müssen dazu insbesondere den Zusammenhang der kinetischen Energie, der potentiellen Energie und des Drehimpulses mit der Winkelgeschwindigkeit klären.

3.1 Kinetische Energie des starren Körpers

Wir gehen von der kinetischen Energie im raumfesten System Σ aus. Dort gilt definitionsgemäß

$$T = \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu\,\underline{v}_\nu^2. \tag{V.126}$$

Nach Gleichung (II.30) bzw. (V.3) benutzen wir

$$\underline{v}_\nu = \underline{v}_{tr} + \underline{\omega} \times \underline{x}'_\nu \tag{V.127}$$

und erhalten

$$T = \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu \underline{v}_{tr}^2 + \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu\,(\underline{\omega} \times \underline{x}'_\nu)^2 + \sum_\nu m_\nu\,\underline{v}_{tr}\,(\underline{\omega} \times \underline{x}'_\nu) \tag{V.128}$$

Für weitere Überlegungen wollen wir uns nun auf die zwei wichtigen Fälle konzentrieren:

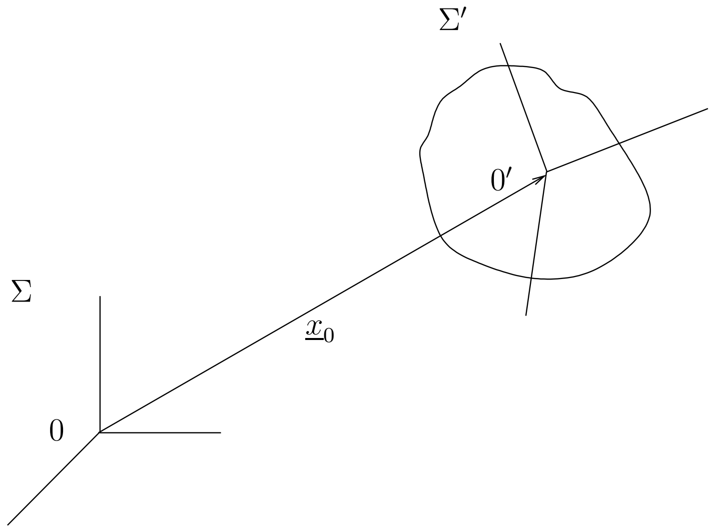
- entweder soll der Nullpunkt $0'$ des körperfesten Systems Σ' ruhen, so daß

$$\underline{v}_{tr} = 0 \tag{V.129}$$

- oder der Nullpunkt $0'$ soll mit dem Schwerpunkt $\underline{X}'$ des starren Körpers zusammenfallen, also

$$\underline{X}' = \frac{1}{m}\sum_\nu m_\nu\,\underline{x}'_\nu = 0. \tag{V.130}$$

3.1.1 Ruhender $0'$-Punkt



Vorausgestzt wird $\underline{x}_0 = const$ und somit $\underline{v}_{tr} = 0$. Dann folgt

$$T = \frac{1}{2} \sum_\nu m_\nu \, (\underline{\omega} \times \underline{x}'_\nu)^2 \equiv T_{rot}. \tag{V.131}$$

Die gesamte kinetische Energie ist reine Rotationsenergie T_{rot}. Die formen wir um zu

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_\nu m_\nu \, \{\underline{\omega}^2 \, \underline{x}'^2_\nu - (\underline{\omega} \, \underline{x}'_\nu)^2\} \tag{V.132}$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \underline{\omega} \sum_\nu m_\nu \, \{\underline{x}'^2_\nu \, \underline{\underline{I}} - \underline{x}'_\nu \circ \underline{x}'_\nu\} \, \underline{\omega} \tag{V.133}$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \underline{\omega} \, \underline{\underline{\Theta}} \, \underline{\omega} \tag{V.134}$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \underline{n} \, \underline{\underline{\Theta}} \, \underline{n} \, \omega^2 \tag{V.135}$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \, \Theta \, \omega^2. \tag{V.136}$$

Man beachte die Analogie zur Translationsenergie

$$T_{tr} \leftrightarrow T_{rot} \quad ; \quad m \leftrightarrow \Theta \quad ; \quad v \leftrightarrow \omega. \tag{V.137}$$

Ist Σ' das Haupachsensystem $\{\underline{e}_\xi, \underline{e}_\eta, \underline{e}_\zeta\}$, vereinfacht sich die Form zu

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix} \tag{V.138}$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \, (A \, \omega_\xi^2 + B \, \omega_\eta^2 + C \, \omega_\zeta^2). \tag{V.139}$$

Häufig weren die Komponenten des Vektors der Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ im Hauptachsensystem durch p, q, r, also

$$\underline{\omega} = \omega_\xi \, \underline{e}_\xi + \omega_\eta \, \underline{e}_\eta + \omega_\zeta \, \underline{e}_\zeta \equiv p \, \underline{e}_\xi + q \, \underline{e}_\eta + r \, \underline{e}_\zeta \tag{V.140}$$

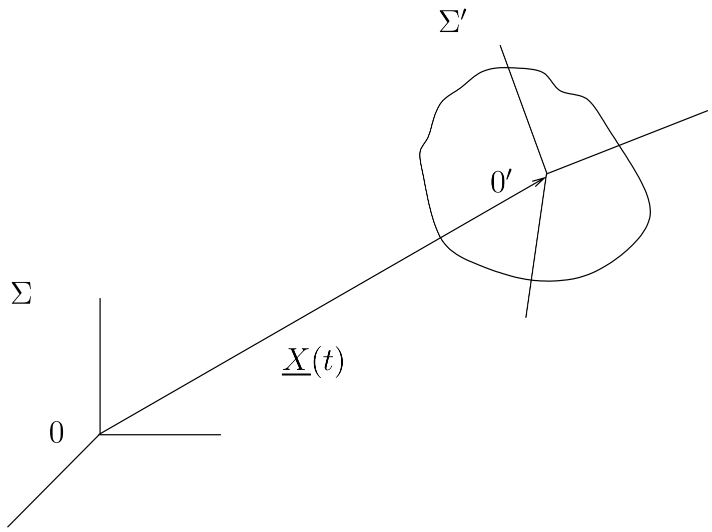
abgekürzt, so daß zu schreiben ist

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \, (A \, p^2 + B \, q^2 + C \, r^2). \tag{V.141}$$

Da $\underline{\omega}$ durch die Gleichung (V.51) auf die Eulerschen Winkel und deren Ableitungen zurückgeführt ist, gilt gleiches auch für p, q, r; als $\{\underline{e}_1', \underline{e}_2', \underline{e}_3'\}$ ist entsprechend $\{\underline{e}_\xi, \underline{e}_\eta, \underline{e}_\zeta\}$ zu wählen. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} T_{rot} &= \frac{1}{2} A \,(\dot{\varphi}\, \sin\psi\, \sin\vartheta + \dot{\vartheta}\, \cos\psi)^2 \\ &+ \frac{1}{2} B \,(\dot{\varphi}\, \cos\psi\, \sin\vartheta - \dot{\vartheta}\, \sin\psi)^2 \\ &+ \frac{1}{2} C \,(\dot{\varphi}\, \cos\vartheta + \dot{\psi})^2. \end{aligned} \tag{V.142}$$

3.1.2 Körperfestes Schwerpunktsystem



Vorausgesetzt wird $\underline{x}_0 = \underline{X}(t)$ und somit

$$\underline{v}_{tr} = \dot{\underline{X}}, \tag{V.143}$$

$$\underline{X}' = 0 \tag{V.144}$$

Damit folgt

$$T = \frac{1}{2} \sum_\nu m_\nu \dot{\underline{X}}^2 + \frac{1}{2} \sum_\nu m_\nu \,(\underline{\omega} \times \underline{x}_\nu')^2 + \sum_\nu m_\nu \dot{\underline{X}} \,(\underline{\omega} \times \underline{x}_\nu') \tag{V.145}$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\underline{X}}^2 + T_{rot} + \dot{\underline{X}} \,(\underline{\omega} \times \underline{X}') \tag{V.146}$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\underline{X}}^2 + T_{rot} = T_{tr} + T_{rot} \tag{V.147}$$

Die kinetische Energie setzt sich in diesem System aus der Translationsenergie der im Schwerpunkt konzentrierten Gesamtmassen und der Rotationsenergie zusammen.

3.2 Drehimpuls des starren Körpers

Wir betrachten den Drehimpuls im raumfesten System Σ. Dort gilt definitionsgemäß für den Drehimpuls

$$\underline{L} = \sum_\nu \underline{x}_\nu \times \underline{p}_\nu = \sum_\nu m_\nu \, \underline{x}_\nu \times \underline{v}_\nu . \tag{V.148}$$

Wir beziehen in die Betrachtung nun das körperfeste System Σ' ein. Es gilt

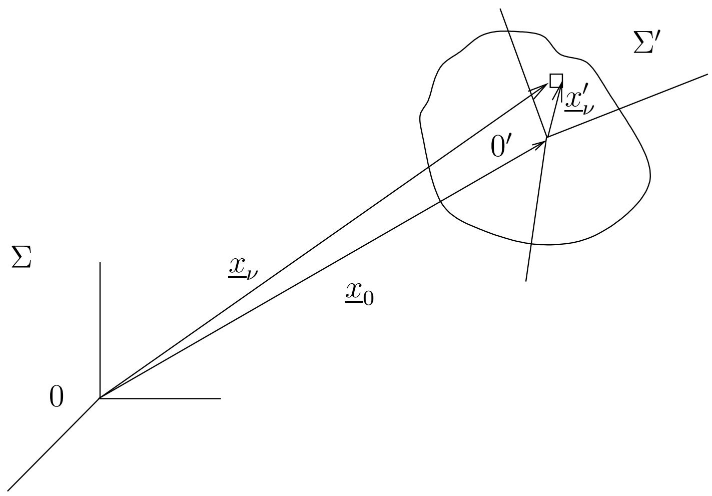
$$\underline{x}_\nu = \underline{x}_0 + \underline{x}'_\nu \qquad \text{(V.149)}$$

und entsprechend Gleichung (V.3)

$$\underline{v}_\nu = \underline{v}_{tr} + \underline{\omega} \times \underline{x}'_\nu \qquad \text{(V.150)}$$

mit

$$\underline{v}_{tr} = \underline{\dot{x}}_0. \qquad \text{(V.151)}$$



So folgt

$$\begin{aligned} \underline{L} &= \sum_\nu m_\nu \, (\underline{x}_0 + \underline{x}'_\nu) \times (\underline{v}_{tr} + \underline{\omega} \times \underline{x}'_\nu) && \text{(V.152)} \\ &= \sum_\nu m_\nu \, \underline{x}_0 \times \underline{\dot{x}}_0 && \text{(V.153)} \\ &+ \sum_\nu m_\nu \, \underline{x}'_\nu \times (\underline{\omega} \times \underline{x}'_\nu) \\ &+ \sum_\nu m_\nu \, \underline{x}_0 \times (\underline{\omega} \times \underline{x}'_\nu) \\ &+ \sum_\nu m_\nu \, \underline{x}'_\nu \times \underline{\dot{x}}_0 \end{aligned}$$

Die weitere Auswertung führen wir wiederum für die bereits für die kinetische Energie ausgewählten wichtigsten Fälle durch.

3.2.1 Ruhender $0'$-Punkt

Hier gilt $\underline{x}_0 = const$ bzw. $\underline{v}_{tr} = 0$ und der Drehimpuls nimmt die Form

$$\begin{aligned} \underline{L} &= \sum_\nu m_\nu \, \underline{x}'_\nu \times (\underline{\omega} \times \underline{x}'_\nu) && \text{(V.154)} \\ &+ m \, \underline{x}_0 \times (\underline{\omega} \times \underline{X}'), \\ \underline{L} &= \underline{L}' + \underline{L}_{0'} && \text{(V.155)} \end{aligned}$$

an, wobei

$$\underline{L}' = \sum_\nu m_\nu \, \underline{x}'_\nu \times (\underline{\omega} \times \underline{x}'_\nu) \tag{V.156}$$

den Eigendrehimpuls und

$$\underline{L}_{0'} = m \, \underline{x}_0 \times (\underline{\omega} \times \underline{X}') = m \, \underline{x}_0 \times \dot{\underline{X}}' \tag{V.157}$$

den Drehimpuls der im Schwerpunkt $\underline{X}$ vereinigten Gesamtmasse darstellen.

Den Eigendrehimpuls $\underline{L}'$ formen wir unter Verwendung der Relation

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b} \, (\underline{a} \, \underline{c}) - \underline{c} \, (\underline{a} \, \underline{b}) \tag{V.158}$$

um zu

$$\underline{L}' = \sum_\nu m_\nu \, \{\underline{\omega} \, \underline{x}'^2_\nu - \underline{x}'_\nu \, (\underline{\omega} \times \underline{x}'_\nu)\}. \tag{V.159}$$

Ein Vergleich mit der kinetischen Energie der Rotation liefert

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \underline{L}' \, \underline{\omega}. \tag{V.160}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \underline{L}' &= \sum_\nu m_\nu \, (\underline{x}'^2_\nu \, \underline{\underline{I}} - \underline{x}'_\nu \circ \underline{x}'_\nu) \, \underline{\omega} && \text{(V.161)} \\ \underline{L}' &= \underline{\underline{\Theta}} \, \underline{\omega}. && \text{(V.162)} \end{aligned}$$

Der Eigendrehimpuls $\underline{L}'$ und die Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ stehen zwar in einem linearen Zusammenhang, jedoch gilt i.a.

$$\underline{L}' \not\parallel \underline{\omega}. \tag{V.163}$$

Einfach wird die Beziehung, wenn für Σ' das Hauptachsensystem $\{\underline{e}_\xi, \underline{e}_\eta, \underline{e}_\zeta\}$ verwendet wird. Dann gilt

$$\underline{L}' = A \, \omega_\xi \, \underline{e}_\xi + B \, \omega_\eta \, \underline{e}_\eta + C \, \omega_\zeta \, \underline{e}_\zeta. \tag{V.164}$$

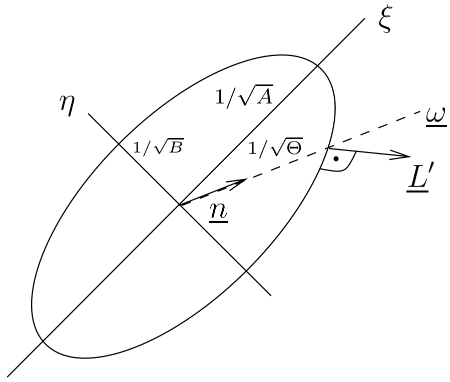
Für den Betrag des Eigendrehimpulses berechnen wir

$$\begin{aligned} L' &= \sqrt{\underline{L}'^2} = \sqrt{\underline{\omega} \, \underline{\underline{\Theta}} \, \underline{\underline{\Theta}} \, \underline{\omega}} = \sqrt{\underline{n} \, \underline{\underline{\Theta}} \, \underline{n} \, \underline{n} \, \underline{\underline{\Theta}} \, \underline{n}} \, \omega && \text{(V.165)} \\ L' &= \sqrt{\Theta^2} \, \omega = \Theta \, \omega. && \text{(V.166)} \end{aligned}$$

Den Zusammenhang von Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit kann man auch am Trägheitsellipsoid

$$1 = A \, \xi^2 + B \, \eta^2 + C \, \zeta^2 \tag{V.167}$$

demonstrieren.



Gradientenbildung liefert

$$2\,(A\,\xi\,\underline{e}_\xi + B\,\eta\,\underline{e}_\eta + C\,\zeta\,\underline{e}_\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\Theta}}\,(A\,n_\xi\,\underline{e}_\xi + B\,n_\eta\,\underline{e}_\eta + C\,n_\zeta\,\underline{e}_\zeta) \tag{V.168}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\Theta}\,\omega}\,(A\,\omega_\xi\,\underline{e}_\xi + B\,\omega_\eta\,\underline{e}_\eta + C\,\omega_\zeta\,\underline{e}_\zeta) \tag{V.169}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\Theta}\,\omega}\,\underline{L}', \tag{V.170}$$

d.h. $\underline{L}'$ ist proportional zum Gradienten und steht somit senkrecht auf dem Trägheitsellipsoid.

3.2.2 Körperfestes Schwerpunktsystem

Der Ursprung $0'$ im körperfesten System Σ' stimme jetzt mit dem Schwerpunkt überein. So ist

$$\underline{x}_0 = \underline{X}, \tag{V.171}$$

$$\underline{X}' = 0. \tag{V.172}$$

Der Drehimpuls nimmt die Form

$$\underline{L} = m\underline{X} \times \dot{\underline{X}} + \sum_\nu m_\nu\,\underline{x}'_\nu \times (\underline{\omega} \times \underline{x}'_\nu) = \underline{L}' + \underline{L}_S \tag{V.173}$$

an. Die weiteren Terme verschwinden wegen $\underline{X}' = 0$. Der Eigendrehimpuls $\underline{L}'$ stimmt genau mit der im vorhergehenden Abschnitt untersuchten Form überein. Der weitere Anteil

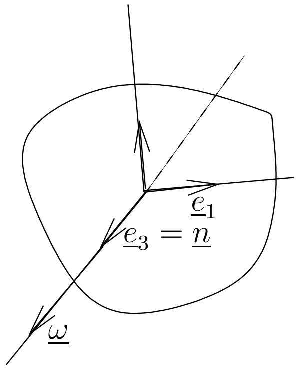
$$\underline{L}_S = m\,\underline{X} \times \dot{\underline{X}} \tag{V.174}$$

beschreibt den Drehimpuls der im Schwerpunkt vereinigten Gesamtmasse.

4 Spezielle Probleme

4.1 Bewegung um eine feste Achse

Wir positionieren das raumfeste System Σ gerade so, daß die $\underline{e}_3$-Achse mit der Drehachse $\underline{n}$ zusammenfällt. Es gilt $\underline{\omega} = \omega\,\underline{e}_3$.



Wir untersuchen die beiden eingangs diskutierten Zugänge, um die Bewegungsgleichungen aufzufinden.

Der Zugang über die Bilanzgleichungen führt auf

$$\dot{L}_3 = M_3. \tag{V.175}$$

Nun ist

$$L_3 = \Theta_{3a}\,\omega_a = \Theta_{33}\,\omega = \Theta\,\omega \tag{V.176}$$

da

$$\Theta = \underline{n}\,\underline{\underline{\Theta}}\,\underline{n} = \Theta_{33}. \tag{V.177}$$

Die explizite Einführung des körperfesten Systems Σ' ist hier nicht notwendig, da Θ auch in Σ leicht auszurechnen ist. M_3 ist das äußere Drehmoment.

Mit

$$\omega = \dot{\varphi} \tag{V.178}$$

ergibt die Bilanzgleichung

$$\Theta\,\ddot{\varphi} = M_3. \tag{V.179}$$

Der Zugang über die L II erfordert die Konstruktion der Lagrange-Funktion. Da kinetische Energie der Translation nicht auftritt, gilt

$$L = T_{rot} - V, \tag{V.180}$$

wobei das Potential von φ und t abhängen kann. Also folgt nach Gleichung (V.136)

$$L = \frac{\Theta}{2}\,\dot{\varphi}^2 - V(\varphi, t) \tag{V.181}$$

und somit

$$d_t\,\partial_{\dot{\varphi}}L - \partial_{\varphi}L = \Theta\,\ddot{\varphi} + \partial_{\varphi}V = 0. \tag{V.182}$$

Durch Vergleich finden wir

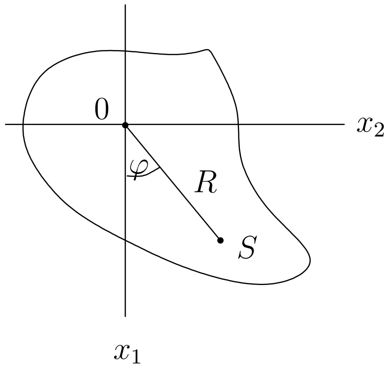
$$\Theta\,\ddot{\varphi} = -\partial_{\varphi}V = M_3. \tag{V.183}$$

Ist das Potential zeitunabhängig (konservativ), so gilt der Energieerhaltungssatz

$$T_{rot} + V = \frac{\Theta}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi) = U = const. \tag{V.184}$$

Diese Gleichung kann z.B. durch Separation gelöst werden.

Als konkrete Anwendung betrachten wir das physische Pendel mit einer horizontalen Drehachse $\underline{\omega} = \omega\, \underline{e}_3$ im homogenen Schwerefeld.



Der Abstand des Schwerpunktes S von der Drehachse sei

$$R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}. \tag{V.185}$$

Das Potential berechnet sich zu

$$V = -\sum_\nu m_\nu\, g\, x_{1\nu} = -g\, m X_1 = -g\, m\, R\, \cos\varphi. \tag{V.186}$$

Somit folgt

$$L = T - V = \frac{\Theta}{2}\, \dot{\varphi}^2 + g\, m\, R\, \cos\varphi \tag{V.187}$$

sowie

$$d_t\, \partial_{\dot{\varphi}} L - \partial_\varphi L = \Theta\, \ddot{\varphi} + m\, g\, R\, \sin\varphi = 0 \tag{V.188}$$

bzw.

$$\ddot{\varphi} + \frac{m\, g\, R}{\Theta}\, \sin\varphi = 0. \tag{V.189}$$

Der Vergleich mit der Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels

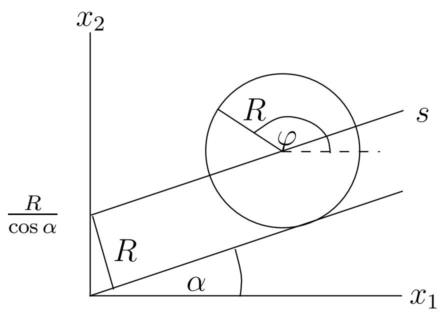
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\, \sin\varphi = 0 \tag{V.190}$$

zeigt, daß das physische Pendel so schwingt, wie ein mathematisches mit der "reduzierten" Pendellänge

$$l = \frac{\Theta}{m\, R}. \tag{V.191}$$

4.2 Abrollender Zylinder

Dieses System hat zwar ebenfalls nur einen Rotationsfreiheitsgrad, allerdings ist die Achse nicht fest.



Der homogene Zylinder rollt auf der schiefen Ebene ab ohne zu gleiten. Der Massenmittelpunkt führt eine Translation entlang s aus und der Zylinder rotiert dabei um den Schwerpunkt. Die Situation entspricht damit genau der im Abschnitt V.3.2.1 untersuchten. Für die kinetische Energie gilt

$$T = T_{tr} + T_{rot} = \frac{m}{2}\,\dot{s}^2 + \frac{\Theta_S}{2}\,\dot{\varphi}^2. \tag{V.192}$$

Nun sind s und φ aber nicht unabhängig, sondern durch die Rollbedingung

$$ds = -R\,d\varphi \tag{V.193}$$

bzw.

$$\dot{s} = -R\,\dot{\varphi} \tag{V.194}$$

verbunden. Das Potential berechnet sich aus

$$V = \sum_\nu m_\nu\, g\, x_{2\nu} = g\, m\, X_2 = m\,\frac{R}{\cos\alpha} + m\, g\, s\,\sin\alpha. \tag{V.195}$$

Betrachten wir s als generalisierte Koordinate so folgen die Lagrange-Funktion und die L II zu

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2}\,\dot{s}^2 + \frac{\Theta_S}{2}\,\frac{\dot{s}^2}{R^2} - m\,g\sin\alpha\, s - m\,g\frac{R}{\sin\alpha}, && \text{(V.196)}\\ d_t\,\partial_{\dot{s}}L - \partial_s L &= (m + \frac{\Theta_S}{R^2})\,\ddot{s} + m\,g\,\sin\alpha = 0. && \text{(V.197)} \end{aligned}$$

Mit dem Trägheitsmoment

$$\begin{aligned} \Theta_S &= \rho_0 \int (x_1'^2 + x_2')^2\, dx_1'\, dx_2'\, dx_3' = \rho_0\, l\, 2\,\pi \int_0^R \rho'^2\,\rho'\, d\rho' && \text{(V.198)}\\ \Theta_S &= \rho_0\, l\, 2\pi\,\frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}\, m\, R^2 && \text{(V.199)} \end{aligned}$$

finden wir

$$\ddot{s} = -\frac{2}{3}\, g\,\sin\alpha. \tag{V.200}$$

Die Beschleunigung des abrollenden Zylinders beträgt somit nur zwei Drittel der Beschleunigung, die er beim reibungsfreien Abgleiten annehmen würde.

Wir wollen jetzt die Bewegungsgleichung mit Hilfe des Steinerschen Satzes noch etwas umformen und eine interessante Interpretation vornehmen. Multiplikation der Bewegungsgleichung (V.197) mit R^2 ergibt

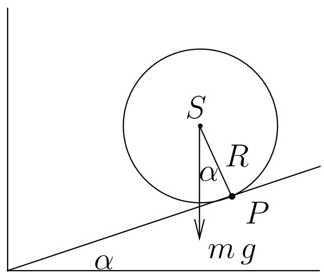
$$(\Theta_S + m\,R^2)\,\ddot{s} = -m\,g\,R^2\,\sin\alpha \tag{V.201}$$

bzw. mit

$$\Theta_P = \Theta_S + m\,R^2 \tag{V.202}$$

sowie der Rollbedingung folgt

$$\Theta_P\,\ddot{\varphi} = m\,g\,R\,\sin\alpha. \tag{V.203}$$



Gemäß dem Steinerschen Satz ist Θ_P das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse um P entlang der Berührungslinie zwischen Zylinder und schiefer Ebene. Die rechte Seite ist gerade das Drehmoment der im Schwerpunkt angreifenden Schwerkraft um den Drehpunkt P. Das Abrollen des Zylinders erlaubt somit zwei gleichwertige Betrachtungen:

1. Rotation um den Schwerpunkt plus Translation des Schwerpunktes.
2. Reine Rotation um den Auflagepunkt P ohne Translation.

Abschließend wollen wir noch skizzieren wie die Bewegungsgleichung über die Bilanzgleichungen zu erhalten ist. Wegen der notwendigen Berücksichtigung der Zwangskräfte ist dieses Vorgehen aber weniger elegant und dient uns nur zur Übung.

Wir betrachten die Situation wie in Abschnitt V.3.2.2, das körperfeste System Σ' sei im Schwerpunkt des Zylinders angebracht ($\underline{X}' = 0$) und der Zylinder sei symmetrisch positioniert, so daß sein Schwerpunkt eine verschwindende X_3-Komponente habe. Für den Drehimpuls übernehmen wir aus Gleichung (V.173)

$$\underline{L} = \underline{L}' + \underline{L}_S \tag{V.204}$$

mit dem Eigendrehimpuls

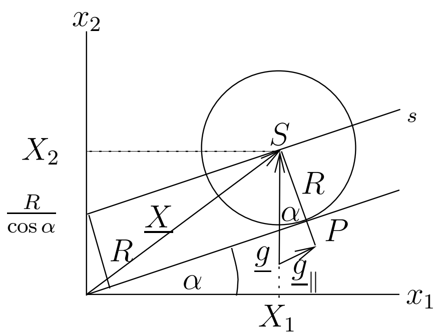
$$\underline{L}' = \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega} \tag{V.205}$$

und dem Drehimpuls der Schwerpunktbewegung

$$\underline{L}_S = m\,\underline{X} \times \underline{\dot{X}}. \tag{V.206}$$

Nur die 3. Komponente ergibt einen nichtverschwindenden Beitrag in der Bilanz. Sie ist

$$\dot{L}_3 = \dot{L}'_3 + \dot{L}_{S3} = \Theta_S \cdot \dot{\omega} + m\,(\underline{X} \times \underline{\ddot{X}})_3 = M_3. \tag{V.207}$$



Zum einen ist

$$(\underline{X} \times \ddot{\underline{X}})_3 = X_1\,\ddot{X}_2 - X_2\,\ddot{X}_1. \tag{V.208}$$

Einarbeitung der Nebenbedingung

$$X_2 = X_1 \cdot \tan\alpha + \frac{R}{\cos\alpha} \tag{V.209}$$

und Umschrift auf s über

$$X_1 = s \cdot \cos\alpha \tag{V.210}$$
$$\ddot{X}_1 = \ddot{s}\,\cos\alpha \tag{V.211}$$
$$X_2 = s \cdot \sin\alpha + \frac{R}{\cos\alpha} \tag{V.212}$$
$$\ddot{X}_2 = \ddot{s}\,\sin\alpha \tag{V.213}$$

liefert

$$(\underline{X} \times \ddot{\underline{X}})_3 = \ddot{s}\,s\,\sin\alpha\,\cos\alpha - \ddot{s}\,s\,\sin\alpha\,\cos\alpha - \ddot{s}\,R = -\ddot{s}\,R. \tag{V.214}$$

Zum anderen ist

$$M_3 = \sum_\nu (\underline{x}_\nu \times \underline{F}_\nu^{\text{ext}})_3. \tag{V.215}$$

Als externe Kräfte $\underline{F}_\nu^{\text{ext}}$ sind hier nur die zu betrachten, die nicht durch Zwangskräfte kompensiert sind. Kompensiert wird hier gerade die senkrecht zur schiefen Ebene gerichtete Schwerkraftkomponente $\underline{F}_\perp$. Somit ist

$$\underline{F}_\nu^{\text{ext}} = m_\nu\,\underline{g}_\parallel \tag{V.216}$$

zu benutzen, wobei sich $\underline{g}_\parallel$ auf die Beschleunigung parallel zur Koordinate s bezieht, also

$$g_\parallel = g \cdot \sin\alpha. \tag{V.217}$$

Dann folgt

$$M_3 = \sum_\nu (\underline{x}_\nu \times m_\nu\,\underline{g}_\parallel)_3 = m\,(\underline{X} \times \underline{g}_\parallel)_3. \tag{V.218}$$

Spalten wir den Schwerpunktvektor in gleicher Weise auf wie $\underline{g}$, so ist

$$\underline{X} = \underline{X}_\parallel + \underline{X}_\perp \quad , \quad |\underline{X}_\perp| = R \tag{V.219}$$

und weiter

$$M_3 = m(\underline{X}_\perp \times g_\parallel)_3 = m\,R\,g_\parallel = m\,R\,g\,\sin\alpha. \tag{V.220}$$

Die Bewegungsgleichung schreibt sich dann in der Form

$$\Theta_S\,\ddot{\varphi} - m\,R\,\ddot{s} = m\,R\,g\,\sin\alpha. \tag{V.221}$$

Benutzung der Rollbedingung liefert schließlich das bereits bekannte Ergebnis

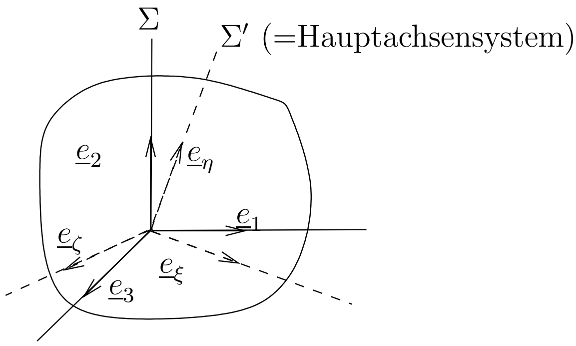
$$(\Theta_S + m\,R^2)\,\ddot{s} = -m\,g\,R^2\,\sin\alpha. \tag{V.222}$$

5 Kreiseltheorie

Ein Kreisel ist definiert als starrer Körper, bei dem ein Punkt festgehalten wird. Betrachtet man einen Kreisel im Schwerefeld, dann werden kräftefreie und schwere Kreisel unterschieden. Beim kräftefreien Kreisel ist der Fixpunkt gerade der Schwerpunkt; das Drehmoment auf den Kreisel verschwindet. Beim schweren Kreisel liegt der Fixpunkt außerhalb des Schwerpunktes und es wirkt ein resultierendes Gesamtmoment.

5.1 Eulersche Bewegungsgleichungen des Kreisels (Eulersche Gleichungen)

Der unmittelbare Zugang zu den Grundgleichungen des Kreisels verläuft über die Drehimpulsbilanz. Wir betrachten die Systeme Σ und Σ', deren Ursprünge zusammenfallen ($0 = 0'$). In nahezu allen Fällen ist es von Vorteil für Σ' das Hauptachsensystem zu wählen.



Im raumfesten Inertialsystem Σ hat der Drehimpulssatz die bekannte Gestalt

$$\dot{\underline{L}} = \underline{M}. \tag{V.223}$$

In Σ sind wegen der Drehbewegung des starren Körpers nicht nur die Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}(t)$ zeitabhängig, sondern auch die Komponenten des Trägheitstensors $\Theta_{ab}(t)$. Einsetzen von

$$L_a = \Theta_{ab}\,\omega_b \tag{V.224}$$

würde recht komplizierte Gleichungen hervorbringen. Viel zweckmäßiger ist die Übersetzung in das körperfeste Hauptachsensystem Σ', wo die schon mehrfach benutzte Relation (II.32) auf

$$\dot{\underline{L}} + \underline{\omega} \times \underline{L} = \underline{M} \tag{V.225}$$

führt. Wir betrachten entsprechend den Untersuchungen im Abschnitt II.2 den Drehimpuls als im Hauptachsensystem dargestellt, also

$$\underline{L} = L_\xi\,\underline{e}_\xi + L_\eta\,\underline{e}_\eta + L_\zeta\,\underline{e}_\zeta \tag{V.226}$$

und auch die zeitliche Ableitung in diesem System gebildet, d.h.

$$\dot{\underline{L}} = \dot{L}_\xi\,\underline{e}_\xi + \dot{L}_\eta\,\underline{e}_\eta + \dot{L}_\zeta\,\underline{e}_\zeta. \tag{V.227}$$

Im Abschnitt II.2 hatten wir genau diese zeitliche Ableitung mit d_t' markiert. Die Bewegung der Hauptachsen $\{\underline{e}_\xi, \underline{e}_\eta, \underline{e}_\zeta\}$ selbst wird ja gerade durch den die Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ enthaltenden Term beschrieben. Berücksichtigen wir die Kompnentendarstellungen

$$\underline{\omega} \;=\; \omega_\xi\,\underline{e}_\xi + \omega_\eta\,\underline{e}_\eta + \omega_\zeta\,\underline{e}_\zeta = p\,\underline{e}_\xi + q\,\underline{e}_\eta + r\,\underline{e}_\zeta, \tag{V.228}$$

$$\underline{L} \;=\; \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega} = A\,p\,\underline{e}_\xi + B\,q\,\underline{e}_\eta + C\,r\underline{e}_\zeta \tag{V.229}$$

so ergeben sich bereits die Eulerschen Gleichungen

$$A\,\dot{p} + (C-B)\,q\,r = M_\xi \quad , \tag{V.230}$$
$$B\,\dot{q} + (A-C)\,r\,p = M_\eta \quad , \tag{V.231}$$
$$C\,\dot{r} + (B-A)\,p\,q = M_\zeta \quad . \tag{V.232}$$

Aus diesem System gekoppelter gewöhnlicher Dgln. sind die drei Zeitfunktionen $p(t), q(t), r(t)$ zu bestimmen. Ist dies realisiert, kann man aus ihnen vermöge der drei Gleichungen (V.51)

$$p = \dot{\varphi}\,\sin\psi\,\sin\vartheta + \dot{\vartheta}\,\cos\psi \tag{V.233}$$
$$q = \dot{\varphi}\,\cos\psi\,\sin\vartheta - \dot{\vartheta}\,\sin\psi \tag{V.234}$$
$$r = \dot{\varphi}\,\cos\vartheta + \dot{\psi} \tag{V.235}$$

die drei Eulerschen Winkel φ, ϑ, ψ als Funktionen der Zeit und damit die Lage des Kreisels im raumfesten Inertialsystem Σ berechnen.

Die Eulerschen Gleichungen können auch aus den L II abgeleitete werden. Die Lagrange-Funktion lautet

$$L = T_{rot} - V = \frac{1}{2}\,(A\,p^2 + B\,q^2 + C\,r^2) - V(\varphi, \vartheta, \psi). \tag{V.236}$$

Generalisierte Koordinaten und Geschwindigkeiten sind die Eulerschen Winkel φ, ϑ, ψ und ihre Ableitungen $\dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}$. Die Lagrangesche Gleichung für ψ ergibt folgendes:

$$\partial_{\dot{\psi}} r = 1, \tag{V.237}$$
$$\partial_\psi p = q, \tag{V.238}$$
$$\partial_\psi q = -p, \tag{V.239}$$
$$\partial_{\dot{\psi}} L = \partial_p L \cdot 0 + \partial_q L \cdot 0 + \partial_r L \cdot 1 = C \cdot r, \tag{V.240}$$
$$d_t\,\partial_{\dot{\psi}} L = C\,\dot{r}, \tag{V.241}$$
$$\partial_\psi L = \partial_p L \cdot q + \partial_q L\,(-p) + \partial_r L \cdot 0 - \partial_\psi V \tag{V.242}$$
$$\partial_\psi L = (A-B)\,p\,q - \partial_\psi V, \tag{V.243}$$

$$d_t\,\partial_{\dot{\psi}} L - \partial_\psi L = C\,\dot{r} - (A-B)\,p\,q + \partial_\psi V = 0 \tag{V.244}$$

bzw.

$$C\,\dot{r} + (B-A)\,p\,q = -\partial_\psi V = M_\zeta. \tag{V.245}$$

Da ψ direkt eine Drehung um die körperfeste Hauptachse $\underline{e}_\zeta$ beschreibt, ist $\partial_\psi V$ auch unmittelbar dem Drehmoment M_ζ zuzuordnen. Für φ und ϑ ist diese unmittelbare Zuordnung nicht möglich. Z.B. entspricht $\partial_\vartheta V$ einem Drehmoment um die Knotenlinie, aber weder M_ξ noch M_η. Die obige flinke Rechnung läßt sich mit φ und ϑ deshalb nicht auf die gleiche Weise wiederholen. Allerdings kann man natürlich die Indizes permutieren und somit den gesamten Satz der Eulerschen Gleichungen herstellen. Es sei darauf hingewiesen, daß die drei Eulerschen Gleichungen nicht den L II entsprechen. Lediglich die ψ-Gleichung ist eine Lagrangesche Gleichung.

5.2 Rotation um freie Achsen

Wir betrachten einen Kreisel, auf den kein äußeres Drehmoment wirkt ($\underline{M} = 0$). Dann ist eine freie Achse definiert als eine Drehachse, deren Lage sich im Körper nicht verändert. Für eine freie Achse muß demnach gelten

$$\underline{\omega} = p\,\underline{e}_\xi + q\,\underline{e}_\eta + r\,\underline{e}_\zeta = const \tag{V.246}$$

bzw.

$$p = const \quad , \quad q = const \quad , \quad r = const. \tag{V.247}$$

Die Eulerschen Gleichungen ergeben dann

$$(C - B)\, q\, r = 0, \tag{V.248}$$
$$(A - C)\, r\, p = 0, \tag{V.249}$$
$$(B - A)\, q\, p = 0. \tag{V.250}$$

Wir wollen uns auf den allgemeinen Fall konzentrieren, wo alle Hauptträgheitsmomente verschieden sind. Dann müssen aber zwei der p, q, r Null sein. D.h. aber, daß eine freie Achse mit einer Hauptachse zusammenfallen muß; nur Hauptachsen können freie Achsen sein. Dann sind Drehimpuls und Drehachse parallel, da ja gilt

$$\underline{L} = \underline{\underline{\Theta}}\, \underline{\omega}. \tag{V.251}$$

Wegen $\underline{M} = 0$ ist der Drehimpuls $\underline{L}$ im raumfesten System erhalten, und somit ändert sich auch $\underline{\omega}$ in Σ nicht. Man erkennt einen starren Körper, der um eine freie Achse rotiert daran, daß er nicht torkelt.

Allerdings sind die drei Hauptachsen nicht alle gleich stabil. O.B.d.A. fordern wir

$$A < B < C.$$

Dann sind nur $\underline{e}_\xi$ und $\underline{e}_\zeta$ stabile freie Achsen; $\underline{e}_\eta$ ist eine labile oder instabile Achse.

Beweis:

Wir betrachten eine Rotation um $\underline{e}_\eta$, die leicht gestört wird. Dann gilt

$$q = q_0 \approx const, \tag{V.252}$$
$$p, r, \ll q_0, \tag{V.253}$$

$$A\, \dot{p} + (C - B)\, q_0\, r = 0, \tag{V.254}$$
$$C\, \dot{r} + (B - A)\, q_0\, p = 0. \tag{V.255}$$

Differenzieren nach der Zeit ermöglicht die Entkopplung der beiden linearen Dgln:

$$A\, \ddot{p} + (C - B)\, q_0\, \dot{r} = A\, \ddot{p} + (C - B)\, q_0\, \frac{A - B}{C}\, q_0\, p = 0, \tag{V.256}$$
$$C\, \ddot{r} + (B - A)\, q_0\, \dot{p} = C\, \ddot{r} + (B - A)\, q_0\, \frac{B - C}{A}\, q_0\, r = 0 \tag{V.257}$$

bzw.

$$\ddot{p} + G\, p = 0, \tag{V.258}$$
$$\ddot{r} + G\, r = 0 \tag{V.259}$$

mit

$$G = q_0^2\, \frac{(B - A)\,(B - C)}{A\, C} < 0. \tag{V.260}$$

Der Lösungsansatz

$$p = \mathrm{e}^{\lambda\, t} \quad , \quad r = \mathrm{e}^{\lambda\, t} \tag{V.261}$$

ergibt

$$\lambda^2 + G = 0, \tag{V.262}$$
$$\lambda = \pm\sqrt{-G}. \tag{V.263}$$

Die Lösung

$$\lambda = +\sqrt{-G} \tag{V.264}$$

ist positiv reell und p und r wachsen damit zeitlich an. Die ursprünglich angenommenen kleinen Störungen p und r bleiben nicht klein und somit ist $\underline{e}_\eta$ instabil. q.e.d.

Für andere Konstellationen , z.B.

$$B < A < C,$$
$$A < C < B$$

gilt

$$G > 0.$$

λ ist dann rein imaginär und beschreibt zeitliches oszillieren, aber kein instabiles Anwachsen.

5.3 Einteilung der Kreisel

Man unterscheidet folgende wichtige Typen:

- Kräftefreier Kreisel: $\underline{M} = 0$
- Schwerer Kreisel: $\underline{M} \neq 0$
- Symmetrischer Kreisel: $A = B \neq C$ (z.B.)
- Kugelkreisel: $A = B = C$

5.3.1 Kräftefreier symmetrischer Kreisel

Die Bezeichnung "kräftefrei" ist eigentlich nicht präzise, denn gemeint ist "drehmomentfrei". Sie wird aber in der Literatur so benutzt und wir behalten sie bei. Wenn wir den Kreisel im Schwerefeld $\underline{g}$ betrachten und den Schwerpunkt im Ursprung des raumfesten Systems Σ fixieren (also $\underline{X} = 0$), dann gilt

$$\underline{M} = \sum_\nu \underline{x}_\nu \times m_\nu\, \underline{g} = \sum_\nu m_\nu\, \underline{x}_\nu \times \underline{g} = m\, \underline{X} \times \underline{g} = 0. \tag{V.265}$$

Die Symmetrie sei o.B.d.A. durch

$$A = B \tag{V.266}$$

festgelegt. Die Symmetrieachse heißt *Figurenachse*; hier also die ζ-Achse. Dann nehmen die Eulerschen Gleichungen die Form

$$A\,\dot{p} + (C - A)\,q\,r = 0, \tag{V.267}$$
$$A\,\dot{q} + (A - C)\,p\,r = 0, \tag{V.268}$$
$$C\,\dot{r} = 0 \tag{V.269}$$

an. Sofort folgt

$$r = r_0 = \omega_\zeta = const \tag{V.270}$$

und durch die Wahl der Orientierung von $\underline{e}_\zeta$ legen wir

$$r_0 > 0 \tag{V.271}$$

fest. Es verbleiben die Gleichungen

$$\dot{p} - R\,q = 0, \tag{V.272}$$
$$\dot{q} + R\,p = 0 \tag{V.273}$$

mit

$$R = \frac{A - C}{A}\, r_0. \tag{V.274}$$

Deren Lösung lautet

$$p = a\,\sin(R\,t + \epsilon), \tag{V.275}$$
$$q = a\,\cos(R\,t + \epsilon) \tag{V.276}$$

mit den Integrationskonstanten a und ϵ. Für den Betrag der Winkelgeschwindigkeit $\omega = |\underline{\omega}|$ findet man somit

$$\omega^2 = r_0^2 + p^2 + q^2 = r_0^2 + a^2 = const. \tag{V.277}$$

$\underline{\omega}$ beschreibt einen Kreiskegel um die Figurenachse, den *Polkegel*.

Für den Betrag der Bewegung im raumfesten System Σ ist der Zusammenhang mit den Eulerschen Winkeln herzustellen. Dazu dienen die Gleichungen (V.51)

$$p = a\sin(R\,t + \epsilon) = \dot{\varphi}\,\sin\psi\,\sin\vartheta + \dot{\vartheta}\,\cos\psi, \tag{V.278}$$
$$q = a\cos(R\,t + \epsilon) = \dot{\varphi}\,\cos\psi\,\sin\vartheta - \dot{\vartheta}\,\sin\psi, \tag{V.279}$$
$$r = r_0 = \dot{\varphi}\,\cos\vartheta + \dot{\psi}. \tag{V.280}$$

Das Lösen dieses Gleichungssystems wird besonders einfach, wenn Σ geeignet gewählt wird. Da wegen $\underline{M} = 0$ bekanntlich in Σ

$$\underline{L} = const \tag{V.281}$$

gilt, legen wir

$$\underline{e}_3 \uparrow\uparrow \underline{L} \tag{V.282}$$

bzw.

$$\underline{L} = L\,\underline{e}_3 \tag{V.283}$$

fest. $\underline{e}_3$ drücken wir mittels der Gleichung (V.50) nun mit den Basisvektoren von Σ' aus und erhalten

$$\underline{L} = L\{\sin\vartheta\,\sin\psi\,\underline{e}_\xi + \sin\vartheta\,\cos\psi\,\underline{e}_\eta + \cos\vartheta\,\underline{e}_\zeta\}. \tag{V.284}$$

Somit können wir unter Einarbeitung von

$$\underline{L} = \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega} \tag{V.285}$$

schreiben

$$L_\xi = A\,\omega_\xi = A\,p = A\,(\dot\varphi\,\sin\vartheta\,\sin\psi + \dot\vartheta\,\sin\psi) = L\,\sin\vartheta\,\sin\psi, \tag{V.286}$$

$$L_\eta = A\,\omega_\eta = A\,q = A\,(\dot\varphi\,\sin\vartheta\,\cos\psi - \dot\vartheta\,\sin\psi) = L\,\sin\vartheta\,\cos\psi, \tag{V.287}$$

$$L_\zeta = C\,\omega_\zeta = C\,r_0 = C\,(\dot\varphi\,\cos\vartheta + \dot\psi) = L\cos\vartheta. \tag{V.288}$$

Wir betrachten dieses Dgl.-System zunächst als algebraisches Gleichungssystem für $\dot\varphi, \dot\vartheta, \dot\psi$ und lösen danach auf. Aus

$$\begin{pmatrix} \sin\vartheta\,\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \sin\vartheta\,\cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \cos\vartheta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\varphi \\ \dot\vartheta \\ \dot\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L}{A}\,\sin\vartheta\,\sin\psi \\ \frac{L}{A}\,\sin\vartheta\,\cos\psi \\ \frac{L}{C}\,\cos\vartheta \end{pmatrix} \tag{V.289}$$

erhalten wir mittels Cramerscher Regel

$$\dot\varphi = \frac{1}{-\sin\vartheta} \begin{vmatrix} \frac{L}{A}\,\sin\vartheta\,\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \frac{L}{A}\,\sin\vartheta\,\cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \frac{L}{A}\,\cos\vartheta & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{L}{A} = const \tag{V.290}$$

$$\dot\vartheta = \frac{1}{-\sin\vartheta} \begin{vmatrix} \sin\vartheta\,\sin\psi & \frac{L}{A}\,\sin\vartheta\,\sin\psi & 0 \\ \sin\vartheta\,\cos\psi & \frac{L}{A}\,\sin\vartheta\,\cos\psi & 0 \\ \cos\vartheta & \frac{L}{A}\cos\vartheta & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{V.291}$$

$$\dot\psi = \frac{1}{-\sin\vartheta} \begin{vmatrix} \sin\vartheta\,\sin\psi & \cos\psi & \frac{L}{A}\,\sin\vartheta\,\sin\psi \\ \sin\vartheta\,\cos\psi & -\sin\psi & \frac{L}{A}\,\sin\vartheta\,\cos\psi \\ \cos\vartheta & 0 & \frac{L}{C}\,\cos\vartheta \end{vmatrix} = \left(-\frac{L}{A} + \frac{L}{C}\right)\cos\vartheta \tag{V.292}$$

$$\dot\psi = \frac{A-C}{AC}\,L\,\cos\vartheta. \tag{V.293}$$

Integration ist nun einfach möglich. Sie liefert

$$\vartheta = \vartheta_0 \tag{V.294}$$

$$\varphi = \frac{L}{A}\,t + \varphi_0 = \frac{a}{\sin\vartheta_0}\,t + \varphi_0 \tag{V.295}$$

$$\psi = \frac{A-C}{AC}\,L\,\cos\vartheta_0\,t + \psi_0 = R\,t + \epsilon. \tag{V.296}$$

Von den Integrationskonstanten $\vartheta_0, a, \varphi_0, \psi_0 = \epsilon$ sind nur die ersten beiden von substantiellem Interesse. φ_0 gibt lediglich an wie bei $t = 0$ die $\underline{e}_1$-Achse orientiert ist und ϵ wie die Knotenlinie liegt. Da $\underline{L} = const$ und $L_\zeta = C\,r_0 = L\,\cos\vartheta_0 = const$ wollen wir ϑ_0 und a auf L und L_ζ zurückführen:

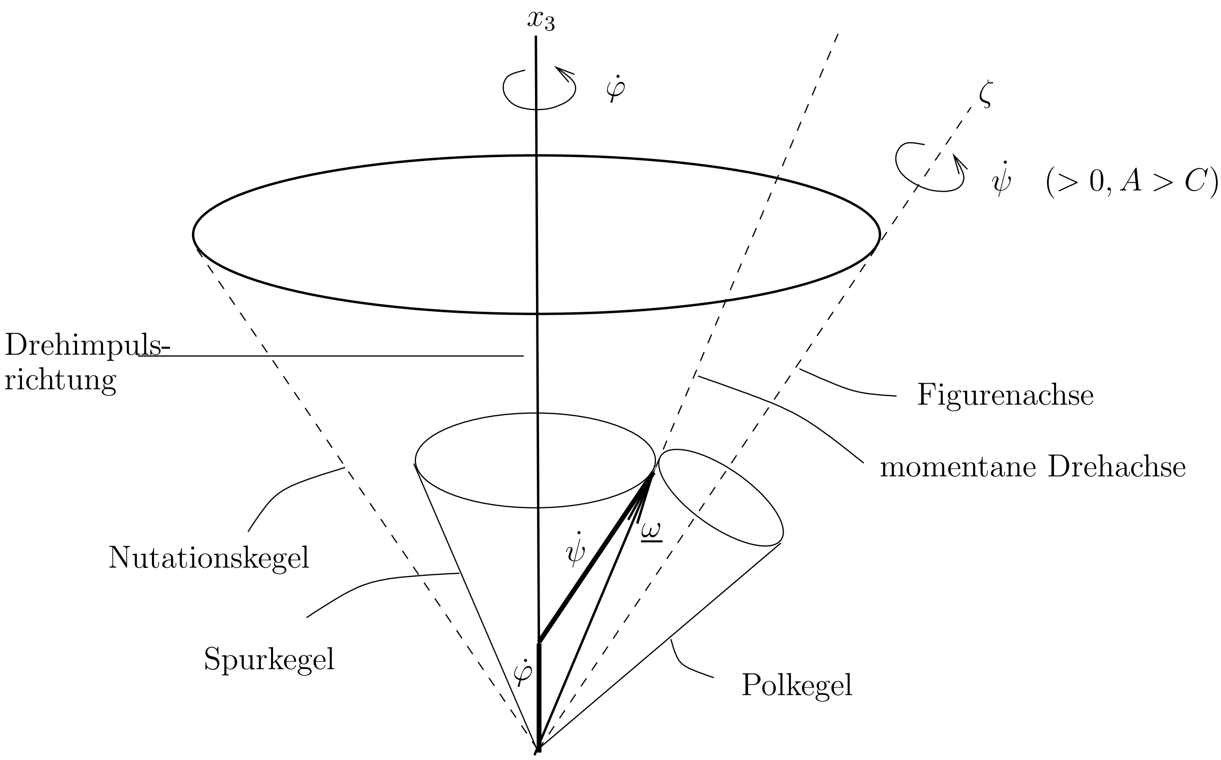
$$\cos\vartheta_0 = \frac{L_\zeta}{L} \tag{V.297}$$

$$a = \sin\vartheta_0\,\frac{L}{A} = \sqrt{1 - \left(\frac{L_\zeta}{L}\right)^2}\,\frac{L}{A} \tag{V.298}$$

Für die Interpretation der Ergebnisse ist es hilfreich, die Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ in geeigneten Koordinaten darzustellen. Besser als die reine Darstellung in Σ oder Σ' ist eine Kombination. Dazu greifen wir auf die Gleichung (V.40) zurück, die hier die Form

$$\underline{\omega} = \dot\varphi\,\underline{e}_3 + \dot\psi\,\underline{e}_3' = \dot\varphi\,\underline{e}_3 + \dot\psi\,\underline{e}_\zeta \tag{V.299}$$

annimmt. Entsprechend der ursprünglichen Einführung der Eulerschen Winkel ist $\dot\varphi$ die Winkelgeschwindigkeit um die raumfeste $\underline{e}_3$-Achse und $\dot\psi$ die um die körpefeste $\underline{e}_\zeta$-Achse.



Die Figurenachse (Symmetrieachse des Kreisels) bewegt sich auf einem Kreiskegel mit dem Öffnungswinkel ϑ_0 um die $\underline{e}_3$-Achse, d.h. um die Richtung des Drehimpulses. Diesen Kegel nennt man *Nutationskegel*. Die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung ist $\dot\varphi$.

Dabei dreht sich der Kreisel um die Figurenachse $\underline{e}_\zeta$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot\psi$.

Die Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ entsteht durch Addition beider Drehungen. $\underline{\omega}$ liegt immer in der von $\underline{e}_3$ und $\underline{e}_\zeta$ aufgespannten Ebene. $\underline{\omega}$ rotiert deshalb mit der $\underline{e}_\zeta$-Achse um die $\underline{e}_3$-Achse. Die Lage von $\underline{\omega}$ ändert sich deshalb ständig. Sie wandert auf dem *Spurkegel* um die raumfeste Drehimpulsrichtung.

Die gegenseitige Bewegung der Achsen kann man sich durch das Abrollen von Kegeln veranschaulichen. Der Polkegel rollt mit seiner Außenfläche (bei $A > C$, sonst mit seiner Innenfläche) auf dem Spurkegel ab und führt dabei die Figurenachsen auf dem Nutationskegel.

Die rotierende Erde ist in guter Näherung ein kräftefreier symmetrischer Kreisel, da wirkende Drehmomente klein sind. Für die Erde gilt

$$\vartheta_0 \approx 0ø, \tag{V.300}$$

also

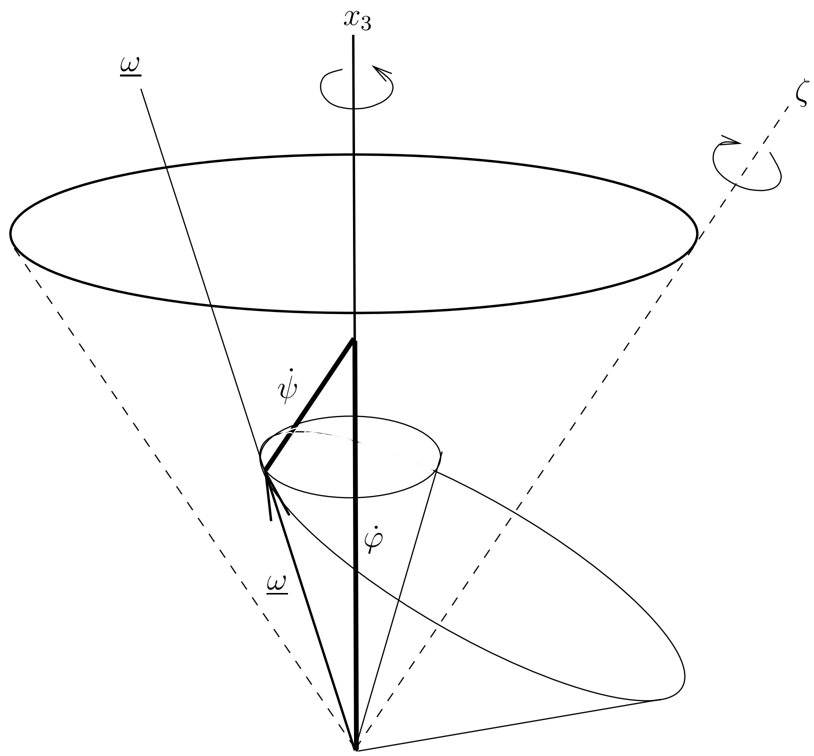
$$\cos\vartheta_0 \approx 1, \tag{V.301}$$

$$\frac{A-C}{A} \approx -0,0033. \tag{V.302}$$

Wegen der Abplattung ist C natürlich am größten. Somit gilt

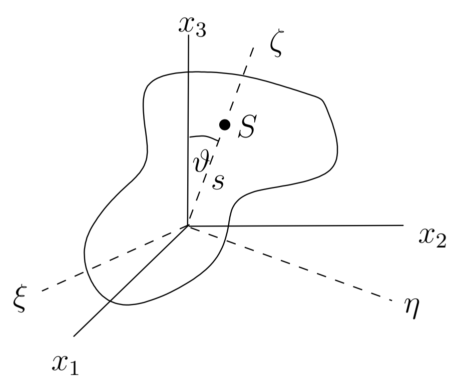
$$\frac{\dot\varphi}{\dot\psi} \approx \frac{C}{A-C} \approx \frac{A}{A-C} \approx -300. \tag{V.303}$$

Tatsächlich läuft $\underline{\omega}$ ($\hat{=}$ Nordpol) auf einem Kreis von ca. 10 m Radius in ca. 430 Tagen um die Symmetrieachse ($\hat{=}$ dem "geometrischen" Nordpol). Die Abweichung von unserer Abschätzung wird durch atmosphärische Bewegungen hervorgerufen und dadurch, daß die Erde nicht vollkommen starr ist.
Wegen $A < C$ müssen wir die obige Skizze modifizieren:



5.3.2 Schwerer symmetrischer Kreisel

Wir betrachten jetzt einen symmetrischen Kreisel im Schwerefeld, dessen Unterstützungspunkt ($0 = 0'$) nicht mit dem Schwerpunkt zusammenfällt. Die Schwerkraft übt ein Drehmoment aus. Wegen der Symmetrie des Kreisels liegt der Schwerpunkt auf der Figurenachse ζ. Sein Abstand vom Unterstützungspunkt sei s.



Dann hat der Kreisel die potentielle Energie

$$V = m\,g\,X_3 = m\,g\,s\,\cos\vartheta. \tag{V.304}$$

Das Aufschreiben der potentiellen Energie deutet bereits an, daß wir die Bewegung des schweren Kreisels nicht mit Hilfe der Eulerschen Gleichungen, sondern über die Lagrangeschen Gleichungen 2. Art untersuchen werden. Als generalisierte Koordinaten nehmen wir die Eulerschen Winkel φ, ϑ, ψ. Die noch benötigte kinetische Energie ergibt sich aus T_{rot} ausgedrückt in den Eulerschen Winkeln wie in Gleichung(V.142) angegeben. Wir können die Formel wegen $A = B$ vereinfachen und erhalten

$$T = T_{rot} = \frac{A}{2}\,(\dot\vartheta^2 + \dot\varphi^2\,\sin^2\vartheta) + \frac{C}{2}\,(\dot\varphi\,\cos\vartheta + \dot\psi)^2. \tag{V.305}$$

Wir gewinnen so die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{A}{2}\,(\dot\vartheta^2 + \dot\varphi^2\,\sin^2\vartheta) + \frac{C}{2}\,(\dot\varphi\,\cos\vartheta + \dot\psi)^2 - m\,g\,s\,\cos\vartheta. \tag{V.306}$$

Es ist sofort zu sehen, daß φ und ψ zyklische Koordinaten sind. Somit gelten die Erhaltungssätze

$$\begin{aligned} \partial_{\dot\varphi}L &= A\,\dot\varphi\,\sin^2\vartheta + C\,(\dot\varphi\,\cos\vartheta + \dot\psi)\,\cos\vartheta = \alpha = const, && \text{(V.307)}\\ \partial_{\dot\psi}L &= C\,(\dot\varphi\,\cos\vartheta + \dot\psi) = \beta = const. && \text{(V.308)} \end{aligned}$$

Anstatt der weiteren Lagrangeschen Gleichung für ϑ benutzen wir den Energieerhaltungssatz (III.313), der sich wegen der expliziten Zeitunabhängigkeit von L zu

$$T + V = \frac{A}{2}\,(\dot\vartheta^2 + \dot\varphi^2\,\sin^2\vartheta) + \frac{C}{2}\,(\dot\varphi\,\cos\vartheta + \dot\psi)^2 + m\,g\,s\,\cos\vartheta = U = const \tag{V.309}$$

ergibt. Ziel ist nun, $\dot\varphi$ und $\dot\psi$ aus dem Energiesatz zu eliminieren und eine entkoppelte Dgl. für ϑ zu erzeugen. Die Erhaltungssätze (V.307), (V.308) stellen ein lineares algebraisches Gleichungssystem für $\dot\varphi$ und $\dot\psi$ dar. Wir finden aus

$$\begin{pmatrix} A\,\sin^2\vartheta + C\,\cos^2\vartheta & C\,\cos\vartheta \\ C\,\cos\vartheta & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\varphi \\ \dot\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \tag{V.310}$$

die Zwischenlösung

$$\dot\varphi = \frac{1}{A\,C\,\sin^2\vartheta}\,(\alpha\,C - \beta\,C\,\cos\vartheta) \tag{V.311}$$

$$\dot\psi + \dot\varphi\,\cos\vartheta = \frac{\beta}{C}. \tag{V.312}$$

Der Energiesatz geht nun in

$$\frac{A}{2}\,\dot\vartheta^2 + \frac{(\alpha - \beta\,\cos\vartheta)^2}{2\,A\,\sin^2\vartheta} + \frac{\beta^2}{2\,C} + m\,g\,s\,\cos\vartheta = U \tag{V.313}$$

über. Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} u(\vartheta) &= \frac{(\alpha - \beta\,\cos\vartheta)^2}{2\,A^2\,\sin^2\vartheta} + \frac{\beta^2}{2\,A\,C} + \frac{m\,g\cdot s}{A}\,\cos\vartheta && \text{(V.314)}\\ \epsilon &= \frac{U}{A} && \text{(V.315)} \end{aligned}$$

schreiben wir

$$\frac{\dot\vartheta^2}{2} + u(\vartheta) = \epsilon. \tag{V.316}$$

Integration durch Seperation liefert $t(\vartheta)$ in der Form

$$t = \int \frac{d\vartheta}{\sqrt{2\,\{\epsilon - u(\vartheta)\}}} + const. \tag{V.317}$$

Damit ist das Problem im Prinzip gelöst. Die Umkehrfunktion $\vartheta(t)$ ermöglicht die Berechnung von $\varphi(t)$ und $\psi(t)$. Allerdings werden wir auf ein elliptisches Integral geführt, was analytisch etwas unhandlich ist. Die weitere Diskusion beschränken wir deshalb auf eine spezielle Situation.

Wir wollen annehmen, daß die Figurenachse ζ des Kreisels parallel zur Erdoberfläche gerichtet ist und der Kreisel in eine schnelle Drehung um diese Achse versetzt wird. Diese Situation entspricht den Anfangsbedingungen ($t = 0$)

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} \quad, \varphi = 0, \quad \psi = 0, \tag{V.318}$$

$$\dot{\vartheta} = 0 \quad, \dot{\varphi} = 0, \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0. \tag{V.319}$$

Die Integrationskonstanten α, β und U bzw. ϵ werden dann zu

$$\alpha = 0, \tag{V.320}$$

$$\beta = C\,\dot{\psi}_0, \tag{V.321}$$

$$\epsilon = \frac{1}{A}\,\frac{\beta^2}{2\,C} = \frac{C}{2\,A}\,\dot{\psi}_0. \tag{V.322}$$

So folgt

$$\frac{\dot{\vartheta}^2}{2} + \frac{C^2\,\dot{\psi}_0^2}{2\,A^2}\,\cot^2\vartheta + \frac{m\,g\,s}{A}\,\cos\vartheta = 0 \tag{V.323}$$

bzw. mit

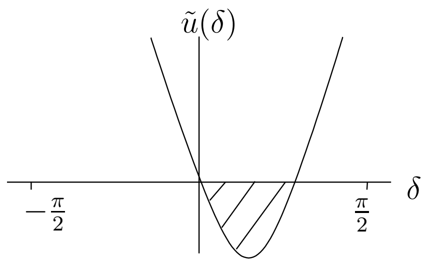
$$\vartheta = \frac{\pi}{2} + \delta \tag{V.324}$$

$$\frac{\dot{\delta}^2}{2} + \frac{\dot{\psi}_0^2\,C^2}{2\,A^2}\,\tan^2\delta - \frac{m\,g\,s}{A}\,\sin\delta = 0. \tag{V.325}$$

Die Funktion

$$\tilde{u}(\delta) = \frac{\dot{\psi}_0^2}{2\,A^2}\,\tan^2\delta - \frac{m\,g\,s}{A}\,\sin\delta \tag{V.326}$$

ist in der Skizze dargestellt.



Der Bewegungsbereich ist offensichtlich auf δ-Werte mit $\tilde{u} \leq 0$ beschränkt. Je größer $\dot{\psi}_0^2$ ist, desto kleiner ist dieser Bereich. Wir setzen voraus, daß $\dot{\psi}_0^2$ hinreichend groß ist, so daß die trigonometrischen Funktionen durch

$$\tan\delta \approx \delta, \tag{V.327}$$

$$\sin\delta \approx \delta \tag{V.328}$$

approximiert werden können. Dann ergibt sich

$$\frac{\dot{\delta}^2}{2} + \frac{\dot{\psi}_0^2\, C^2}{2\, A^2}\, \delta^2 - \frac{m\, g\, s}{A}\, \delta = 0. \tag{V.329}$$

Zeitliche Differentiation liefert die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators

$$\ddot{\delta} + \frac{\dot{\psi}_0^2\, C^2}{A^2}\, \delta = \frac{m\, g\, s}{A}, \tag{V.330}$$

woraus unschwer die Lösung

$$\delta = \frac{A\, m\, g\, s}{C^2\, \dot{\psi}_0^2} \left\{ 1 - \cos\left(\frac{\dot{\psi}_0\, C}{A}\, t \right) \right\} \tag{V.331}$$

zu erhalten ist. Die Figurenachse ζ führt also eine vertikale Schwingung zwischen $\delta = 0$ $\left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right)$ und $\delta = 2\, \frac{A\, m\, g\, s}{C^2\, \dot{\psi}_0^2}$ $\left(\vartheta = \frac{\pi}{2} + 2\, \frac{A\, m\, g\, s}{C^2\, \dot{\psi}_0^2}\right)$ mit hoher Frequenz und kleiner Amplitude aus. Diese durch ϑ festgelegte Bewegung der Figurenachse heißt *Nutation*.

In gleicher Näherung folgt

$$\dot{\varphi} = + \frac{\dot{\psi}_0\, C}{A}\, \frac{\sin\delta}{\cos^2\delta} \approx \frac{\dot{\psi}_0\, C}{A}\, \delta = \frac{m\, g\, s}{C\, \dot{\psi}_0} \left\{ 1 - \cos\left(\frac{\dot{\psi}_0\, C}{A}\, t \right) \right\}. \tag{V.332}$$

bzw.

$$\varphi = \frac{m\, g\, s}{C\, \dot{\psi}_0} \left\{ t - \frac{A}{\dot{\psi}_0\, C}\, \sin\left(\frac{\dot{\psi}_0\, C}{A}\, t \right) \right\}. \tag{V.333}$$

Die Figurenachse bewegt sich also mit der mittleren Geschwindigkeit

$$\langle \dot{\varphi} \rangle = \frac{m\ g\, s}{C\, \dot{\psi}_0} \tag{V.334}$$

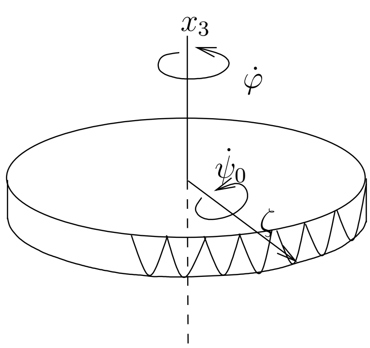
zusätzlich um die x_3-Achse. Diese Bewegung wird *Präzession* genannt.

Schließlich folgt noch

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 - \dot{\varphi}\, \cos\vartheta \approx \dot{\psi}_0, \tag{V.335}$$

d.h. der Kreisel dreht sich mit der ihm anfangs gegebenen Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}_0$ um die Figurenachse.

Die Bahnkurve, die die Spitze der Figurenachse des Kreisels insgesamt durchführt, ist eine Zykloide in der $\vartheta - \varphi$-Ebene.



Im vorangegangenen Abschnitt hatten wir die Erde näherungsweise als kräftefreien symmetrischen Kreisel betrachtet. Tatsächlich üben aber die Schwerefelder von Sonne und Mond ein geringes Drehmoment auf die Erde aus. Als Angriffspunkt können wir uns den Äquatorwulst vorstellen. Damit wird die rotierende Erde zum schweren Kreisel und zu einer langsamen Präzessionsbewegung veranlaßt. Die Figurenachse präzessiert in ca. 26 000 Jahren um die Normale zur Ekliptik. Diese Bewegung nennt man in der Astronomie die Präzession der Äquinoktien.