



1. Extremwertproblem

Bestimmen Sie das Extremum der Funktion $f(x, y, z) = (x - 1)^2 + y^2 + z^2$ unter der Nebenbedingung $x + y - z = 0$.

Benutzen Sie dazu die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren. Die Art der Extremstelle (Minimum, Maximum, Sattelpunkt) soll *nicht* untersucht werden.

2. Kugel mit inhomogener Massendichte

Wir betrachten eine Kugel $\mathcal{K}$ mit Radius R , deren Massendichte in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) als

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha \cos \theta + \beta \cos^2 \theta)$$

geschrieben werden kann. Mit ρ_0 wird eine positive Konstante bezeichnet.

- (a) Berechnen Sie die Gesamtmasse M der Kugel.
- (b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunkts S der Kugel. Diese sind durch

$$x_s = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{K}} x \rho \, dV \quad ; \quad y_s = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{K}} y \rho \, dV \quad ; \quad z_s = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{K}} z \rho \, dV \quad ;$$

definiert.

3. Komplexe Integration

- (a) Geben Sie die Lösung(en) von $z^6 = 1$ an und zeichnen Sie diese in der komplexen Zahlenebene.
- (b) Was sind die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen und wie lauten diese?
- (c) Berechnen Sie $(z \in \mathbb{C})$

$$\oint_C \frac{1}{z^2 - (1 + \frac{3}{2}i)z + \frac{1}{4}(5+3i)} dz \quad ,$$

wobei die Kurve C durch $|z| = 1$ gegeben ist.

Bitte wenden $\longrightarrow$

4. Differentialoperatoren

Es sei $\underline{A}$ ein Vektorfeld und $\underline{M}$ sei konstant. Zeigen bzw. berechnen Sie unter Benutzung von Komponentenschreibweise und Einsteinscher Summenkonvention:

$$(a) \quad \nabla \times (\nabla \times \underline{A}) = \nabla (\nabla \cdot \underline{A}) - \Delta \underline{A} \qquad (b) \quad \nabla \times \left(\frac{\underline{M} \times \underline{r}}{r^3} \right) \text{ für } r \neq 0 \quad .$$

5. Konservatives Vektorfeld

Wir betrachten das Vektorfeld

$$\underline{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xye^{-z^2} + (2 - \lambda)z^3 \cos y^2 \\ x^2e^{-z^2} + (3 - \lambda)xy\textcolor{red}{z}^3 \sin y^2 \\ -(3 - \lambda)x^2yze^{-z^2} + 3xz^2 \cos y^2 \end{pmatrix} ,$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

- (a) Bestimmen Sie λ so, dass die Beziehung $\nabla \times \underline{A} = 0$ erfüllt ist.
- (b) Bestimmen Sie für den in Teilaufgabe (a) ermittelten Wert von λ ein Potential des Vektorfeldes $\underline{A}$, d.h. eine Funktion $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\underline{A} = \nabla \Phi$.

6. Integralsatz von Stokes

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\underline{A}(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } \underline{x} \neq 0 \quad .$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

- (a) Berechnen Sie die Rotation des Vektorfeldes $\underline{A}$.
- (b) Berechnen Sie explizit das Linienintegral $\oint \underline{A} \cdot d\underline{r}$ über einen Kreis mit Radius R in der (x, y) -Ebene.
- (c) Geben Sie den Integralsatz von Stokes *allgemein* an! (Formel und kurze Erläuterung). Nehmen Sie dabei auch Bezug auf Ihre Ergebnisse aus (a) und (b).