INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

PHYSIKALISCHE RECHENMETHODEN II — SS 2010

13. Übungsblatt — Abgabe: Mi, den 14.07.2010 bis 15.00 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

Stichworte: Greensche Formeln, Anwendungen der Integralsätze

36. **Greensche Formel** **(4 Punkte)**

In Vorlesung wurden die Greenschen Integralformeln angegeben. Die 1. Greensche Integralformel soll in dieser Aufgabe nun bewiesen werden. Es seien Φ_1 und Φ_2 zwei skalare Felder, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Volumen und $\partial\Omega$ dessen Oberfläche. Dann gilt:

$$\int_V \Phi\, \Delta\Psi \, \mathrm{d}V + \int_V \mathrm{grad}\ \Phi\ \mathrm{grad}\ \Psi \, \mathrm{d}V = \int_{(V)} \Phi \, \mathrm{grad}\ \Psi \, \mathrm{d}\underline{O} \quad . \tag{1}$$

37. **Energieerhaltungssatz für Lösungen der Wellengleichung** **(6 Punkte)**

In dieser Aufgabe soll die Energieerhaltung einer Welle allgemein mit Hilfe der Greenschen Formel gezeigt werden. Es sei die Menge G eine Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ ($G \subset \mathbb{R}^3$) und die Funktion $u(\underline{x}, t)$ sei zweimal stetig differenzierbar auf $G \times \mathbb{R}^+$. Zudem erfülle $u(\underline{x}, t)$ die Wellengleichung

$$\Delta u - \partial_t^2 u = 0 \tag{2}$$

und verschwinde auf dem Rand von G.

(a) Begründen Sie kurz, dass man die Energie der Welle als

$$E(t) = \int_G \left(\frac{1}{2} \left(\partial_t u(\underline{x}, t)\right)^2 + \frac{1}{2} \left|\nabla u(\underline{x}, t)\right|^2 \right) dV \tag{3}$$

angeben kann. (Konstanten wie Masse oder Wellengeschwindigkeit sind hierbei auf eins gesetzt worden.)

(b) Zeigen Sie, dass die Energie erhalten bleibt, dass also gilt

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad .$$

Bitte wenden ⟶

38. **Das Theorem vom eingefrorenen Fluss** **(5 + 3 Punkte)**

Der interplanetare Raum in unserem Sonnensystem ist zum Einen mit von der Sonne stammenden Ionen und Elektronen, dem sogenannten Sonnenwind ausgefüllt und ist zum Anderen auch mit von der Sonne stammendem Magnetfeld durchsetzt. In dieser Aufgabe soll nun gezeigt werden, dass der Sonnenwind in das Magnetfeld "eingefroren" ist, d.h. das Magnetfeld und der Sonnenwind bewegen sich immer zusammen.

Der Sonnenwind bewege sich mit der Geschwindigkeit $\underline{u}$ und $\underline{B}$ bezeichne das Magnetfeld. Dann gilt

$$\partial_t \underline{B} = \nabla \times (\underline{u} \times \underline{B}) \quad . \tag{4}$$

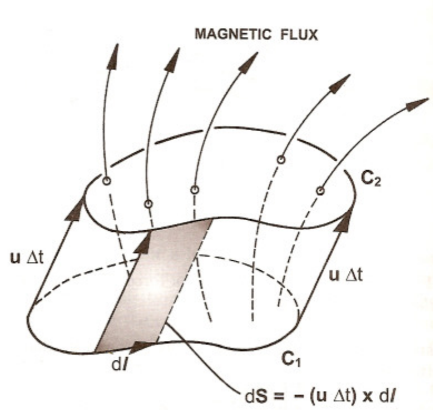
Wir betrachten nun eine Fläche $\underline{S}$ mit Rand C, die von magnetischen Feldlinien durchsetzt ist. Durch die Bewegung des Sonnenwindes kann sich diese Fläche jedoch zeitlich ändern. Zeigen Sie, dass der Magnetische Fluss Φ durch $\underline{S}(t)$ zeitlich konstant ist:

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = \frac{d}{dt}\int_S B(\underline{x},t)\cdot d\underline{S} = 0 \quad . \tag{5}$$

Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

(a) Schreiben Sie die Ableitung als Differentialquotienten und machen Sie dann eine Taylorentwicklung bis zur ersten Ordnung von $\underline{B}(\underline{x}, t+\Delta t)$. Als Ergebnis sollten Sie dann erhalten

$$\frac{d}{dt}\Phi = \lim_{\Delta t \to 0}\left\{\int\limits_{S(t+\Delta t)} \partial_t \underline{B}(\underline{x},t)\cdot d\underline{S} + \frac{1}{\Delta t}\left(\int\limits_{S(t+\Delta t)} \underline{B}(\underline{x},t)\cdot d\underline{S} - \int\limits_{S(t)} \underline{B}(\underline{x},t)\cdot d\underline{S}\right)\right\} \tag{6}$$



(b) Wenden Sie nun den Satz von Gauß auf die *geschlossene* Fläche an, die bei der Bewegung von $\underline{S}$ entsteht (siehe Skizze). Beachten Sie dass im Grenzfall $\Delta t \to 0$ $\underline{S}(t) = \underline{S}(t+\Delta t)$ gilt und zeigen Sie, dass sich dann der zweite Term auf der rechten Seite von Gleichung (6) schreiben lässt als

$$\oint_C \underline{B}(\underline{x},t)\cdot(\underline{u}\times \underline{dl}) \quad . \tag{7}$$

(c) Benutzen Sie nun den Satz von Stokes und Gleichung (4) um $\frac{d}{dt}\Phi = 0$ zu zeigen.