INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

Physikalische Rechenmethoden II | SS 2010

12. Übungsblatt | Abgabe: Mi, den 07.07.2010 bis 15.00 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

Stichworte: Satz von Stokes, Satz von Gauß

34. **Integralsatz von Gauß** **(11 Punkte)**

Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ein beliebig geformtes Volumen und ∂V dessen Oberfläche. Gegeben sei zudem ein Vektorfeld $\underline{A}(x, y, z)$. Dann besagt der Integralsatz von Gauß:

$$\int_V \operatorname{div} \underline{A} \, \mathrm{d}V = \int_{\partial V} \underline{A} \cdot \mathrm{d}\underline{O} \quad . \tag{1}$$

Für einige Beispiele soll diese Formel explizit nachgerechnet werden:

(a) für das Vektorfeld $\underline{A} = (ax, by, cz)$ mit Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ und eine Kugel um den Ursprung mit Radius R,

(b) für das Vektorfeld $\underline{A} = (xy, yz, -z)$ und die geschlossene Oberfläche der Halbkugel mit $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ und $z \geq 0$,

(c) sowie für das Vektorfeld

$$\underline{A} = \left(x\, e^{-a\sqrt{x^2+y^2}} - by, y\, e^{-a\sqrt{x^2+y^2}} + bx, \sin\left(\frac{\pi z}{2d}\right) \right) \tag{2}$$

und einen Zylinder um die z-Achse mit Radius R und mit Höhe von $-d$ bis $+d$.

35. **Flächenberechnung mit dem Satz von Stokes** **(4 Punkte)**

Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\underline{F} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

und eine beliebige, geschlossene Kurve C in der (x, y)-Ebene.

(a) Zeigen Sie, dass durch das Linienintegral $\oint_C \underline{F} \cdot \mathrm{d}\underline{r}$ der Inhalt der orientierten, von C eingeschlossenen Fläche gegeben ist.

(b) Verifizieren Sie diese Aussage für die Kurve

$$C : [0, 2\pi[\ni t \mapsto \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \frac{1}{2}\sin(2t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$