INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

PHYSIKALISCHE RECHENMETHODEN II — SS 2010

11. Übungsblatt — Abgabe: Mi, den 30.06.2010 bis 15.00 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

Stichworte: Integration von Vektorfeldern, konservative Felder, Kurvenintegrale

32. **Kraftfelder** **(8 Punkte)**

Wir betrachten die Kraftfelder

$$\underline{F}_1 = \begin{pmatrix} 4y^2 + 3z \\ 8xy - 8z^3 \\ -24yz^2 + 3x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{F}_2 = \begin{pmatrix} xz + 3x \\ 3yz \\ y^2 + z^4 \end{pmatrix} \quad . \tag{1}$$

(a) Ein Vektorfeld, dessen Rotation verschwindet, nennt man *konservativ*. Welches dieser Kraftfelder ist konservativ?

(b) Berechnen Sie für beide Felder das Wegintegral $\int \underline{F} \cdot \mathrm{d}\underline{r}$ zwischen den Punkten $(0,0,0)$ und $(1,0,1)$, und zwar längs der Wege

- $C_1 : (0,0,0) \to (1,0,0) \to (1,0,1)$,
- $C_2 : (0,0,0) \to (1,0,1)$ mit $z = x$,
- $C_3 : (0,0,0) \to (1,0,1)$ mit $z = x^2$.

Bevor wir uns weiter mit diesem Beispiel beschäftigen, wollen wir in den folgenden Aufgabenteilen einige allgemeine Eigenschaften konservativer Felder kennenlernen:

(c) Zeigen Sie allgemein, dass für ein konservatives Vektorfeld $\underline{V}$ stets eine skalare Funktion $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\underline{V} = \nabla\Phi$ existiert. Die Funktion Φ ist ein *Potential* des Vektorfeldes $\underline{V}$.

(d) Wir betrachten wiederum ein konservatives Vektorfeld $\underline{V}$ und eine beliebige Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit Startpunkt $\underline{r}_1$ und Endpunkt $\underline{r}_2$. Zeigen Sie:

$$\int_\gamma \underline{V} \cdot \mathrm{d}\underline{r} = \Phi(\underline{r}_2) - \Phi(\underline{r}_1) \quad . \tag{2}$$

Das Potential Φ wurde in Teil (b) definiert.
Was folgt aus Gl. (2) für eine geschlossene Kurve ($\underline{r}_1 = \underline{r}_2$)?

Nun wollen wir die Ergebnisse von Teil (c) und (d) auf das konkrete Beispiel anwenden:

(e) Bestimmen Sie für das Vektorfeld $\underline{F_1}$ ein geeignetes Potential Φ. Bestätigen Sie damit Gl. (2) für die in Teil (b) angegebenen Kurvenintegrale.

Bitte wenden ⟶

33. **Integralsatz von Stokes** **(7 Punkte)**

Anhand einiger Beispiele soll die Anwendung dieses Satzes geübt werden:

(a) Berechnen Sie das Wegintegral des Vektorfeldes

$$\underline{F}_3 = \begin{pmatrix} 2y + 2xz \\ 3x \\ x^2 + z^3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

entlang des Einheitskreises in der (x, y)-Ebene unter Benutzung des Satzes von Stokes.

(b) Verifizieren Sie den Satz von Stokes für das Vektorfeld

$$\underline{F}_4 = \begin{pmatrix} xz + 3xy \\ 3yz - x^3 y \\ y^2 + z^2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

und die durch

$$\mathcal{F} = \left\{ \underline{r} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \leq 1 \quad ; \quad z = 0 \quad ; \quad y \geq 0 \right\} \tag{5}$$

definierte Fläche.