INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

PHYSIKALISCHE RECHENMETHODEN II — SS 2010

10. Übungsblatt — Abgabe: Mi, den 23.06.2010 bis 15.00 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

Stichworte: Vektorfelder, Gradient, Laplace-Operator

29. **Divergenz und Rotation I** **(5 Punkte)**

Stellen Sie die folgenden Vektorfelder graphisch dar und berechnen Sie jeweils Divergenz und Rotation:

(a) $\underline{F}(x,y,z) = (\cos x \sin y,\, -\sin x \cos y,\, 0)$
(b) $\underline{F}(x,y,z) = (xy^2,\, x^2 y,\, 0)$.

30. **Differentialoperatoren I** **(7 Punkte)**

Es sei Ψ ein skalares Feld; $\underline{A}$ und $\underline{B}$ seien Vektorfelder. Zeigen Sie unter Benutzung von Komponentenschreibweise und Einsteinscher Summenkonvention:

(a) $\operatorname{div}(\Psi \underline{A}) = \Psi \operatorname{div} \underline{A} + \underline{A} \cdot \nabla\Psi$;
(b) $\operatorname{rot}(\Psi \underline{A}) = \Psi \operatorname{rot} \underline{A} - \underline{A} \times \nabla\Psi$
(c) $\operatorname{div}(\underline{A} \times \underline{B}) = \underline{B} \cdot \operatorname{rot} \underline{A} - \underline{A} \cdot \operatorname{rot} \underline{B}$;
(d) $\nabla \times (\nabla \times \underline{A}) = \nabla\,(\nabla \cdot \underline{A}) - \triangle \underline{A}$;
(e) Es sei $\underline{A} = \nabla\Psi$. Zeigen Sie: Dann gilt $\operatorname{rot} \underline{A} = 0$.
(f) Es sei $\underline{B} = \operatorname{rot} \underline{A}$. Zeigen Sie: Dann gilt $\operatorname{div} \underline{B} = 0$.

31. **Differentialoperatoren II** **(3 Punkte)**

Es sollen die elektromagnetische Wellengleichung sowie die Helmholtz-Gleichung hergeleitet werden.

(a) Es seien die Maxwellschen Gleichungen für das Vakuum gegeben:

$$\operatorname{div} \underline{D}\,(\underline{r},t) = 0 \qquad \operatorname{rot} \underline{E}\,(\underline{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}\,(\underline{r},t)$$
$$\operatorname{div} \underline{B}\,(\underline{r},t) = 0 \qquad \operatorname{rot} \underline{H}\,(\underline{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}\underline{D}\,(\underline{r},t) \quad .$$

Dabei ist $\underline{D}\,(\underline{r},t) = \epsilon_0 \underline{E}\,(\underline{r},t)$ und $\underline{B}\,(\underline{r},t) = \mu_0 \underline{H}\,(\underline{r},t)$. Man zeige, dass elektrisches und magnetisches Feld die *Wellengleichungen*

$$\triangle \underline{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{E} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \triangle \underline{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{B} = 0 \tag{1}$$

erfüllen.

(b) Zeigen Sie, dass jedes Vektorfeld $\underline{A}$, das die Gleichung $\nabla \times (\nabla \times \underline{A}) - k^2 \underline{A} = 0$ erfüllt ($k = \text{const}$), zugleich Lösung der *Helmholtz-Gleichung* $\triangle \underline{A} + k^2 \underline{A} = 0$ ist.