INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

PHYSIKALISCHE RECHENMETHODEN II — SS 2010

9. Übungsblatt — Abgabe: Mi, den 16.06.2010 bis 15.00 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

Stichworte: Vektoren, Vektorfelder, Summenkonvention

27. **Levi-Cività-Symbol** **(11 Punkte)**

Betrachten Sie das durch

$$\epsilon_{abc} = \begin{cases} 1 & \text{für } (a,b,c) \in \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\} \\ -1 & \text{für } (a,b,c) \in \{(2,1,3),(1,3,2),(3,2,1)\} \\ 0 & \text{falls } (a,b,c) \text{ keine Permutation von } (1,2,3) \text{ ist} \end{cases}$$

definierte total antisymmetrische Epsilon-Symbol.

(a) Zeigen Sie:

- $\sum_a \epsilon_{abc}\epsilon_{ade} = \delta_{bd}\delta_{ce} - \delta_{be}\delta_{cd}$;
- $\sum_{a,b} \epsilon_{abc}\epsilon_{abd} = 2\delta_{cd}$;
- $\sum_{a,b,c} \epsilon_{abc}\epsilon_{abc} = 6$;
- $\sum_{a,c} \epsilon_{abc}\delta_{ac} = 0$.

(b) Für das Kreuzprodukt zweier Vektoren gilt $[\underline{A} \times \underline{B}]_a = \sum_{b,c} \epsilon_{abc} A_b B_c$. Beweisen Sie die folgenden Beziehungen unter Benutzung der Komponentenschreibweise.

- $\underline{A} \times \underline{B} = -\underline{B} \times \underline{A}$;
- $\underline{A} \cdot (\underline{B} \times \underline{C}) = \underline{C} \cdot (\underline{A} \times \underline{B}) = \underline{B} \cdot (\underline{C} \times \underline{A})$;
- $\underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{C}) = \underline{B}\ (\underline{A} \cdot \underline{C}) - \underline{C}\ (\underline{A} \cdot \underline{B})$ (Graßmannscher Entwicklungssatz);
- $(\underline{A} \times \underline{B}) \cdot (\underline{C} \times \underline{D}) = (\underline{A} \cdot \underline{C})\ (\underline{B} \cdot \underline{D}) - (\underline{B} \cdot \underline{C})\,(\underline{A} \cdot \underline{D})$.

28. **Der Gradient** **(4 Punkte)**

Es sei $\underline{r} = (x_1, x_2, x_3)$ und $r = |\underline{r}|$.

(a) Berechnen Sie $\underline{F}(\underline{r}) = \nabla f(r)$ für eine skalare Funktion $f(r)$. Man bezeichnet $f(r)$ auch als Zentralpotential und $\underline{F}(\underline{r})$ als Zentralkraft.

(b) Ein Beispiel aus der Elektrodynamik ist das elektrische Potential einer Punktladung, $\phi_0(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$ für $r \neq 0$. Geben Sie das elektrische Feld $\underline{E} = -\nabla\phi_0$ an. Erläutern Sie außerdem die Tatsache, dass das elektrische Feld immer senkrecht auf den Äquipotentialflächen steht.

(c) Das Potential eines elektrischen Dipols lautet $\phi_1(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\underline{P}\cdot\underline{r}}{r^3}$ für $r \neq 0$, $P = \text{const.}$ Berechnen Sie wiederum das elektrische Feld und skizzieren Sie es.