INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

PHYSIKALISCHE RECHENMETHODEN II — SS 2010

8. Übungsblatt — Abgabe: Mi, den 09.06.2010 bis 15.00 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

Stichworte: Integralsatz von Cauchy, Laurentreihen, Residuensatz

24. **Residuensatz I** **(7 Punkte)**

Ein paar Anwendungsbeispiele: Berechnen Sie (für $z \in \mathbb{C}$) die folgenden Integrale.

(a)

$$\oint_C \frac{1}{z^6+1}\,\mathrm{d}z \quad ,$$

wobei sich die Kurve C aus den beiden Teilstücken $C_1 = \{z \,|\, |z| = R; \mathrm{Im}\, z > 0; R > 0\}$ und $C_2 = \{z \,|\, -R \leq \mathrm{Re}\, z \leq R; \mathrm{Im}\, z = 0\}$ zusammensetzt.

(b)

$$\oint_C \frac{e^{ikz}}{z^2+a^2}\,\mathrm{d}z; \quad a, k \text{ reell},$$

wobei die Kurve C der Kreis mit Radius $|z| = 2a$ $(a > 0)$ ist.

(c)

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - \frac{5}{2}iz - 1} \quad ,$$

wobei die Kurve C durch $|z| = 1$ gegeben sei.

25. **Residuensatz II** **(3 Punkte)**

Es sei γ eine Kurve um den Nullpunkt mit Radius 1. Man berechne

$$\int_\gamma e^{-\frac{1}{z}} \sin\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \quad .$$

Nutzen Sie dazu bekannte Reihenentwicklungen um den Integranden in eine unendliche Reihe der Form $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ zu entwickeln und lesen Sie das Residuum ab. Diese Reihe wird als *Laurent-Reihe* bezeichnet.

Bitte wenden ⟶

26. **Residuensatz III** **(5 Punkte)**

Der Residuensatz kann auch zur Berechnung von bestimmten Integralen über reelle Intervalle benutzt werden: Zunächst definieren wir zu einer rationalen Funktion $R(x)$ eine komplexe Funktion $A(z)$ ($z \in \mathbb{C}$) mit

$$A(z) := \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) \quad .$$

Außerdem sei $R(\cos t)$ stetig differenzierbar für $t \in [0; 2\pi]$.

(a) Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t) dt = 2\pi \sum_{|a|<1} \mathrm{Res}_a A(z) \quad .$$

(b) Bestimmen Sie damit das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t} \quad ; \quad a > 1 \quad .$$