



Stichworte: Komplexe Zahlen, Linienintegrale, Kettenregel

18. Rechnen mit komplexen Zahlen

(4.5 Punkte)

Ein paar einfache Beispiele zur Wiederholung:

- (a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichungen $z^8 = 5$ und $z^8 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
- (b) Lösen Sie die Gleichung

$$\frac{z}{1+i} - \frac{z}{1-i} = 1 + (z - z^*) \sin(\pi + i \ln 3) \quad .$$

- (c) Berechnen Sie $\ln(ie)$, i^i und $\sqrt[i]{i}$.

19. Einige Beweise über komplexe Zahlen

(2.5 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussagen für beliebige $z \in \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{R}$:

- (a) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
- (b) $\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{2^3} + \dots = \frac{2 \sin x}{5 - 4 \cos x}$
Tipp: Geometrische Reihe!

20. Analytische Funktionen

(3 Punkte)

Prüfen Sie, ob folgende Funktionen analytisch sind:

- (a) $\exp(iz)$
- (b) $\sin(z)$
- (c) $\cos(z^*)$

21. Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

(5 Punkte)

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sollen in Polarkoordinaten (ρ, ϕ) angegeben werden.

- (a) Wir betrachten eine Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Zeigen Sie: f ist genau dann analytisch, wenn die Bedingung

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0 \tag{1}$$

erfüllt ist. Anleitung: Schreiben Sie x und y als Funktion von z und z^* und benutzen Sie die Kettenregel.

- (b) Gehen Sie analog zu Teil (a) vor, um die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für eine analytische Funktion $f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$ in Polarkoordinaten zu formulieren.