



16. Wellenfunktion des Wasserstoffatoms (5 Punkte)

Im Grundzustand des Wasserstoffatoms wird die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons durch die Funktion

$$f(x, y, z) = N \exp \left(-\frac{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{a_0} \right) \quad (1)$$

beschrieben, wobei der Bohrsche Radius a_0 eine Konstante ist. Bestimmen Sie die Normierungskonstante N so, dass die Bedingung

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) \, dV = 1 \quad (2)$$

erfüllt ist (Kugelkoordinaten benutzen, die auftretenden Integrale sind per Hand auszurechnen!). Wie ist diese Bedingung physikalisch zu interpretieren?

17. Volumen- und Oberflächenintegrale (10 Punkte)

Durch die Menge

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\} \quad (3)$$

wird ein Ellipsoid mit den Halbachsen a , b und c definiert. Eine mögliche Parametrisierung ist

$$\begin{aligned} x &= a s \sin \theta \cos \phi \\ y &= b s \sin \theta \sin \phi \\ z &= c s \cos \theta \end{aligned}$$

Überlegen Sie sich zunächst die Wertebereiche für die Koordinaten s , θ und ϕ , sowie deren anschauliche Bedeutung.

- (a) Bestimmen Sie die Jacobische-Funktionaldeterminante.
- (b) Berechnen Sie die Gesamtmasse eines Ellipsoids mit konstanter Massendichte ρ_0 .
- (c) Geben Sie das Flächenelement dO auf der Oberfläche des Ellipsoids allgemein an und berechnen Sie damit die Oberfläche für ein abgeplattetes Ellipsoid mit $a = b$.

Hinweis: Es ist

$$\int_0^\pi \sin x \sqrt{a^2 \cos^2 x + c^2 \sin^2 x} \, dx = a + \frac{2c^2}{a\epsilon} \ln \left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \right) \quad ; \quad \epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} \quad (4)$$