



**Stichworte:** Integrale, Polarkoordinaten, Parametrisierung von Kurven

**13. Linienintegral I**

**(3 Punkte)**

Berechnen Sie den Wert des Integrals der Funktion

$$f(x, y) = x \frac{1 - x^2}{1 - y} \quad , \quad y \neq 1 \quad (1)$$

entlang des Weges

$$x(t) = \cos t \quad y(t) = \cos^2 t \quad t \in [\pi/4, \pi/2] \quad .$$

**14. Linienintegral II: Bogenlänge**

**(6 Punkte)**

Mit Hilfe des Linienintegrals kann auch die Länge einer Kurve bestimmt werden, dies soll in dieser Aufgabe geübt werden.

(a) Durch die Parametrisierung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} \quad ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (2)$$

wird eine *Zykloide* beschrieben. Skizzieren Sie den Verlauf der Kurve in der  $(x, y)$ -Ebene und berechnen Sie deren Länge.

(b) Verfahren Sie analog mit der *logarithmischen Spirale*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ct} \cos t \\ e^{ct} \sin t \end{pmatrix} \quad ; \quad c \neq 0 \quad ; \quad 0 \leq t \leq \pi \quad . \quad (3)$$

**15. Flächenintegrale**

**(6 Punkte)**

Wir betrachten folgende Beispiele:

(a) Wir definieren eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  durch

$$\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1; y \geq 1; x + y \leq 3\} \quad . \quad (4)$$

Skizzieren Sie  $\mathcal{M}$  und berechnen Sie das Flächenintegral

$$\int_{\mathcal{M}} \frac{1}{(x+y)^3} dx dy \quad . \quad (5)$$

(b) Berechnen Sie durch Integration die von der Ellipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad (6)$$

eingeschlossene Fläche.