INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

PHYSIKALISCHE RECHENMETHODEN II — SS 2010

3. Übungsblatt — Abgabe: Mi, den 28.04.2010 bis 15.00 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

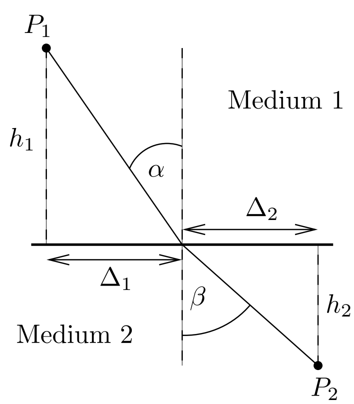
Stichworte: Lagrangesche Multiplikatoren, Taylor-Entwicklung

10. **Fermatsches Prinzip** **(6 Punkte)**

Das Fermatsche Prinzip besagt, dass sich ein Lichtstrahl zwischen zwei Raumpunkten stets so bewegt, dass die Laufzeit minimal wird. Aus diesem Prinzip sollen das Snelliussche Brechungsgesetz und das Reflexionsgesetz hergeleitet werden.

(a) Zur Herleitung des Brechungsgesetzes betrachte man untenstehende Skizze. Ein Lichtstrahl tritt vom Medium 1 mit Brechungsindex n_1 in das Medium 2 mit Brechungsindex n_2 ein. Gesucht ist der "zeitlich kürzeste" Weg vom Punkt P_1 zum Punkt P_2. Bestimmen Sie dazu die Zeit, die das Licht benötigt als Funktion von Δ_1 und Δ_2. Bestimmen Sie dann das Minimum dieser Funktion unter der Nebenbedingung $\Delta_1 + \Delta_2 = \text{const}$. Leiten Sie aus dem Ergebnis das Snelliussche Brechungsgesetz ab:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1} \quad . \tag{1}$$



(b) Betrachten Sie nun einen vom Punkt P_1 ausgehenden Lichtstrahl, der an der Grenzfläche beider Medien reflektiert wird. Leiten Sie aus einer zu (a) analogen Überlegung das Reflexionsgesetz ab (*Einfallswinkel = Reflexionswinkel*).

11. **Taylor-Reihen I** **(4 Punkte)**

Entwicklen Sie die folgenden Funktionen jeweils in eine Potenzreihe bis zu Gliedern zweiter Ordnung:

(a) $f(x, y) = xy^2 + 2x^2 + 1$ um den Punkt $(1, 2)$,

(b) $f(x, y) = \frac{y^2}{x^3}$ um den Punkt $(1, 0)$.

12. **Taylor-Reihen II (Multipolentwicklung)** **(5 Punkte)**

Das Gravitationspotential und elektrische Potential am Ort $\underline{x}$ enthalten Faktoren der Form $\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$. Hierbei bezeichnet $\underline{x}$ die Position des Beobachters und $\underline{x}'$ die Position(en) der Massen bzw. Ladungen.

(a) Entwickeln Sie $f(x', y', z') = |\underline{x} - \underline{x}'|$ und $f(x', y', z') = \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$ bis zur ersten Ordnung um $\underline{x}' = (x', y', z') = (0, 0, 0)$.

(b) Zeigen Sie nun, dass sich das elektrische Potential

$$\phi(\underline{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int dV' \, \frac{\varrho(\underline{x}', t)}{|\underline{x} - \underline{x}'|}$$

schreiben lässt als

$$\phi(\underline{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\underline{x}\,\underline{p}}{r^3} + \ldots \quad .$$

Hierbei sind $r = |\underline{x}|$ und

$$Q = \int dV' \, \varrho(\underline{x}', t) \quad ; \quad \underline{p} = \int dV' \underline{x}' \, \varrho(\underline{x}', t) \quad .$$